Soit f la fonction qui à x fait correspondre $\frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}$.

1) Donner la limite de f en ∞.
2) Donner la dérivée de f.

3) Donner la tangente à la courbe représentative de f en $\frac{1}{2}$.

4) Donner le comportement asymptotique de f en ∞.

```
> restart:
> f:=x->(x^3-2*x^2+1)/(x^2-1);
```

$$f := x \rightarrow \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

```
> simplify(D(f)(x));
```

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

```
> T:=x->D(f)(1/2)*(x-1/2)+f(1/2);
```

$$T := x \rightarrow \mathrm{D}(f)\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)$$

```
> T(x);#y=5/9*x-5/6 est tangente en 1/2
```

$$\frac{5x}{9}-\frac{10}{9}$$

```
> limit(f(x)/x,x=infinity);limit(f(x)-x,x=infinity);#y=x-2 est
  asymptote
```

$$1$$

$$-2$$

Soit (u_n) la suite définie par la récurrence suivante : $u_0=-\frac{1}{2}$, $u_1=-\frac{1}{2}$ et

$u_{n+2}=3\,u_{n+1}-2\,u_n+3^n$.

Donner le terme général u_n de cette suite en fonction de n.

```
> restart:
  rsolve({u(n+2)=3*u(n+1)-2*u(n)+3^n,u(0)=-1/2,u(1)=-1/2},u(n));
```

$$-2^n+\frac{3^n}{2}$$

Soit f satisafaisant l'équation différentielle $\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\mathrm{f}(x)\right)\right)+7\left(\frac{d}{dx}\mathrm{f}(x)\right)+10\,\mathrm{f}(x)=10\,x+7$.

Donner l'ensemble des fonctions f solutions de ce problème.

```
> restart:
  dsolve({diff(diff(f(x),x),x)+7*diff(f(x),x)+10*f(x) =
  10*x+7},f(x));
```

$$\{\mathrm{f}(x)=\mathbf{e}^{(-5x)}\,\_C2+\mathbf{e}^{(-2x)}\,\_C1+x\}$$

Soient les fonctions réelles

$x := t \to \dfrac{t^3+1}{t\,(t-1)}$ et $y := t \to \dfrac{t^3-1}{t\,(t+1)}$.

1) Donner un tableau de variations complet (ensemble de définition, variations et limites) de la courbe paramétrée.

2) Etudier le comportement asymptotique de la courbe paramétrée lorsque t tend vers l'infini.

3) Donner la tangente (une équation) à la courbe paramétrée lorsque t vaut 2.

```
> restart:
  x:=t->(t^3+1)/(t*(t-1));y:=t->(t^3-1)/(t*(t+1));
```

$$x := t \to \frac{t^3+1}{t\,(t-1)}$$

$$y := t \to \frac{t^3-1}{t\,(t+1)}$$

```
> simplify(D(x)(t));solve(D(x)(t)>0);
  limit(x(t),t=-infinity);x(-1);limit(x(t),t=0,left);limit(x(t),t=0,right);limit(x(t),t=1,left);limit(x(t),t=1,right);limit(x(t),t=infinity);
  simplify(D(y)(t));solve(D(y)(t)>0);
  limit(y(t),t=-infinity);limit(y(t),t=-1,left);limit(y(t),t=-1,right);limit(y(t),t=0,left);limit(y(t),t=0,right);y(1);limit(y(t),t=infinity);
```

$$\frac{t^4-2\,t^3-2\,t+1}{(t-1)^2\,t^2}$$

RealRange$(-\infty$, Open$(0))$,
  RealRange(Open(0), Open(RootOf$(_Z^4-2\,_Z^3-2\,_Z+1, 0.4354205447)))$,
  RealRange(Open(RootOf$(_Z^4-2\,_Z^3-2\,_Z+1, 2.296630263)), \infty)$

