Calcul formel
Partiel

Philippe Ryckelynck et Denis Vekemans *

Il est formellement interdit de quitter la salle avant la fin de l'épreuve (la durée de l'épreuve est de 1h30).

Aucun document n'est autorisé, la calculatrice n'est pas autorisée.

Sur l'ordinateur mis à service, seul le logiciel "maple" est utilisable : internet et intranet sont mis hors service, les moyens de communication sont coupés (mail, telnet, ...), la sauvegarde ainsi que l'accès aux documents personnel sont également exclus.

Le téléphone portable est évidemment interdit aussi.

Le compte-rendu est à rendre uniquement sur copie et manuscrit : pas de sortie imprimante.

Exercice 1 (3 points)

Soit le polynôme p donné par

$$p \quad : \quad x \in \mathbb{R} \longmapsto p(x) = x^7 - x^6 \ln(2) + 4x^5 - 4x^4 \ln(2) - 3x^3 + 3x^2 \ln(2) - 18x + 18 \ln(2) \in \mathbb{R}.$$

Donner une forme entièrement factorisée de ce polynôme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (5 points)

1. Représenter graphiquement (graphiques à (re)produire sur la copie) les fonctions

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = x^2 + 4 * x + 4 \in \mathbb{R}$$

   et

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto g(x) = x^7 + 4 \in \mathbb{R}$$

   (sur l'intervalle $[-2, 2]$, par exemple, et surtout sur un même graphique).

2. Emettre une conjecture sur le nombre de solutions réelles de l'équation $(E) \ : \ f(x) = g(x)$.

   Donner l'une de ces solutions réelles (il n'est pas demandé de donner explicitement toutes les solutions réelles).

Exercice 3 (5 points)

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels n qui vérifient les trois conditions suivantes :

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

- le reste dans la division euclidienne de n par 17 est 11,
- le reste dans la division euclidienne de n par 19 est 7,
- le reste dans la division euclidienne de n par 23 est 17.

1. Donner une procédure maple permettant d'obtenir le plus petit élément de E. Quel est cet élement ?
2. Donner une procédure maple permettant d'obtenir tous les éléments de E qui soient plus petits que 40 000. Quels sont ces élements ?

Exercice 4 (7 points)

On sait démontrer en arithmétique, mais ce ne sont nullement des résultats faciles, que tout nombre entier naturel est une somme ...

- de 3 nombres triangulaires (i.e. de la forme $\dfrac{n^2+n}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$),
- ou de 4 nombres carrés (i.e. de la forme n^2 où $n \in \mathbb{N}$),
- ou de 5 nombres pentagonaux (i.e. de la forme $\dfrac{3n^2-n}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$).

Le premier résultat est le théorème de Gauss, le deuxième est dû à Lagrange et le troisième est une variante due aussi à Gauss mais attribuée à Liouville (qui a donné avec Cauchy toute la lumière sur cela).

1. Ecrire 2007 comme somme de trois nombres triangulaires.
2. Ecrire 2007 comme somme de quatre nombres carrés.
3. Ecrire 2007 comme somme de cinq nombres pentagonaux.
4. Donner une procédure maple permettant d'obtenir les nombres de 1 à 2007 qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux nombres triangulaires.