Leçon d'oral 1.
Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point a de $\mathbb{R}$. Exemples.

Denis Vekemans *

17 mai 2006

Pré-requis
- Suites réelles : convergence.
- Topologie : point adhérent à un ensemble.
- Fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles : ensemble de définition, opérations algébriques, restriction de fonctions, exemples de fonctions (fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonctions circulaires).

Cadre général
Toutes les fonctions considérées dans cette leçon sont fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles.

Notation

1. Dans toute la leçon, et pour toute fonction w, D_w désigne son domaine de définition.
2. $V(x,y) =]x-y, x+y[$.

1 Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$.

1.1 Définition et propriétés –limite–.

A l'oral : "On ne saurait parler de limite en a si a n'est pas un point adhérent à D_f. C'est pourquoi ..."
On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card} \left\{ x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap V(a,\epsilon) \right\} = \infty, \tag{1}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f).

Remarque : "a n'appartient pas forcément à D_f, mais il est adhérent à D_f".

Si $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

on dit que f admet l pour limite en a.

Théorème 1.1.1

Unicité de la limite.

Sous la condition (1), si f admet une limite en un point a, elle est unique.
De plus, si f est définie en a, $l = f(a)$.

Remarque : Sous la condition (1), si f admet une limite l en un point a, on peut noter $l = \lim_{x \to a} f(x)$.
Exemples :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to a} x^n = a^n$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Contre-exemple :
– La fonction f définie par

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{aligned},$$

n'admet pas de limite en 0.

Théorème 1.1.2

Critère séquentiel.

Sous la condition (1), si f admet l pour limite en a et si la suite (x_n) est une suite de D_f convergeant vers a, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers l. Réciproquement, si pour toute suite (x_n) de D_f convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l, alors f admet l pour limite en a.

Contre-exemple : la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \cos(\tfrac{1}{x}) \end{aligned},$$

n'admet pas de limite finie en 0.

1.2 Définition et propriétés –limite à gauche, limite à droite–.

<u>A gauche</u>

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card}\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap]-\infty, a] \bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{2}$$

(pour pouvoir parler de limite en a, à gauche, pour f).

Si $f|_{D_f \bigcap]-\infty,a]}$ admet une limite l_- en a, on dit que f admet l_- pour limite à gauche en a (on note $\lim_{x\to a,\ x\leq a} f(x) = l_-$).

<u>A droite</u>

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card}\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap [a, \infty[\bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{3}$$

(pour pouvoir parler de limite en a, à droite, pour f).

Si $f|_{D_f \bigcap [a,\infty[}$ admet une limite l_+ en a, on dit que f admet l_+ pour limite à droite en a (on note $\displaystyle\lim_{x\to a,\ x\geq a} f(x) = l_+$).

Théorème 1.2.1

Sous la condition (2), si f admet l pour limite à gauche en a et sous la condition (3), si f admet l pour limite à droite en a, alors f admet l pour limite en a.

Remarques :

- Sous la condition (2) et sous la condition (3), la condition (1) est satisfaite.
- La réciproque est fausse car la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 0 \end{array},$$

admet 0 comme limite en 0, admet également 0 comme limite à droite en 0 mais n'admet pas de limite à gauche en 0 car non définie sur $\mathbb{R}^-$.

Sous la condition (1), la condition (2) ou la condition (3) est satisfaite, mais pas forcément les deux.

2 Propriétés algébriques, comparaison, et composition sur les limites.

2.1 Propriétés algébriques.

Théorème 2.1.1

Propriétés algébriques.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ card\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap D_g \bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{4}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f et pour g sur $D_f \bigcap D_g$).

Si f admet l_f pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$ et si g admet l_g pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$,

1. *$f+g$ est définie sur $D_{f+g} = D_f \bigcap D_g$ et $f+g$ admet une limite en a qui est $l_f + l_g$.*
2. *fg est définie sur $D_{fg} = D_f \bigcap D_g$ et fg admet une limite en a qui est $l_f l_g$.*
3. *et si, de plus, $l_f \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ admet une limite en a qui est $\dfrac{1}{l_f}$.*