$$-\infty$$

$$0$$

$$\infty$$

$$-\infty$$

$$-\infty$$

$$\infty$$

$$\infty$$

$$\frac{t^4+2\,t^3+2\,t+1}{(t+1)^2\,t^2}$$

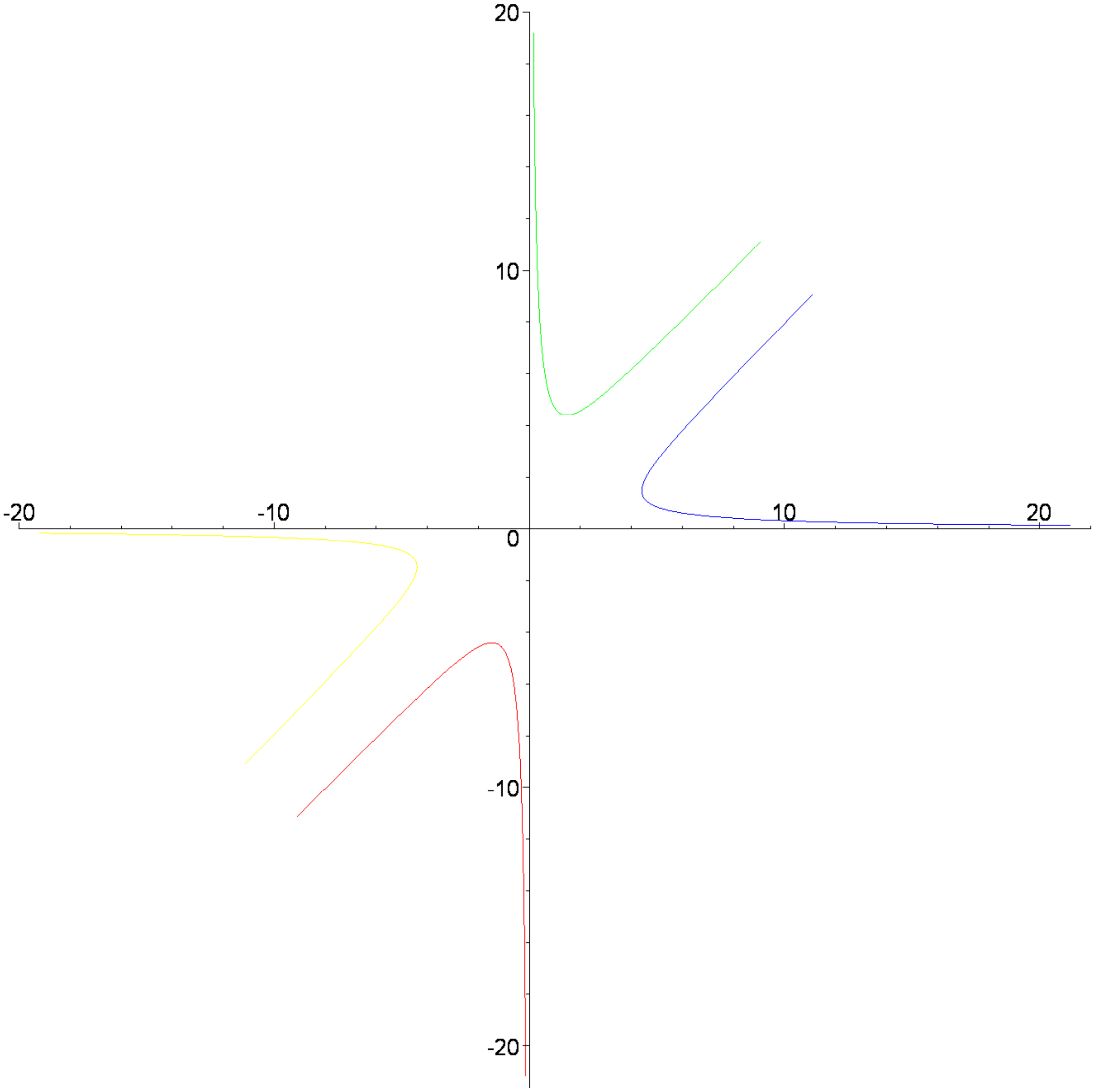
RealRange$(-\infty$, Open(RootOf$(_Z^4+2\,_Z^3+2\,_Z+1, -2.296630263)))$,
  RealRange(Open(RootOf$(_Z^4+2\,_Z^3+2\,_Z+1, -0.4354205447))$, Open$(0))$,
  RealRange(Open$(0), \infty)$

$$-\infty$$

$$-\infty$$

$$\infty$$
$$\infty$$
$$-\infty$$
$$0$$
$$\infty$$

```
> plot({[x(t),y(t),t=-10..-1.1],[x(t),y(t),t=-0.9..-0.1],[x(t),y(t
),t=0.1..0.9],[x(t),y(t),t=1.1...10]});
```




```
> limit(y(t)/x(t),t=infinity);limit(y(t)-x(t),t=infinity);#y=x-2
est asymptote à la courbe en t=infinity
```

$$1$$
$$-2$$

```
> T:=X->D(y)(2)/D(x)(2)*(X-x(2))+y(2);
```

$$T := X \to \frac{D(y)(2)\,(X - x(2))}{D(x)(2)} + y(2)$$

```
> T(X);#y=-37/27*x+22/3 est tangente à la courbe en t=2
```

$$-\frac{37\,X}{27}+\frac{22}{3}$$

L'usage du package *linalg* de *maple* est vivement conseillé pour cet exercice !

Soit a un paramètre réel. Soit u l'endomorphisme de R^4 ayant pour matrice $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

1) Discuter la bijectivité de u (c'est-à-dire de l'inversibilité de la matrice A) en fonction du paramètre réel a : dire pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est inversible et donner, pour ces valeurs, la matrice inverse de A.

