

Calcul formel

Philippe Ryckelynck et Denis Vekemans *

Objectif mathématique : nombres premiers et questions variées d'arithmétique.

Objectif maple : premières procédures, gestion de la sauvegarde, booléens.

Fonctions maple : *true, false, and, or, irem, iquo, floor, trunc, isprime, ithprime, ifactor, "with(numtheory), sigma, divisors, tau"*, *nops*, des tests (*if ...fi*), des boucles (*while*), des procédures (*proc, local, RETURN*).

Exercice 1 Donner les graphes de la partie entière ($E(x)$) et de la mantisse ($x - E(x)$).

Exercice 2 Donner une liste contenant les 100 premiers nombres premiers.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite donnée par $u_n = n^2 - n + 41$ (formule d'Euler). Jusqu'à quelle valeur de n , u_n est-il un nombre premier ?

Exercice 4 Trouver le plus petit nombre ayant exactement 15 diviseurs.

Exercice 5 Trouver le plus petit nombre dont la somme des diviseurs est 6 000.

Exercice 6 Fractions égyptiennes.

Soit n un nombre entier naturel. Conjecture : on peut trouver x, y, z des entiers naturels tels que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Vérifier (avec maple) cette conjecture pour n variant de 1 à 120.

Aides :

On suppose (sans perte de généralité) que $0 < x < y < z$; que déduire sur l'ordre de $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$?

Déterminer d'abord que x doit prendre ses valeurs dans $[1, \frac{3n}{4}[$.

Déterminer ensuite, qu'à x fixé, y doit prendre ses valeurs dans $[x + 1, \frac{2}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x}}[$ (sous la condition $\frac{4}{n} - \frac{1}{x} \neq 0$).

Déterminer enfin, qu'à x et y fixés, z vaut $\frac{1}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$ (sous les conditions $\frac{4}{n} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ et $z > y$).

Exercice 7 Les nombres de Fermat. Fermat avait postulé que les nombres de la forme $f_n = 2^{2^n} + 1$ sont tous premiers. Vérifier ce postulat (avec maple).

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 8 Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $m_n = 2^n - 1$ qui sont premiers.

Trouver des valeurs de n pour que $m_n = 2^n - 1$ soit premier.

Les valeurs de n doivent être prises parmi les nombres premiers pour que m_n soit un nombre premier, mais la réciproque est fausse!

A justifier (à l'aide de maple).

Exercice 9 Un nombre N est dit "parfait" s'il est somme de ses diviseurs stricts (i.e. distincts de N).

Quels sont les nombres "parfaits" de moins de trois chiffres?

Exercice 10 Deux nombres N et M sont dits "amicaux" s'ils sont distincts, si la somme des diviseurs stricts de M vaut N et si la somme des diviseurs stricts de N vaut M . Quels sont les nombres "amicaux" tous deux inférieurs à 1 500?

Exercice 11 Soit n un entier naturel. Faire une procédure (avec maple) permettant de calculer la somme des chiffres de n .