Nombres réels et suites

Denis Vekemans [*]

1 L'ensemble des réels

Introduction : on suppose le corps $\mathbb{R}$ des réels construit.

1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$ relatives à la relation d'ordre

Théorème 1

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *est un corps totalement ordonné.*

Propriétés.

– On peut additionner des inégalités : si $\forall i \in [[1, n]],\ x_i \leq y_i$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

– Pour passer à l'opposé une inégalité : si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.

– On peut multiplier des inégalités à termes positifs : si $\forall i \in [[1, n]],\ 0 \leq x_i \leq y_i$, alors

$$0 \leq \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

– Pour passer à l'inverse une inégalité à termes positifs : si $0 < x \leq y$, alors $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

1.2 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit sa **valeur absolue** $|x|$ par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Propriétés.

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \in \mathbb{R}_+$.

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x \times y| = |x| \times |y|$.

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

La distance $d(x, y)$ entre deux valeurs réelles x et y peut s'exprimer à l'aide de la valeur absolue : $d(x, y) = |x - y|$.

[*]Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Théorème 2
Inégalités triangulaires.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x+y|. \tag{2}$$

1.3 Borne supérieure

Théorème 3
Théorème de la borne supérieure. *Toute partie A non vide majorée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels admet une borne supérieure* $\sup_A$.

Caractérisation de la **borne supérieure**. Soit A une partie non vide majorée de l'ensemble $\mathbb{R}$, le réel M est $\sup_A$ si et seulement si M majore A (i.e. $\forall x \in A,\ x \leq M$) et $M - \varepsilon$ ne majore pas A (i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x \leq M$).

1.4 Intervalles réels

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si lorsqu'elle contient deux réels, elle contient alors tous les réels intermédiaires. En d'autres termes, $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x, y] \in I$.

Il en existe différents types : $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b[$, $\{a\}$, $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $\emptyset$, $\mathbb{R}$.

1.5 Partie entière d'un réel, développement décimal d'un réel

Soit x un réel, le plus grand entier inférieur ou égal à x est appelé **partie entière** de x et se note $E(x)$. On a donc pour tout réel x : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Valeurs décimales approchées. La partie entière permet de définir les valeurs décimales par excès et par défaut d'un réel x donné : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur décimale par défaut de x à 10^{-n} près est $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et la valeur décimale par excès de x à 10^{-n} près est $v_n = \frac{1+E(10^n x)}{10^n} = u_n + 10^{-n}$.

Les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite x.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite (croissante) de nombres rationnels $(r_n)_n$ qui converge vers x. (C'est une façon de définir l'ensemble des réels).

Théorème 4
Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Alors, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$.

Remarque.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Suites réelles

Introduction : on désigne par "suite réelle" tout suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

Quitte à être réindexée, toute suite (réelle ou non) peut être indexée sur $\mathbb{N}$ et sera donc notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1 Suites réelles convergentes

2.1.1 Définition de limite finie

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que **la suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** l si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et on dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun réel, on dit que la suite est divergente.

Théorème 5

La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 6

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Théorème 7

Toute suite réelle convergente est bornée.

2.1.2 Suites réelles extraites

La suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **extraite** de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.

Théorème 8

Toute suite extraite d'une suite réelle convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1.3 Cas particulier des suites qui convergent vers 0

Théorème 9

Il est équivalent de dire que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque.

C'est évident au vu de la définition de la convergence vers 0, mais c'est faux si on remplace "vers 0" par "vers $l \in \mathbb{R}$".

Théorème 10

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite réelle $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 11

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et si la suite réelle* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq u_n$*, alors la suite réelle* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0*.*

2.1.4 Opérations algébriques sur les limites finies

Théorème 12

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles,* λ *et* μ *deux réels.*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l_2$*, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$*.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l_2$*, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = l_1 l_2$*.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l_2 \neq 0$*, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$*.*

2.1.5 Limites finies et ordre

Théorème 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui converge vers* $l \in \mathbb{R}$ *et soient* λ *et* μ *deux réels.*

- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lambda$*, alors* $l \leq \lambda$*.*
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \mu$*, alors* $l \geq \mu$*.*

Remarque.

Cette propriété devient fausse si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.

Théorème 14

Théorème des gendarmes*. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles telles que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$ *et que les suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$*, alors la suite réelle* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* $l \in \mathbb{R}$*.*

2.2 Suites réelles qui divergent vers l'infini

2.2.1 Définition de limite infinie

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou **diverge vers** $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ou **diverge vers** $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow u_n \leq A.$$

2.2.2 Opérations algébriques sur les limites infinies

Théorème 15

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *et si la suite réelle* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$*.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l > 0$*, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$*.*

- *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
- *Si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Remarque.

On pourrait énoncer un théorème analogue avec $-\infty$.

2.2.3 Limites infinies et ordre

Théorème 16

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que :*

1. $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$,

alors la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge aussi vers* $+\infty$.

