EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Lundi 17 septembre 2007, 14h-17h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Veuillez utiliser des feuilles **blanches** pour la question de cours et l'exercice 1, des feuilles **jaunes** pour les exercices 2 et 3, et des feuilles **vertes** pour les exercices 4, 5 et 6.

Question de cours

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel de V.

   Une partie non vide W de V est un sous-espace vectoriel de V si c'est une partie stable pour les deux lois de V ; c'est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites.

2. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux sous-espaces de V, alors l'intersection $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de V.

   Notons $+$ et $.$ les deux lois de V (i.e. on considère l'espace vectriel $(V, +, .)$.

   – $0 \in W_1$ et $0 \in W_2$, donc $0 \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est non vide.
   – Soit $x \in W_1 \cap W_2$ et $y \in W_1 \cap W_2$. On déduit $x \in W_1$ et $y \in W_1$ puis $x + y \in W_1$ (car W_1 est un sous-espace vectoriel de V). De même, $x \in W_2$ et $y \in W_2$ puis $x+y \in W_2$ (car W_2 est un sous-espace vectoriel de V). D'où $x + y \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est stable pour $+$.
   – Soit $x \in W_1 \cap W_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On déduit $x \in W_1$ et comme $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in W_1$ (car W_1 est un sous-espace vectoriel de V). De même, $x \in W_2$ et comme $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in W_2$ (car W_2 est un sous-espace vectoriel de V). D'où $\lambda.x \in W_1 \cap W_2$ et $W_1 \cap W_2$ est stable pour $..$

   Ainsi, $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

Solution 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} \neq 0,$$

équivaut à ce que le système $\beta = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

En application de la règle de Sarrus, on obtient :
$y + 2z \neq 0 \Longleftrightarrow \beta = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution 2

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \exp(x) + \mu \exp(-x) = 0$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient que $\lambda = 0$ et en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient que $\mu = 0$ et l'ensemble des fonctions $\{f, g\}$ est libre.

   Remarque : $\{f, g\}$ est donc une base de l'espace vectoriel E.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \cosh(x) + \mu \sinh(-x) = 0$, d'où en posant $x = 0$, on obtient que $\lambda = 0$ et en dérivant puis posant $x = 0$, on obtient que $\mu = 0$ et l'ensemble des fonctions $\{c, s\}$ est libre.

   Remarque : $\{c, s\}$ est donc une base de l'espace vectoriel F.

3. Montrer que $c \in E$ et que $s \in E$.

   $c = \frac{f+g}{2} \in E$ et $s = \frac{f-g}{2} \in E$ et on déduit que $F \subset E$.

4. Montrer que $E = F$.

   $f = c + s \in F$ et $g = c - s \in F$ et on déduit que $E \subset F$.

   De $F \subset E$ et $E \subset F$, on conclut que $E = F$.

5. Donner la matrice de passage P de la base $\{f, g\}$ dans la base $\{c, s\}$.

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Exprimer la fonction $u\ :\ x \longmapsto 2\cosh(x) - 3\sinh(x)$ dans la base $\{f, g\}$.

$$\begin{aligned} 2\cosh(x) - 3\sinh(x) &= 2\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} - 3\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\exp(x) + \frac{5}{2}\exp(-x) \\ u &= -\frac{1}{2}f + \frac{5}{2}g \end{aligned}$$

7. Exprimer la fonction $v\ :\ x \longmapsto 2\exp(x) - 3\exp(-x)$ dans la base $\{c, s\}$.

$$\begin{aligned} 2\exp(x) - 3\exp(-x) &= 2(\cosh(x) + \sinh(x)) - 3(\cosh(x) - \sinh(x)) \\ &= -\cosh(x) + 5\sinh(x) \\ v &= -c + 5s \end{aligned}$$

Solution 3

1. Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $h = f - g$,

$$M_h = M_f - M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Donner l'image de $\mathcal{B}$ par l'application linéaire $h = f - g$.

$$h(e_1) = -e_2 - e_3,\ h(e_2) = e_1 - e_3,\ h(e_3) = e_1 + e_2.$$

3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$h(x, y, z) = (y + z, -x + z, -x - y).$$

Solution 4 Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - z, x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
$\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\mu \in \mathbb{R}$, $\forall(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $\forall(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - z_1) + \mu(x_2 - z_2), \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - z_1), \lambda(x_1 + y_1)) + (\mu(x_2 - z_2), \mu(x_2 + y_2)) \\ &= \lambda(x_1 - z_1, x_1 + y_1) + \mu(x_2 - z_2, x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

2. Déterminer $\ker(f)$.
$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(x, y, z) = (0, 0)\}$.

$$f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -y = z.$$

$\ker(f) = \langle(1, -1, 1)\rangle$.

3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

   $\mathrm{Im}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (a, b)\}$.

$$f(x,y,z) = (a,b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - z = a \\ x + y = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x - a \\ y = b - x \end{array} \right. .$$

   $\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

4. Enoncer le théorème de rang. L'appliquer à f.

   $\underbrace{\dim(\ker(f))}_{=1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=2} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3}$.

Solution 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

   Calcul du discriminant réduit : $\Delta' = -12$. Les racines sont donc $-2 + 2\imath\sqrt{3}$ et $-2 - 2\imath\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

   On pose $Z = z^4$, l'équation devient alors $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

   Premier cas : $z^4 = -2 + 2\imath\sqrt{3} = 4e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$.

   Une racine évidente est $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{6}}$. L'ensemble des racines s'obtient en multipliant cette racine évidente par chacune des racines quatrièmes de l'unité.

   Puis, l'ensemble des racines est $\{\sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{2\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{7\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\imath\pi}{3}}\}$.

   Second cas : $z^4 = -2 - 2\imath\sqrt{3} = 4e^{\frac{4\imath\pi}{3}}$.

   Une racine évidente est $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{3}}$. L'ensemble des racines s'obtient en multipliant cette racine évidente par chacune des racines quatrièmes de l'unité.

   Puis, l'ensemble des racines est $\{\sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{4\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{11\imath\pi}{6}}\}$.

   Conclusion : l'ensemble des racines de l'équation $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$ est

$$\{\sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{2\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{7\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\imath\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{4\imath\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{11\imath\pi}{6}}\}.$$

Solution 6 Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a et m :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - mx_2 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 2.$$

• Si $m \neq -2$, le système est dit de Cramer et admet une solution unique.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ a & -m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -m & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m+2-a.$$

et

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2a}{m+2} \ ; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-a}{m+2} \ ; \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{m+2-a}{m+2}.$$

• Si $m = -2$, le système devient

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \quad [L_1] \\ x_1 + 2x_2 = a \quad [L_2] \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad [L_3] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \quad [L_1] \\ x_1 + 2x_2 = a \quad [L_2] \\ 0 = a \quad [L_1 + L_2 - 2L_3] \end{cases}.$$

◦ Si $a = 0$, le système équivaut à

$$\begin{cases} x_3 = \frac{2-x_1}{2} \quad [L_1] \\ x_2 = \frac{a-x_1}{2} \quad [L_2] \end{cases}.$$

En d'autres termes,

$$(x_1, x_2, x_3) \in \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\vec{u}},$$

ou la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est solution.

◦ Si $a \neq 0$, il n'y a pas de solution.