

Durée de l'épreuve : 2 h 00

Documents autorisés : calculatrice

• **Exercice 1** (5 points)

On définit sur \mathbb{R}^2 la loi $*$ par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}).$$

1. Vérifier que cette loi est bien une loi de composition interne.
2. La loi est-elle associative ?
3. A t-on un élément neutre pour $*$?
4. $(\mathbb{R}^2, *)$ est-il un groupe ?
5. Si tel est le cas, préciser s'il est abélien.

• **Exercice 2** (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. On travaille avec \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs muni de la loi de composition usuelle $+$ (l'addition). On note par $n\mathbb{Z}$ le sous-ensemble de \mathbb{Z} formé des multiples de n , c'est-à-dire

$$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

On définit une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{Z} en posant :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

2. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

On note par \bar{k} la classe d'équivalence de k pour la relation \mathcal{R} .

3. (a) Définir \bar{k} .
(b) Donner un autre représentant de \bar{k} .
4. Donner, sans justification, les éléments de l'ensemble quotient \mathbb{Z}/\mathcal{R} ?

On notera \mathbb{Z}_n cet ensemble quotient. On définit sur \mathbb{Z}_n une loi de composition interne \oplus en posant :

$$\forall (\bar{p}, \bar{q}) \in (\mathbb{Z}_n)^2, \bar{p} \oplus \bar{q} = \overline{p + q}.$$

5. Montrer que la loi \oplus est associative.
6. Montrer que la loi \oplus est commutative.
7. Déterminer l'élément neutre de \oplus dans \mathbb{Z}_n .
8. Quel est le symétrique de $\bar{1}$ pour la loi \oplus dans \mathbb{Z}_n ?
9. Montrer que (\mathbb{Z}_n, \oplus) est un groupe commutatif.

On considère l'application f de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z}_n telle que

$$f(p) = \overline{2p}.$$

10. Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans (\mathbb{Z}_n, \oplus) .
11. On considère $n = 6$.
 - (a) Déterminer le noyau de f . Ce morphisme f est-il injectif ?
 - (b) Déterminer l'image de f . Ce morphisme f est-il surjectif ?
 - (c) f est-il un isomorphisme de groupes ?
12. On considère $n = 5$.

- (a) Déterminer le noyau de f . Ce morphisme f est-il injectif?
- (b) Déterminer l'image de f . Ce morphisme f est-il surjectif?
- (c) f est-il un isomorphisme de groupes?

• **Exercice 3** (5 points)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a_n = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b_n = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que les nombres a_n et b_n sont divisibles par $n - 4$.
2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on pose $\alpha_n = 2n + 1$ et $\beta_n = n + 3$. On note d_n le PGCD de α_n et de β_n .
 - (a) Établir une relation entre α_n et β_n indépendante de n .
 - (b) Montrer que d_n divise 5.
 - (c) Démontrer que les nombres α_n et β_n sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a_n et b_n . (On pourra utiliser les résultats des questions 2.c et 3.)
 - (b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

• **Exercice BONUS (Identité de Bézout et lemme chinois)** (3 points)

On considère le nombre premier $p = 5$. Élever au carré, ajouter 11, diviser par 24. Quel est le reste dans la division? Idem avec $p = 31$. Idem avec un nombre premier de votre choix. Est-ce un hasard?

Indication : vérifier que pour $p > 3$ premier, $p^2 \equiv 1(2)$ (puis $p^2 \equiv 1(8)$) et $p^2 \equiv 1(3)$ puis utiliser le lemme chinois.

• **Exercice BONUS (Critère de divisibilité)** (2 points)

Roméo a écrit son numéro de téléphone sur un papier pour Juliette. Mais il a plu sur le papier et un chiffre est illisible :

02 98 *3 81 98.

Juliette se souvient que Roméo lui a dit : « mon numéro de téléphone est divisible par mon nombre fétiche, le 11 ».

Comment fait Juliette pour retrouver le chiffre manquant?