Université du Littoral Côte d'Opale
S2 Maths-Info, Examen d'algèbre, 4 juin 2008

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Question de cours

Soit K un corps commutatif, V et W deux espaces vectoriels sur K et $f\colon V \to W$ une application linéaire.

1. Rappeler les définitions de l'image $\mathsf{Im}(f)$ et du noyau $\mathsf{Ker}(f)$ de f.
2. Montrer que $\mathsf{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de V.
3. Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de V, montrer que la famille $\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ engendre $\mathsf{Im}(f)$.

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une partie de E. Montrer que si $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ est libre, alors $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre. La réciproque est-elle juste ? Justifier.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à deux lignes et deux colonnes. On considère le sous-ensemble A de E :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b+a & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E.
2) Quelle est la dimension de A ? Justifier. Donner une base $\mathcal{B}$ de A.

Exercice 3 Soit $T \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice de Vandermonde définie par trois réels a, b, c :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Par des opérations sur les lignes, montrer que $\det T = (b-a)(c-a)(c-b)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit m un réel et $A(m) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de la matrice $A(m)$ en fonction du paramètre m.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la matrice $A(m)$ soit inversible.

3) Quand cette condition est vérifiée, trouver l'unique solution du système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont trois réels fixés.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (7x + 2y, -4x + y)$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\beta = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

3) Soient deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, -2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, -1)$. Montrer que $\beta' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Exprimer les vecteurs $f(\overrightarrow{v_1})$ et $f(\overrightarrow{v_2})$ dans la base β'.

4) Donner la matrice B de f relativement à la base β'.

5) Donner la matrice P de passage de la base β à la base β'. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

6) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule qui lie les matrices A, B et P. Calculer A^n.