

Calcul formel

Philippe Ryckelynck et Denis Vekemans*

Objectif mathématique : arithmétique.

Objectif maple : programmation avancée.

Fonctions maple : *union*, *intersect*, *minus*.

Exercice 1 Soit n un entier naturel. Faire une procédure (avec maple) permettant d'obtenir

- la liste $L1$ des chiffres de n , le premier terme de cette suite étant le chiffre des unités, ...
- la liste $L2$ des chiffres de n , le dernier terme de cette suite étant le chiffre des unités, ...

Exercice 2 Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

Exercice 3 Quels sont les nombres A à n chiffres qui ont mêmes n derniers chiffres que leur carré A^2 ?

Cas où $n=1$. Cas où $n=2$. Cas où $n=3$. Cas où $n=4$.

Exercice 4 Soit N un nombre de trois chiffres distincts.

1. Ecrire une procédure qui donne le retourné de ce nombre (le chiffre des unités s'échange avec le chiffre des centaines tandis que le chiffre des dizaines est inchangé).
2. Soit N un nombre entier de trois chiffres distincts et son retourné N' . Soit D la différence entre N et N' et son retourné D' .

Que vaut $D + D'$?

Exercice 5 Soit N un nombre de quatre chiffres distincts.

1. Ecrire une procédure qui donne le retourné de ce nombre (le chiffre des unités s'échange avec le chiffre des milliers tandis que le chiffre des dizaines s'échange avec le chiffre des centaines).
2. Soit N un nombre entier de quatre chiffres et son retourné N' . Soit D la différence entre N et N' et son retourné D' .

Que vaut $D + D'$?

Exercice 6 Soit N un nombre de quatre chiffres non tous identiques.

1. Ecrire une procédure qui donne le retourné de ce nombre (le chiffre des unités s'échange avec le chiffre des milliers tandis que le chiffre des dizaines s'échange avec le chiffre des centaines).

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. Ecrire une procédure qui transforme ce premier nombre à quatre chiffres en un deuxième nombre à quatre chiffres et dont les chiffres sont ceux du premier, mais ordonnés du plus grand au plus petit de la gauche vers la droite.
3. Soit N un nombre entier de quatre chiffres, on lui applique d'abord la procédure "ORDONNE" pour obtenir un nombre entier N' puis la procédure "RETOURNE" pour obtenir un nombre entier N'' . On transforme ensuite N , en la différence entre N' et N'' et on rebaptise N cette différence. On itère cela jusqu'à ce que N soit égal à son transformé. Que vaut alors N ?

Exercice 7 Soit N un nombre entier naturel. Ecrire une procédure retournant

1. la somme de ses chiffres.
2. la somme des carrés de ses chiffres.
3. la somme des cubes de ses chiffres.
4. le produit de ses chiffres.
5. le produit de ses chiffres non nuls.

Exercice 8

1. Existe-t-il des nombres entiers naturels (hormis 0, 1, 2, ..., 9 qui sont des solutions évidentes) qui soient égaux à la somme de leurs chiffres ?
2. Existe-t-il des nombres entiers naturels (hormis 0 et 1 qui sont des solutions évidentes) qui soient égaux à la somme des carrés de leurs chiffres ?
3. Existe-t-il des nombres entiers naturels (hormis 0 et 1 qui sont des solutions évidentes) qui soient égaux à la somme des cubes de leurs chiffres ?

Exercice 9 Soit f l'application qui à N associe la somme des chiffres (respectivement la somme des carrés des chiffres) de N .

Soit K un entier naturel donné.

Montrer que la suite $(f^n(K))$ est périodique en n à partir d'un certain rang (remarque : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ fois).

Dans un premier temps, il convient de montrer que $f(n) < n$ si $n_0 \leq n$ ($n_0 = 100$ (respectivement $n_0 = 1000$) convient ici).

Dans un deuxième temps, on conclut qu'il existe un rang n_1 tel que $f^{n_1}(K) < n_0$.

Dans un troisième (et dernier temps), il reste à étudier la suite $(f^n(K))$ pour $K < n_0$.

Remarque. Pour repérer une périodicité dans une suite donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ (comme c'est le cas ici), il suffit de chercher dans cette suite deux indices (les plus petits possibles) pour lesquels les termes sont égaux.

Exercice 10 Sur le théorème de persistance multiplicative.

Soit f la fonction qui à x , entier naturel, fait correspondre le produit des chiffres de x .

1. Trouver un nombre n tel que $f^2(n) > 10$ (remarque : $f^2 = f \circ f$).
2. Trouver un nombre n tel que $f^3(n) > 10$ (remarque : $f^3 = f \circ f^2$).
3. Trouver un nombre n tel que $f^4(n) > 10$ (remarque : $f^4 = f \circ f^3$).
4. Trouver un nombre n tel que $f^5(n) > 10$ (remarque : $f^5 = f \circ f^4$).
5. Trouver un nombre n tel que $f^6(n) > 10$ (remarque : $f^6 = f \circ f^5$).