Démonstration pour le produit

On a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l_f| < \epsilon,$$

et

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_g > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_g, |x-a| < \eta_g \Longrightarrow |g(x) - l_g| < \epsilon,$$

et donc, avec $\epsilon_{fg} = \epsilon(\epsilon + |l_f| + |l_g|)$,

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon_{fg} > 0,\ \exists \eta = \inf(\eta_f, \eta_g) > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_{fg}, |x-a| < \eta \\ \Longrightarrow\ & |fg(x) - l_f l_g| \\ & \le |fg(x) - l_f g(x)| + |l_f g(x) - l_f l_g| \\ & = |f(x) - l_f||g(x)| + |l_f||g(x) - l_g| \\ & \le |f(x) - l_f|(|g(x) - l_g| + |l_g|) + |l_f||g(x) - l_g| \\ & < \epsilon(\epsilon + |l_g|) + \epsilon|l_f| = \epsilon_{fg} \end{aligned}$$

Démonstration pour l'inverse

$$\forall \epsilon_f > 0,\ \exists \eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l_f| < \epsilon_f.$$

Donc, en prenant $\epsilon_f = \dfrac{|l_f|}{2}$,

$$\begin{aligned} & & & \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, \\ |x-a| < \eta & & \Longrightarrow\ & \sup(|f(x)| - |l_f|, |l_f| - |f(x)|) \le |f(x) - l_f| < \frac{|l_f|}{2} \\ & & \Longrightarrow\ & \frac{|l_f|}{2} < |f(x)|. \end{aligned}$$

Ensuite, en posant $\epsilon_{\frac{1}{f}} = \dfrac{2\epsilon_f}{l_f^2}$,

$$\begin{aligned} & & & \forall \epsilon_{\frac{1}{f}} > 0,\ \exists \eta_{\frac{1}{f}} = \inf(\eta_f, \eta) > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, \\ |x-a| < \eta_{\frac{1}{f}} & & \Longrightarrow\ & \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_f}\right| = \frac{|f(x) - l_f|}{|l_f f(x)|} < \frac{2\epsilon_f}{l_f^2} = \epsilon_{\frac{1}{f}}. \end{aligned}$$

■

Exemples :

1. Les fonctions polynômes admettent une limite en tout point a de $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles admettent une limite en tout point a de leur ensemble de définition.

D'après l'exemple 1 de la section 1.2 et d'après le théorème 2.1.1, les exemples 1 et 2 se traitent aisément (laissé en exercice au lecteur).

2.2 Comparaison.

Théorème 2.2.1

Comparaison.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ card\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap D_g \bigcap V(a, \epsilon)\right\} = \infty, \tag{5}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f et pour g sur $D_f \bigcap D_g$).

On suppose que f admet l_f pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$ et que g admet l_g pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$.

On suppose encore que $f \leq g$ sur $D_f \bigcap D_g$.

Dans ces conditions, $l_f \leq l_g$.

Théorème 2.2.2

Théorème des gendarmes.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ card\Big\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap D_g \bigcap V(a,\epsilon)\Big\} = \infty, \tag{6}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f et pour g sur $D_f \bigcap D_g$).

On suppose que f admet 0 pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$.

On suppose encore que $0 \leq g \leq f$ sur $D_f \bigcap D_g$.

Dans ces conditions, g admet 0 pour limite en a sur $D_f \bigcap D_g$.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0.$

L'exemple est traité aisément en utilisant $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$, ce qui se démontre en utilisant les aires dans le cerlce trigonométrique (laissé en exercice au lecteur).

■

2.3 Composition.

Théorème 2.3.1

Composition.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ card\Big\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap V(a,\epsilon)\Big\} = \infty, \tag{7}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f).

On suppose que f admet l pour limite en a.

On se restreint au cas où il existe un ensemble $E \subset D_f$ tel que a soit adhérent à E et tel que $f(E) \subset D_u$ (A l'oral : "Donc, l est adhérent à $f(E)$, d'après le théorème 1.1.2".) et tel que

$$\forall \epsilon > 0,\ card\Big\{f(x) \text{ tel que } f(x) \in D_u \bigcap V(l,\epsilon)\Big\} = \infty, \tag{8}$$

(pour pouvoir parler de limite en l pour u).

On suppose que u admet L pour limite en l.

Dans ces conditions, $u \circ f$ admet L pour limite en a sur E.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1.$
2. Les fonctions circulaires sin et cos admettent une limite en tout point a de $\mathbb{R}$.

