PARTIEL – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Samedi 29 mars 2008 de 10h15 à 12h15

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Question de cours

1. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe.
   Montrer que l'élément neutre e de G est unique.
2. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe, soit $(G', \cdot, e')$ un autre groupe et soit $f\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupe.
   (a) Montrer que $f(e) = e'$, i.e. que f préserve l'élément neutre.
   (b) Soit x un élément d'inverse x^{-1}, montrer que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, i.e. que f préserve l'inverse.
3. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe, soit $(G', \cdot, e')$ un autre groupe et soit $f\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupe.
   Montrer que l'image $Im(f)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $f(x, y) = x^2 + 2y$.

1. Rappeler la définition d'une fonction h surjective de E dans F.
   La fonction f est-elle surjective ?
2. Rappeler la définition d'une fonction h injective de E dans F.
   La fonction f est-elle injective ?
3. Soit x_0 un réel fixé. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $y \in \mathbb{R}$ associe $g(y) = f(x_0, y) = x_0^2 + 2y$.
   Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \Longleftrightarrow x^2 - 2y' = x'^2 - 2y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que toute classe d'équivalence de (a, b), notée $\mathcal{R}(a, b)$, est une parabole $\mathcal{P}$ dont on déterminera une équation cartésienne en fonction des paramètres a et b.
3. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^2 + 2y$.

(a) Montrer que, $\forall (x', y') \in \mathcal{R}(x, y)$, on a

$$f(x', y') = x^2 + 2y.$$

Par conséquent on a que $f(\mathcal{R}(x, y)) = \{x^2 + 2y\}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) En déduire que l'application f induit une application bijective $\overline{f}$ de l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ la permutation définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en un produit de cycles disjoints.
2. Décomposer σ en un produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Quel est l'ordre de σ ? Calculer σ^{145}.
5. Trouver l'inverse σ^{-1} de σ.

Exercice 4 Soit $G = \mathbb{Z} \times \{1, -1\}$ le produit cartésien de $\mathbb{Z}$ et $\{1, -1\}$.

On définit une loi de composition $\star$: $G \times G \to G$ par la formule suivante :

$$(m, \alpha) \star (n, \beta) = (m + \alpha n, \alpha\beta)$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et tout $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$.

1. Trouver un élément neutre pour la loi de composition $\star$.
2. Montrer que G muni de la loi $\star$ est un groupe.
3. Le groupe $(G, \star)$ est-il abélien ? Justifiez votre réponse.