

Calcul formel

DEVOIR SURVEILLÉ L1 MATHS

Denis Vekemans *

Vendredi 11 mars 2011, de 9h30 à 12h30

- Aucun document n'est autorisé, la calculatrice n'est pas autorisée.
- Sur l'ordinateur mis à service, seul le logiciel "maple" est utilisable : internet et intranet sont mis hors service, les moyens de communication sont coupés (mail, telnet, ...), la sauvegarde ainsi que l'accès aux documents personnels sont également exclus.
- Le téléphone portable est évidemment interdit aussi.
- Le compte-rendu est à rendre uniquement sur copie et manuscrit : pas de sortie imprimante, pas d'enregistrement de fichier.

Pour chacun des exercices, il est exigé de donner la liste des instructions "maple" en amont des résultats.

1. (3 points)

(a) Factoriser le polynôme

$$x^3 - \frac{5x^2}{2} - \frac{23x}{2} - 5.$$

(b) Donner la dérivée de la fonction réelle

$$f : x \mapsto x^2 \sin(\sqrt{x}).$$

(c) Trouver des entiers a et b tels que

$$134 a + 125 b = 1.$$

2. (2 points) Soit (u_n) la suite définie par la récurrence suivante : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + \frac{3}{2^n}$.

Donner le terme général de cette suite u_n en fonction de n (pour tout n entier naturel).

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. (3 points) Donner la liste des nombres à quatre chiffres qui sont égaux à la somme des puissances quatrièmes de leurs chiffres.

Par exemple, 2482 ne convient pas car $2482 \neq 2^4 + 4^4 + 8^4 + 2^4$.

Exercice 1 (6 points) **Courbes paramétrées.**

Soient les fonctions réelles

$$x : t \longmapsto t \ln |t|$$

et

$$y : t \longmapsto t^2 \ln |t|.$$

1. Donner un tableau de variations complet (ensemble de définition, variations et limites) de la courbe paramétrée des points $M(t)$ de coordonnées cartésiennes $(x(t); y(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Étudier les comportements asymptotiques lorsque t tend vers $+\infty$ et lorsque t tend vers $-\infty$.
3. Donner la tangente (une équation) à la courbe paramétrée lorsque t vaut 2.

Exercice 2 (6 points) **Suites homographiques.**

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par la relation de récurrence, $u_0 = 5$ et

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2(u_n + 1)}.$$

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = \frac{u_n + \frac{1}{2}}{u_n - 1}.$$

1. Donner v_{n+1} en fonction de v_n (par maple).
2. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (en citant la partie du cours appropriée).
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (en citant la partie du cours appropriée).