Calcul formel

Philippe Ryckelynck et Denis Vekemans *

Objectif mathématique : géométrie dans le plan.

Objectif maple : rendre la géométrie calculatoire.

Fonctions maple : *assume*, *plot3d*, "*with(geometry)*, *coordinates*, *midpoint*, *dsegment*, *line*, *translation*, *rotation*, *AreCollinear*, *ArePerpendicular*".

Exercice 1 On munit le plan d'un repère orthonormé. On se donne $A(a, b)$, $C(c, d)$ avec $0 < b$ et $0 < d$.

1. On cherche l'ensemble des points $M(m, 0)$ tel que $AM^2 + MC^2$ soit minimal. Montrer que cet ensemble se réduit à un singleton. Propriété géométrique de ce singleton ?
2. On cherche l'ensemble des points $M(m, 0)$ tel que $AM + MC$ soit minimal. Montrer que cet ensemble se réduit à un singleton. Propriété géométrique de ce singleton ?

Exercice 2 On munit le plan d'un repère orthonormé. Soit ABC un triangle rectangle en A et on suppose $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$. Soit M un point du segment $[BC]$. On appelle P le projeté de M sur la droite (AB) et Q le projeté de M sur la droite (AC).

Quel est l'ensemble des points M qui minimisent la longueur PQ ? Montrer que cet ensemble se réduit au singleton "projeté orthogonal de A sur la droite (BC)".

Exercice 3 On munit le plan orienté d'un repère orthonormé direct. Soit $ABCD$ un carré direct. Soit ABE un triangle équilatéral direct, et soit BFC un triangle équilatéral direct (E est intérieur au carré ; F est extérieur au carré).

Montrer que D, E et F sont alignés.

Exercice 4 On se place dans le plan orienté. Soit ABC un triangle direct. Soit $ACFG$ un carré direct, et soit $AEDB$ un carré direct.

1. Montrer que les droites (EC) et (BG) sont perpendiculaires.
2. Montrer que $EC = BG$.

Exercice 5 On munit le plan d'un repère. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit P un point du plan,

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Q le symétrique de P par rapport à A, R le symétrique de Q par rapport à B, S le symétrique de R par rapport à C et T le symétrique de S par rapport à D.

Montrer que $P = T$.

Exercice 6 On munit le plan d'un repère. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soit P le milieu du segment $[AB]$, Q le milieu du segment $[BC]$, R le milieu du segment $[CD]$, S le milieu du segment $[DA]$.

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme (appelé parallélogramme de Varignon).

Exercice 7 Triangle (aire et périmètre). On munit le plan d'un repère orthonormé et on suppose $A(1, 0)$, $B(b, \sqrt{1-b^2})$, $C(c, -\sqrt{1-c^2})$ (le triangle ABC est inscrit dans le cercle trigonométrique).

Donner successivement

- les équations des droites (AB), (AC) et (BC) ;
- les longueurs AB, AC et BC des côtés respectifs $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$;
- le périmètre p_{ABC} et l'aire a_{ABC} du triangle ABC.

Puis, montrer que, d'après la loi des sinus

$$a_{ABC} = \frac{AB\ AC\ BC}{4R},$$

où R est le rayon du cercle circonscrit (ici, $R = 1$).

Enfin, montrer la formule de Héron

$$a_{ABC} = \sqrt{\frac{p_{ABC}}{2}(\frac{p_{ABC}}{2} - AB)(\frac{p_{ABC}}{2} - AC)(\frac{p_{ABC}}{2} - BC)}.$$

Exercice 8 Le repère barycentrique. On munit le plan d'un repère $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$. On dit que G a pour coordonnées barycentriques α, β, γ dans le repère barycentrique (A, B, C) si

(a) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et si

(b) $\alpha\ \overrightarrow{AG} + \beta\ \overrightarrow{BG} + \gamma\ \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.

Remarque : on peut toujours imposer $\alpha + \beta + \gamma = 1$, quitte à diviser l'équation (b) par $\alpha + \beta + \gamma$ qui, d'après l'inéquation (a) est non nul.

1. (a) Cas $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$. Montrer que l'ensemble des points G est un singleton.
   (b) cas $\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$. Montrer que l'ensemble des points G est un singleton.
   (c) cas $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$. Montrer que l'ensemble des points G est un singleton.
   (d) cas $\alpha = t,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$, où $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points G est une droite.
2. **Cas général** : $\alpha = \mu_1 t + \nu_1$; $\beta = \mu_2 t + \nu_2$; $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. Montrer que l'ensemble des points G est une droite.