

Durée de l'épreuve : 2 h 00

Documents autorisés : calculatrice

• **Exercice 1** (5 points)

On définit sur  $\mathbb{R}^2$  la loi  $*$  par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}).$$

1. Vérifier que cette loi est bien une loi de composition interne.
2. La loi est-elle associative ?
3. A t-on un élément neutre pour  $*$  ?
4.  $(\mathbb{R}^2, *)$  est-il un groupe ?
5. Si tel est le cas, préciser s'il est abélien.

• **Exercice 2** (10 points)

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . On travaille avec  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs muni de la loi de composition usuelle  $+$  (l'addition). On note par  $n\mathbb{Z}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  formé des multiples de  $n$ , c'est-à-dire

$$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que  $(n\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{Z}$  en posant :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

2. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

On note par  $\bar{k}$  la classe d'équivalence de  $k$  pour la relation  $\mathcal{R}$ .

3. (a) Définir  $\bar{k}$ .  
(b) Donner un autre représentant de  $\bar{k}$ .
4. Donner, sans justification, les éléments de l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$  ?

On notera  $\mathbb{Z}_n$  cet ensemble quotient. On définit sur  $\mathbb{Z}_n$  une loi de composition interne  $\oplus$  en posant :

$$\forall (\bar{p}, \bar{q}) \in (\mathbb{Z}_n)^2, \bar{p} \oplus \bar{q} = \overline{p + q}.$$

5. Montrer que la loi  $\oplus$  est associative.
6. Montrer que la loi  $\oplus$  est commutative.
7. Déterminer l'élément neutre de  $\oplus$  dans  $\mathbb{Z}_n$ .
8. Quel est le symétrique de  $\bar{1}$  pour la loi  $\oplus$  dans  $\mathbb{Z}_n$  ?
9. Montrer que  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  est un groupe commutatif.

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}_n$  telle que

$$f(p) = \overline{2p}.$$

10. Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ .
11. On considère  $n = 6$ .
  - (a) Déterminer le noyau de  $f$ . Ce morphisme  $f$  est-il injectif ?
  - (b) Déterminer l'image de  $f$ . Ce morphisme  $f$  est-il surjectif ?
  - (c)  $f$  est-il un isomorphisme de groupes ?
12. On considère  $n = 5$ .

- (a) Déterminer le noyau de  $f$ . Ce morphisme  $f$  est-il injectif?
- (b) Déterminer l'image de  $f$ . Ce morphisme  $f$  est-il surjectif?
- (c)  $f$  est-il un isomorphisme de groupes?

• **Exercice 3** (5 points)

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a_n = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b_n = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que les nombres  $a_n$  et  $b_n$  sont divisibles par  $n - 4$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 5, on pose  $\alpha_n = 2n + 1$  et  $\beta_n = n + 3$ . On note  $d_n$  le PGCD de  $\alpha_n$  et de  $\beta_n$ .
  - (a) Établir une relation entre  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  indépendante de  $n$ .
  - (b) Montrer que  $d_n$  divise 5.
  - (c) Démontrer que les nombres  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont multiples de 5 si et seulement si  $n - 2$  est multiple de 5.
3. Montrer que  $2n + 1$  et  $n$  sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer, suivant les valeurs de  $n$  et en fonction de  $n$ , le PGCD de  $a_n$  et  $b_n$ . (On pourra utiliser les résultats des questions 2.c et 3.)
  - (b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers  $n = 11$  et  $n = 12$ .

• **Exercice BONUS (Identité de Bézout et lemme chinois)** (3 points)

On considère le nombre premier  $p = 5$ . Élever au carré, ajouter 11, diviser par 24. Quel est le reste dans la division? Idem avec  $p = 31$ . Idem avec un nombre premier de votre choix. Est-ce un hasard?

*Indication : vérifier que pour  $p > 3$  premier,  $p^2 \equiv 1(2)$  (puis  $p^2 \equiv 1(8)$ ) et  $p^2 \equiv 1(3)$  puis utiliser le lemme chinois.*

• **Exercice BONUS (Critère de divisibilité)** (2 points)

Roméo a écrit son numéro de téléphone sur un papier pour Juliette. Mais il a plu sur le papier et un chiffre est illisible :

02 98 \*3 81 98.

Juliette se souvient que Roméo lui a dit : « mon numéro de téléphone est divisible par mon nombre fétiche, le 11 ».

Comment fait Juliette pour retrouver le chiffre manquant?