2) Dans chacun des cas où u n'est pas bijective (c'est-à-dire lorsque la matrice A n'est pas inversible), donner le noyau de u (une base et sa dimension) et l'image de u (une base et sa dimension).

3) Dans le cas où $a=1$, donner la matrice $\frac{A^3-3\,A+4\,I_4}{4}$ où I_4 désigne la matrice identité.

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> A := matrix([[a, 1, 1, 1], [1, a, 1, 1], [-1, 1, a, 1], [0, -1,
  1, a]]);
```

$$A:=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

En calculant le déterminant

```
> factor(det(A));solve(det(A)=0,a);
```

$$(a^2+2\,a+2)\,(a-1)^2$$

$$1,\ 1,\ -1+I,\ -1-I$$

ou par la décomposition LU,

```
> LUdecomp(A,L='l',U='u');
```

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{a^2-1}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{a-1}{a} \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^3+a^2-2}{(a+1)\,a} \end{bmatrix}$$

```
> L:=evalm(l);U:=evalm(u);multiply(L,U):#on vérifie A=LU
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a-1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{a^2-1} & \frac{a+2}{(a+1)\,a} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{a^2-1}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{a-1}{a} \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^3+a^2-2}{(a+1)\,a} \end{bmatrix}$$

on s'apperçoit que les problèmes concernant l'inversibilité de la matrice A ne peuvent provenir que lorsque $a-1=0$ *(i.e.* $a=1$*).*

```
> inverse(A);#l'inverse de A qui peut aussi être obtenue à partir
  de la décomposition LU
```

$$\begin{bmatrix} \frac{(a+1)\,a}{a^3+a^2-2} & -\frac{a+1}{a^3+a^2-2} & -\frac{1}{a^2+2\,a+2} & -\frac{1}{a^2+2\,a+2} \\ -\frac{a+2}{a^3+a^2-2} & \frac{a^2+a+1}{a^3+a^2-2} & -\frac{1}{a^2+2\,a+2} & -\frac{1}{a^2+2\,a+2} \\ \frac{a^2+a+2}{a^4-a^2+2-2\,a} & -\frac{a^2+2\,a+1}{a^4-a^2+2-2\,a} & \frac{a^2+a+1}{a^3+a^2-2} & -\frac{a+1}{a^3+a^2-2} \\ -\frac{2\,(a+1)}{a^4-a^2+2-2\,a} & \frac{a^2+a+2}{a^4-a^2+2-2\,a} & -\frac{a+2}{a^3+a^2-2} & \frac{(a+1)\,a}{a^3+a^2-2} \end{bmatrix}$$

Le cas $a=1$.

```
> a:=1;
  A := matrix([[a, 1, 1, 1], [1, a, 1, 1], [-1, 1, a, 1], [0, -1,
  1, a]]);
```

$$a := 1$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> colspace(A);# l'image de A
  rank(A);# le rang ou la dimension de l'image
```

$$\{[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [1, 1, 0, 0]\}$$

$$3$$

```
> nullspace(A);# le noyau de A
  nops(nullspace(A));
```

$$\{[0, 0, -1, 1]\}$$

$$1$$

```
> a:=1;
  A := matrix([[a, 1, 1, 1], [1, a, 1, 1], [-1, 1, a, 1], [0, -1, 1, a]]);
```

$$a := 1$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm((A^3-3*A+4)/4);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soient *u:=[-1,2,1]*, *v:=[x,y,z]*, et *w:=[1,-2,3]* trois vecteurs de R^3.

1) Donner une relation que doivent satisfaire *x*, *y* et *z* pour que les vecteurs *u* et *v* soient orthogonaux.

2) Donner une relation que doivent satisfaire *x*, *y* et *z* pour que les vecteurs *u*, *v* et w soient coplanaires.

3) Donner tous les vecteurs *v* tels que les vecteurs *u* et *v* soient orthogonaux et tels que les vecteurs *u*, *v* et w soient coplanaires.

```
> restart:with(linalg):
  u:=[-1,2,1];
  v:=[x,y,z];
  w:=[1,-2,3];
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

$$u := [-1, 2, 1]$$

$$v := [x, y, z]$$

$$w := [1, -2, 3]$$

```
> -x+2*y+z=0;# u et v orthogonaux
  det([u,v,w])=0;# u, v et w coplanaires
  solve({-x+2*y+z=0,-4*y-8*x=0},{x,y,z});# v=[z,0,-z] sont
  solutions
```

$$-x + 2\,y + z = 0$$

$$-4\,y - 8\,x = 0$$

$$\{y = -2\,x,\ z = 5\,x,\ x = x\}$$

```
> Fin (Philippe RYCKELYNCK & Denis VEKEMANS)
Error, missing operator or `;`
```