

## Examen

Jeudi 29/03/2007, 14h-16h  
ni documents ni calculatrices autorisés

Veillez utiliser des feuilles **blanches** pour la Question de cours et l'Exercice 1, des feuilles **jaunes** pour l'Exercice 2, et des feuilles **vertes** pour les Exercices 3 et 4.

### Question de cours

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$n\mathbb{Z} = \{nz \text{ tels que } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que  $n\mathbb{Z}$  est un sous-groupe du groupe additif  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ .

2. Si  $H$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ , montrer qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H = n\mathbb{Z}$ .  
Que conclure de ces deux premières questions ?
3. Rappeler la définition d'un idéal  $I$  d'un anneau  $A$ .
4. Montrer que les idéaux de l'anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers sont tous de la forme  $n\mathbb{Z}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 1

On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  en posant, pour tout entiers naturels  $a, b, c, d$  :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Rappeler la définition de la classe d'équivalence d'un élément  $(a, b)$  de  $\mathbb{N}^2$ .
3. Déterminer les classes d'équivalence de  $(0, 0)$ , de  $(3, 1)$ .
4. Décrire l'ensemble quotient  $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ .

### Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

(A) Pour chacun des nombres complexes suivants donner la partie réelle, la partie imaginaire et le module.

1.  $z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{4+i}$

2.  $z_2 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

(B) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z^4 = -1.$$

(C) Ecrire le nombre complexe  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$  sous la forme exponentielle  $z = re^{i\phi}$ , avec  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$ .

(D) On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau du corps  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 3

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver le plus grand commun diviseur  $d$  des deux entiers 288 et 86.
2. Trouver un couple d'entiers relatifs  $(u_0, v_0)$  solution de l'équation

$$(E) : \quad 288u + 86v = d.$$

### Exercice 4

Parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, quels sont les sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}$  ?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 0\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x - y) = 3\} \\ E &= \{(x, 8x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Justifier votre réponse.