EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Lundi 17 septembre 2007, 14h-17h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Veuillez utiliser des feuilles **blanches** pour la question de cours et l'exercice 1, des feuilles **jaunes** pour les exercices 2 et 3, et des feuilles **vertes** pour les exercices 4, 5 et 6.

Question de cours

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel de V.
2. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux sous-espaces de V, alors l'intersection $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 1 Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont trois réels.

A l'aide d'un calcul de déterminant, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\beta = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}$.

On considère le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f : x \longmapsto \exp(x)$ (exponentielle) et $g : x \longmapsto \exp(-x)$.

On considère le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $c : x \longmapsto \cosh(x)$ (cosinus hyperbolique) et $s : x \longmapsto \sinh(x)$ (sinus hyperbolique).

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

   Remarque : $\{f, g\}$ est donc une base de l'espace vectoriel E.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

   Remarque : $\{c, s\}$ est donc une base de l'espace vectoriel F.

3. Montrer que $c \in E$ et que $s \in E$.

   Remarque : on déduit que $F \subset E$.

4. Montrer que $E = F$.
5. Donner la matrice de passage P de la base $\{f, g\}$ dans la base $\{c, s\}$.
6. Exprimer la fonction $u : x \longmapsto 2\cosh(x) - 3\sinh(x)$ dans la base $\{f, g\}$.
7. Exprimer la fonction $v : x \longmapsto 2\exp(x) - 3\exp(-x)$ dans la base $\{c, s\}$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z),$$

$$g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3,\ g(e_2) = e_2 + e_3,\ g(e_3) = e_3.$$

1. Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner l'image de $\mathcal{B}$ par l'application linéaire $h = f - g$.
3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - z, x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
4. Enoncer le théorème de rang. L'appliquer à f.

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

Exercice 6 Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a et m :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - mx_2 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$