EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Jeudi 07 juin 2007, 14h-17h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Veuillez utiliser des feuilles **blanches** pour la question de cours et les exercices 1 et 2, des feuilles **jaunes** pour les exercice 3 et 4, et des feuilles **vertes** pour les exercices 5 et 6.

Question de cours Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

1. Rappeler la définition d'une application $\mathbb{K}$-linéaire $L\colon V \longrightarrow W$.
2. Rappeler les définitions du noyau $\ker(L)$ de L et de l'image $\mathrm{Im}(L)$ de L.
3. Montrer $\ker(L)$ est un sous-espace vectoriel de V.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(L)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Exercice 1 Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{V_1} = (2, -1, 1)$, $\overrightarrow{V_2} = (1, -3, -2)$ et $\overrightarrow{V_3} = (1, 7, 8)$.
Le système $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 On considère le sous-ensemble

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 2x - y + 2z = 0\}$$

de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de P et justifier qu'il s'agit bien d'une base.

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + z, z - y, 2x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle bijective ?

4. Appliquer le théorème de rang pour trouver la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
6. Soit F un supplémentaire quelconque de $\ker(f)$. A-t-on forcément $F \subset \mathrm{Im}(f)$? Justifier.

Exercice 4 Pour quelles valeurs du paramètre m le système linéaire (S) admet-il une unique solution ?

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrrr} 2 & = & -mx & +2y & -2z \\ 0 & = & x & -my & +2z \\ -1 & = & & y & +z \end{array}\right.$$

Résoudre le système (S) pour ces valeurs du paramètre m.

Exercice 5 On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ avec $\vec{e_1} = (1,0)$ et $\vec{e_2} = (0,1)$.
Soit l'application linéaire $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et soit A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ admettant (x,y) pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
   Déterminer $f(\overrightarrow{u})$.
2. On change la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ où $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.
   Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
4. Exprimer A en fonction de B et P. Calculer A^n.

Exercice 6

1. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & \imath & 0 & 0 \\ \imath & 1 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 1 & \imath \\ 0 & 0 & \imath & 1 \end{vmatrix}.$$
2. On admet que
$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\imath.$$
   Calculer les déterminants
$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 2 & -1+\sqrt{3}\imath & -1-\sqrt{3}\imath \\ -1+\sqrt{3}\imath & 2 & -1+\sqrt{3}\imath \\ -1-\sqrt{3}\imath & -1+\sqrt{3}\imath & 2 \end{vmatrix}.$$