**Université du Littoral Côte d'Opale** **Juin 2010**

**L1 Math-Info**
**Examen d'algèbre (Semestre 2, Session 2).**
**Durée 3 H.**

## Questions de cours

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n$ et soit $f$ un endomorphisme de $E$.

1. Donner les définitions de: Noyau de $f$ noté $ker(f)$ et de image de $f$ notée $Im(f)$.
2. Quelle est la relation qui lie les dimensions de $ker(f)$ et de $Im(f)$?
3. Compléter: $f$ bijective $\Longleftrightarrow ker(f) = ...$
4. Compléter: $f$ bijective $\Longleftrightarrow Im(f) = ....$
5. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ et soit $B$ une base de $E$. Si $A$ est la matrice de $f$ dans $B$ et si $G$ est la matrice de $g$ dans $B$, quelle est la matrice de $g \circ f$ dans la base $B$.

## Exercice I

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $B = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $E$ et soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par $f(P) = Q$ avec

$$Q(X) = XP'(X) - (1/2)P(X).$$

1. Quelle est la dimension de $E$?
2. Soit $P$ le polynôme défini par $P(X) = X^2 - 3X$, donner $f(P)$.
3. Donner la matrice de $f$ dans la base $B$.
4. Donner $ker(f)$ et $Im(f)$.
5. $f$ est-elle bijective?

## Exercice II

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $3 \times 3$ coefficients réels et soit $F$ le sous-ensemble de $E$ défini par

$$F = \{M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Quelle est la dimension de $E$?
2. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
3. Donner une base de $F$. Quelle est la dimension de $F$?

### Exercice III

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni des bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $B' = \{u, v, w\}$ avec $u = e_1 - e_3$; $v = -e_2$; $w = e_1 + e_3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = mat(f; B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $x = e_1 + 2e_2 - e_3$. Donner $f(x)$.
2. Calculer le déterminant de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible?
3. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
4. En déduire la matrice $D = mat(f; B')$.
5. Donner la matrice de passage $P$ de la base $B$ vers $B'$.
6. Calculer son inverse $P^{-1}$.
7. Vérifier que $A = PDP^{-1}$
8. Calculer $A^2$. En déduire $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

### Exercice IV

Soit $A$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $A$. En déduire que $A$ est inversible.
2. Vérifier que $A^2 = 2\,I - A$, où $I$ est la matrice identité.
3. En déduire l'inverse $A^{-1}$ (en fonction de $A$).