Remarque.

On pourrait énoncer un théorème analogue avec $-\infty$.

2.3 Formes indéterminées : tableau récapitulatif

Concernant la somme (et la différence).

	$u_n \to -\infty$	u_n bornée	$u_n \to +\infty$
$v_n \to -\infty$	$u_n + v_n \to -\infty$	$u_n + v_n \to -\infty$	indéterminée
v_n bornée	$u_n + v_n \to -\infty$	$u_n + v_n$ bornée	$u_n + v_n \to +\infty$
$v_n \to +\infty$	indéterminée	$u_n + v_n \to +\infty$	$u_n + v_n \to +\infty$

Concernant le produit (et le quotient).

	$u_n \to -\infty$	$u_n \to a < 0$	$u_n \to 0$	$u_n \to a > 0$	$u_n \to +\infty$
$v_n \to -\infty$	$u_n \cdot v_n \to +\infty$	$u_n \cdot v_n \to +\infty$	indéterminée	$u_n \cdot v_n \to -\infty$	$u_n \cdot v_n \to -\infty$
$v_n \to b < 0$	$u_n \cdot v_n \to +\infty$	$u_n \cdot v_n \to a \cdot b$	$u_n \cdot v_n \to 0$	$u_n \cdot v_n \to a \cdot b$	$u_n \cdot v_n \to -\infty$
$v_n \to 0$	indéterminée	$u_n \cdot v_n \to 0$	$u_n \cdot v_n \to 0$	$u_n \cdot v_n \to 0$	indéterminée
$v_n \to b > 0$	$u_n \cdot v_n \to -\infty$	$u_n \cdot v_n \to a \cdot b$	$u_n \cdot v_n \to 0$	$u_n \cdot v_n \to a \cdot b$	$u_n \cdot v_n \to +\infty$
$v_n \to +\infty$	$u_n \cdot v_n \to -\infty$	$u_n \cdot v_n \to -\infty$	indéterminée	$u_n \cdot v_n \to +\infty$	$u_n \cdot v_n \to +\infty$

Exercice 1 Calculer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$;
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin(n!)}{1 + n^2}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + n\ln(n)} - \sqrt{n}$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n \ln(n)}{1 + v_n^2}$ où v_n est le nnombre de chiffres dans la représentation décimale de n.

2.4 Théorèmes d'existence des limites

2.4.1 Suites monotones

Théorème 17

Théorème de la limite monotone. *Toute suite réelle croissante et majorée converge ; toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers* $+\infty$.

Remarque.

Toute suite décroissante et minorée converge ; toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est crcoissante, l'autre décroissante et si la suite réelle $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Théorème 18

Théorème des suites adjacentes. *Si les suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers la même limite.*

Théorème 19

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite réelle convergente.*

2.4.2 Suites réelles de Cauchy

On dit que **la suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Théorème 20

Toute suite réelle de Cauchy converge et réciproquement.

2.5 Valeur d'adhérence d'une suite

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **valeur d'adhérence** de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \text{tel que } |u_n - \lambda| < \varepsilon.$$

Caractérisation de la **valeur d'adhérence** ...

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. "λ est une valeur d'adhérence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$" équivaut à "il existe une suite réelle extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite λ".

Théorème 21

Une suite réelle qui possède (au moins) deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

3 Suites réelles récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

3.1 Le cas des suites réelles arithmétiques : $f : x \mapsto x + r$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r, que l'on appellera **raison de la suite arithmétique**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $u_n = u_0 + nr$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2} r + (n+1)u_0.$

3.2 Le cas des suites réelles géométriques : $f : x \mapsto q\ x$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q, que l'on appellera **raison de la suite géométrique**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n.$$

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $$u_n = q^n u_0\ ;$$
2. si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1-q}.$

Théorème 22
Une suite réelle géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q est convergente si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$.

3.3 Le cas des suites réelles arithmético-géométriques : $f : x \mapsto a\ x + b$

Il s'agit des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Dans un premier temps, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h$ et on détermine h pour que la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - h$, on en déduit aisément une formule donnant u_n en fonction de n et de u_0, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut alors étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4 Dans un cadre assez général

On dit que $I \subset \mathbb{R}$ est un **intervalle stable** pour f si $f(I) \subset I$.

Théorème 23

Si $u_0 \in I$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fontion réelle et I un intervalle stable pour f, alors

- *la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie,*
- *quand f est croissante sur I, la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque $u_1 > u_0$ et décroissante lorsque $u_1 < u_0$,*
- *quand f est décroissante sur I, la suite réelle $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque $u_2 > u_0$ et décroissante lorsque $u_2 < u_0$, pendant que la suite réelle $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de monotonie contraire,*
- *quand f est continue sur I et quand la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ satisfait l'équation $l = f(l)$.*

Références

[1] D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques. MPSI PCSI PTSI TSI*, Ellipses, 2004.

[2] C. De Coster, *Notes de cours.*