Examen Septembre 2008
Sans documents ni calculatrices.

Question de cours

(a) Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$. Rappeler la définition de l'inversibilité de M.
(b) Donner deux exemples de matrice carrée non-inversible.
(c) Montrer que si M et N sont deux matrices inversibles dans l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, alors MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

Exercice 1
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Montrer que si f est un isomorphisme de E dans F, alors l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Exercice 2
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$ des réels.
On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$A = \left\{ a(X^2+1) + bX + c(X^2 - X + 1) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Quelle est la dimension de A ? Justifier. Donner une base $\mathcal{B}$ de A.

Exercice 3
Soit $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice circulante définie par trois réels a, b, c :

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant $\det C$ de la matrice C.
2. On note $\jmath$ le nombre complexe $\jmath = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que

$$\det C = -(a+b+c)(a + \jmath b + \jmath^2 c)(a + \jmath c + \jmath^2 b).$$

Exercice 4

Soit m un complexe et $A(m) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ la matrice suivante :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \imath \\ 1 & m & 0 \\ \imath & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice $A(m)$ en fonction du paramètre m.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la matrice $A(m)$ soit inversible.
3. Quand cette condition est vérifiée, trouver l'unique solution du système suivant
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \imath \\ 1 & m & 0 \\ \imath & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
où $a,\ b,\ c$ sont trois complexes fixés.

Exercice 5

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère l'endomorphisme f défini par

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 3\vec{e_2}\ ;\ f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + \vec{e_2}.$$

1. Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Soit $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} \in E$. Calculer les coordonnées x' et y' (en fonction de x et y) de $f(\vec{u})$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
3. Soient $\vec{e'_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{e'_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$. Démontrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e'_1}, \vec{e'_2})$ est une base de E.
4. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
5. Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire les expressions de $f(\vec{e'_1})$ et $f(\vec{e'_2})$ comme combinaison linéaire de $\vec{e'_1}$ et $\vec{e'_2}$.