3 Continuité d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$.

3.1 Définition et propriétés –continuité–.

On se restreint au cas où $a \in D_f$.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card}\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{9}$$

(pour pouvoir parler de limite en a pour f).

A l'oral : "Il s'agit du même cadre que celui qu'on avait décrit pour traiter la notion de limite, mais cette fois, le point a appartient à D_f".

Si f admet l pour limite en a, on dit que f est continue en a.

Cette limite est alors $l = f(a)$, d'après le théorème 1.1.1.

A l'oral : "Il faut absolument se détacher de l'idée intuitive qui dit : lorsqu'une fonction est continue (localement), sa représentation graphique peut être réalisée (localement) sans lever le crayon. En effet, la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \\ x \text{ si } x \in \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \end{cases} , \end{aligned}$$

est continue en 0".

3.2 Définition et propriétés –continuité à gauche, continuité à droite–.

<u>A gauche</u>

On se restreint au cas où $a \in D_f$.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card}\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap]-\infty, a] \bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{10}$$

(pour pouvoir parler de limite en a, à gauche, pour f).

Si f admet une limite à gauche en a, on dit que f est continue à gauche en a.

<u>A droite</u>

On se restreint au cas où $a \in D_f$.

On impose

$$\forall \epsilon > 0,\ \text{card}\left\{x \text{ tel que } x \in D_f \bigcap [a, \infty[\bigcap V(a,\epsilon)\right\} = \infty, \tag{11}$$

(pour pouvoir parler de limite en a, à droite, pour f).

Si f admet une limite à droite en a, on dit que f est continue à droite en a.

Théorème 3.2.1
Sous la condition (10), si f est continue à gauche en a et sous la condition (11), si f est continue à droite en a, alors f est continue en a.

Remarques :

– Sous la condition (10) et sous la condition (11), la condition (9) est satisfaite.

– La réciproque est fausse.

4 Propriétés relatives à la continuité.

Les propriétés relatives aux limites en un point a se transportent facilement pour déduire des propriétés relatives à la continuité en un point a.

Il ressort en particulier les résultats évidents suivants :

1. Les fonctions polynômes sont continues en tout point a de $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles sont continues en tout point a de leur ensemble de définition.
3. Les fonctions circulaires sin et cos sont continues en tout point a de $\mathbb{R}$.

5 Prolongement par continuité

On se restreint au cas où f n'est pas définie en a.

Lorsque f admet une limite l en a, on peut définir la fonction $\overline{f}$ par :

$$\begin{aligned} \overline{f}: \quad & D_f \bigcup \{a\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ l \text{ pour } x = a \end{cases}, \end{aligned} .$$

La fonction $\overline{f}$ ainsi définie est appelée le prolongement par continuité de f en a.

Annexe : Démonstrations laissées de côté ...

<u>Exemples de la section 1.1.</u>

Exemple 1 :

On prend $\epsilon = \eta\left(n(|a|+\eta)^{n-1}\right)$.

Alors, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in D_f$,

$$\begin{aligned} |x-a| < \eta \quad \Longrightarrow \quad & |x^n - a^n| = |x-a||x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}| \\ & \qquad < \eta |x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}| \\ \Longrightarrow \quad & |x^n - a^n| < \eta\left(|x|^{n-1} + |a||x|^{n-2} + \ldots + |a|^{n-2}|x| + |a|^{n-1}\right) \\ \Longrightarrow \quad & |x^n - a^n| < \eta\left(n(|a|+\eta)^{n-1}\right) = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Exemple 2 :

Premier cas : $a \neq 0$.

On prend $\epsilon = \frac{\eta}{\sqrt{a}}$.

Alors, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in D_f$,

$$\begin{aligned} |x-a| < \eta \quad \Longrightarrow \quad & |\sqrt{x} - \sqrt{a}||\sqrt{x} + \sqrt{a}| < \eta \\ \Longrightarrow \quad & |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{\eta}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} < \frac{\eta}{\sqrt{a}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Second cas : $a = 0$.

On prend $\epsilon = \sqrt{\eta}$.

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in D_f$,

$$|x| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x}| < \sqrt{\eta} = \epsilon.$$

■

Contre-exemple.

C'est immédiat.

■

Démonstration du théorème 1.1.1.

