

# *Calcul formel*

## DEVOIR SURVEILLÉ L2 INFO

Denis Vekemans \*

Lundi 3 mai 2010, de 15h30 à 17h00

- Aucun document n'est autorisé, la calculatrice n'est pas autorisée.
- Sur l'ordinateur mis à service, seul le logiciel "maple" est utilisable : internet et intranet sont mis hors service, les moyens de communication sont coupés (mail, telnet, ...), la sauvegarde ainsi que l'accès aux documents personnels sont également exclus.
- Le téléphone portable est évidemment interdit aussi.
- Le compte-rendu est à rendre uniquement sur copie et manuscrit : pas de sortie imprimante, pas d'enregistrement de fichier.

Pour chacun des exercices, il est exigé de donner la liste des instructions "maple" en amont des résultats.

1. (4 points) Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  fait correspondre  $\frac{4x^2 + \ln(x)}{x - 1}$ .
  - (a) Donner la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - (b) Donner la dérivée de  $f$ .
  - (c) Donner la tangente à la courbe représentative de  $f$  en 2.
  - (d) Donner le comportement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$ .
2. (2 points) Soit  $(u_n)$  la suite définie par la récurrence suivante :  $u_0 = -\frac{2}{5}$  et  $u_{n+1} = 3u_n + \frac{1}{2^n}$ .  
Donner le terme général de cette suite  $u_n$  en fonction de  $n$  (pour tout  $n$  entier naturel).
3. (2 points) Soit  $f$  satisfaisant l'équation différentielle

$$f''(x) + \frac{f(x)}{x^2} = 1,$$

et la condition initiale  $f(1) = \frac{1}{3}$ .

Donner l'ensemble des fonctions  $f$  solutions de ce problème.

---

\*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

**Exercice 1** (6 points) **Courbes paramétrées.**

Soient les fonctions réelles

$$x : t \mapsto \frac{t^3 + 1}{t - 1}$$

et

$$y : t \mapsto \frac{t^4 + t}{t + 1}.$$

1. Donner un tableau de variations complet (ensemble de définition, variations et limites) de la courbe paramétrée.
2. Étudier le comportement asymptotique de la courbe paramétrée lorsque  $t$  tend vers 1 par valeurs supérieures.
3. Donner la tangente (une équation) à la courbe paramétrée lorsque  $t$  vaut 2.

**Exercice 2** (6 points) **Algèbre linéaire.**

L'usage du package *linalg* de *maple* est vivement conseillé pour cet exercice!

Soit  $a$  un paramètre réel. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Discuter la bijectivité de  $u$  (c'est-à-dire de l'inversibilité de la matrice  $A$ ) en fonction du paramètre réel  $a$  : dire pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  la matrice  $A$  est inversible et donner, pour ces valeurs, la matrice inverse de  $A$ .
2. Dans chacun des cas où  $u$  n'est pas bijective (c'est-à-dire lorsque la matrice  $A$  n'est pas inversible), donner le noyau de  $u$  (une base et sa dimension) et l'image de  $u$  (une base et sa dimension).
3. Dans le cas où  $a = 1$ , donner la matrice  $A^4 + 4A$ .