

# *Calcul formel*

## EXAMEN L1 MATHS

Philippe Ryckelynck et Denis Vekemans \*

- Il est obligatoire d'être présent au début de l'épreuve.
- Il est formellement interdit de quitter la salle avant la fin de l'épreuve.
- La durée de l'épreuve est de 2 heures.
- Aucun document n'est autorisé, la calculatrice n'est pas autorisée.
- Sur l'ordinateur mis à service, seul le logiciel "maple" est utilisable : internet et intranet sont mis hors service, les moyens de communication sont coupés (mail, telnet, ...), la sauvegarde ainsi que l'accès aux documents personnel sont également exclus.
- Le téléphone portable est évidemment interdit aussi.
- Le compte-rendu est à rendre uniquement sur copie et manuscrit : pas de sortie imprimante, pas d'enregistrement de fichier.

### Exercice 1 Questions de cours.

1. Donner des coefficients  $a$ ,  $b$ , et  $c$  réels tels que  $\cos(5x) = a(\cos(x))^5 + b(\cos(x))^3 + c \cos(x)$ .
2. Donner les solutions de l'équation différentielle  $f''(x) + f(x) = \cos(x) + x \sin(x)$ .

### Exercice 2 Géométrie affine.

Soient  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  trois points du plan.

On considère le triangle  $T$  donné par ses sommets  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

Donner une **procédure** qui affirme ou infirme le fait que le triangle  $T$  soit isocèle.

Par exemple, lors de l'exécution de la procédure :

- **> P1 :=[0,0] :P2 :=[3,1] :P3 :=[2,2] : triangleisocele(P1,P2,P3) ;** celle-ci doit pouvoir retourner approximativement :  
**> 'le triangle n'est pas isocèle'**,

---

\*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

- > **P1 :=[0,0] :P2 :=[3,1] :P3 :=[0,2] : triangleisocele(P1,P2,P3)** ; celle-ci doit pouvoir retourner approximativement :  
> **'le triangle est isocèle en [3, 1].**

### Exercice 3 Fonctions de chiffres.

1. Chercher un nombre naturel de la forme  $\overline{1a234b567c89}$  (en base 10, 9 est chiffre des unités, 8 est chiffre des dizaines, ... et 1 est chiffre des centaines de milliards) qui soit multiple de 77.
2. Combien existe-t-il de nombres de la forme  $\overline{1a234b567c89}$  soient multiples de 77 ?

### Exercice 4 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Quelle est l'utilité de la procédure suivante ?

*Remarque :*  $a$ ,  $b$  et *précision* sont des nombres réels ;  $f$  est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

```
> dichotomie :=proc(f,précision,a,b)
> local A,B;
> if a>=b then ERROR('a doit être strictement plus petit que b') fi :
> if f(a)*f(b)>0 then ERROR('f ne change pas forcément de signe sur [a,b]') fi :
> A :=a :B :=b :
> while B-A>=précision do
> if f(A)*f((A+B)/2)<0 then B :=(A+B)/2 else A :=(A+B)/2 fi :od :
> RETURN((A+B)/2)
> end :

> f :=x->x^2-2;evalf(dichotomie(f,.000001,0,2)) ;
```

```
> f := x -> x^2 - 2
```

```
> 1.414213657
```

### Exercice 5 Algèbre linéaire.

$a$  est un paramètre réel.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & -1 & 4a \\ 1 & a & 2a \end{pmatrix}$ , soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et soit  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$ , la matrice  $A$  est-elle inversible ?

(a) Lorsque  $A$  est inversible, donner la matrice inverse de  $A$ .

(b) Lorsque  $A$  n'est pas inversible, selon la valeur de  $a$ , donner l'image et le noyau de  $A$ .

Soit le système d'équations  $AX = B$ .

2. (a) Lorsque  $A$  est inversible,  $X$  est définie de façon unique par  $X = A^{-1}B$ . Donner la matrice  $X$ .
- (b) Lorsque  $A$  n'est pas inversible, selon la valeur de  $a$ , donner l'ensemble des matrices  $X$  répondant à la question.

### Exercice 6 Minimisation d'une durée.

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé. Soit  $A(15, 0)$ ,  $M(x, 0)$  et  $B(0, 9)$  ( $x$  est compris entre 0 et 15). Un individu (c'est-à-dire un point) parcourt le trajet composé de la réunion des segments  $[AM]$  et  $[MB]$ , de  $A$  vers  $B$ . L'individu se déplace sur le segment  $[AM]$  à la vitesse de 5 par heure et sur le segment  $[MB]$  à la vitesse de 4 par heure.

1. Exprimer la distance  $AM$  en fonction de  $x$ . Déterminer le temps de parcours sur le segment  $[AM]$  en fonction de  $x$ .
2. Exprimer la distance  $MB$  en fonction de  $x$ . Déterminer le temps de parcours sur le segment  $[MB]$  en fonction de  $x$ .
3. Donner le temps de parcours total en fonction de  $x$ .
4. Donner la valeur (ou les valeurs) de  $x$  pour que le temps de parcours total soit extrémal.
5. Donner la valeur (ou les valeurs) de  $x$  pour que le temps de parcours total soit minimal.

### Exercice 7 Intégration.

On considère la fonction suivante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$x \longmapsto \exp(-2x) + \exp(-x) + 3.$$

1. Donnez un tableau de variations de cette fonction avec "maple" ainsi qu'un tracé sur un intervalle significatif.
2. Peut-on trouver exactement une primitive de la fonction racine carrée de  $f$  ?
3. Calculez exactement

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx,$$

et en donner une valeur approchée à 8 chiffres significatifs.