PARTIEL – ANALYSE

Université du Littoral Côte d'Opale

Samedi 20 mars 2010

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, ...) autre que la calculatrice "autonome" est rigoureusement interdit.

Question de cours (4 points)

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Compléter les pointillés pour définir que $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à A.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{................ tel que ....}$$

2. Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles défine sur $A \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. Compléter les pointillés afin de définir $+\infty$ comme limite en un point a de la fonction f.

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \text{................ tel que ....} \Longrightarrow \text{................}$$

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose que ces suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers u et v.
   (a) Définir le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et qu'elle converge vers $u + v$.

Exercice 1 (5 points) [Source : Raymond Barra et Jean Morin, *Transmath, Terminale S (obligatoire)*, Nathan, 2006]

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux satisfont la récurrence suivante :

$$u_0 = -1 \ ; \ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$$

1. Démontrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.
2. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ distincts tels que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = u_n + av_n \ ; \ t_n = u_n + bv_n$ soient géométriques (éventuellement constantes).
4. Exprimer s_n et t_n en fonction de n.
5. Trouver la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par la récurrence suivante :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^3}{27}}.$$

Soit f la fonction associée à cette récurrence, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x fait correspondre $\sqrt{8 + \frac{x^3}{27}}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,3]$ est stable par f et que f est croissante sur cet intervalle.

   Remarque : on pourra montrer que $\forall x \in [0,3], f'(x) = \dfrac{x^2}{2\sqrt{648+3x^3}}$ pour conclure.
2. Donner la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Donner la limite L de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. (a) Déterminer que $\forall x \in [0,3], |f'(x)| \leq \frac{1}{6}$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - L| \leq \frac{1}{6}|u_n - L|$.

   (c) Puis, que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq \frac{1}{6^n}|u_0 - L|$.

   (d) Donner une valeur de n telle que $|u_n - L| \leq 10^{-6}$.

Exercice 3 (6 points)

Calculer les limites suivantes (le résultat ne suffit pas), si elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3\ ;\ x<3} \frac{\ln(x)}{2^x - 8}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2-1} - x)$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0} \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x^2) + 3^x + (\ln(x))^3}{4^x + x^4 + 1}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0\ ;\ x>0} \frac{\ln(1-x^2)}{\cos(x) - 1}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}\ ;\ x>\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x)}{\sqrt{1-8x^3}}$.