Si f admet deux limites distinctes l_1 et l_2, alors,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,$ tel que $\forall x \in D_f, |x - a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon$, et

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_2 > 0,$ tel que $\forall x \in D_f, |x - a| < \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon$.

Ainsi, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta = \inf(\eta_1, \eta_2) > 0,$ tel que $\forall x \in D_f, |x - a| < \eta \Longrightarrow 0 \neq |l_1 - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\epsilon$.

Cependant, ceci doit être vrai pour tout ϵ, mais c'est faux pour $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3} \neq 0$ (par exemple).

Par l'absurde, il est montré que la limite est unique lorsqu'elle est définie.

■

Si f admet l pour limite et si f est définie en a tel que $f(a) \neq l$, alors

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in D_f, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

Cependant, ceci doit être vrai pour tout $x \in D_f$ tel que $|x - a| < \eta$ et pour tout ϵ, mais c'est faux pour $x = a$ et $\epsilon = \dfrac{|f(a) - l|}{2} \neq 0$ (par exemple).

Par l'absurde, il est montré que si f admet l pour limite en a en étant définie en a, alors $f(a) = l$.

■

Démonstration du théorème 1.1.2.

Si f admet l pour limite en a, alors

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in D_f, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

Si la suite (x_n) (avec $x_n \in D_f$) converge vers a, alors

$\forall \epsilon_x > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},$ tel que $\forall n > N, |x_n - a| < \epsilon_x$.

Par conséquent, en prenant $\epsilon_x = \eta$,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ et $\exists N \in \mathbb{N},$ tels que $\forall n > N, |x_n - a| < \epsilon_x = \eta \Longrightarrow |f(x_n) - l| < \epsilon$,

puis $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},$ tel que $\forall n > N, |f(x_n) - l| < \epsilon$, ce qui signifie que la suite $f(x_n)$ converge vers l.

■

Réciproquement, si f n'admet pas l comme limite en a,
$\exists\epsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ \exists x \in D_f,$ tel que $|x-a| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \epsilon$.

En particulier, $\exists\epsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in D_f$ tel que $x_n \in]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ et $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$. On a donc construit une suite (x_n) qui converge vers a, mais qui est telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers l.

Par contraposée, il est montré que si pour toute suite (x_n) de D_f convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l, alors f admet l pour limite en a.

■

<u>Démonstration du contre-exemple de la section 1.1.</u>

Si f admettait l pour limite finie en 0, alors, en considérant la suite (x_n) donnée par $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ qui converge vers 0, on aurait $l = 1$; mais en considérant la suite (x_n) donnée par $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ qui converge vers 0, on aurait $l = -1$. C'est absurde, par unicité de la limite, et donc f n'admet pas de limite finie en 0.

■

<u>Démonstration du théorème 1.2.1.</u>

Si

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta_1 > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap]-\infty, a], |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

et si

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta_2 > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap [a, \infty[, |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

alors
$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta = \inf(\eta_1, \eta_2) > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

■

<u>Démonstration du théorème 2.1.1 pour la somme.</u>

On a

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l_f| < \epsilon,$$

et

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta_g > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_g, |x-a| < \eta_g \Longrightarrow |g(x) - l_g| < \epsilon,$$

et donc, avec $\epsilon_{f+g} = 2\epsilon$,

$$\begin{aligned} & \forall\epsilon_{f+g} > 0,\ \exists\eta = \inf(\eta_f, \eta_g) > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_{f+g}, |x-a| < \eta \\ \Longrightarrow\ & |(f+g)(x) - (l_f + l_g)| \\ & \quad \leq |f(x) - l_f)| + |g(x) - l_g| \\ & \quad < 2\epsilon = \epsilon_{f+g} \end{aligned}$$

■

Démonstration du théorème 2.2.1.

D'après le théorème 2.1.1, $l_f - l_g = \lim_{x \to a} f(x) - g(x)$.

On va supposer que $l_f > l_g$.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap D_g, |x-a| < \eta \Longrightarrow |g(x) - f(x) - l_g + l_f| < \epsilon.$$

Donc, en prenant $\epsilon = \dfrac{|l_g - l_f|}{2}$,

$$\begin{aligned} & \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap D_g, \\ |x-a| < \eta \quad & \Longrightarrow \quad l_f - l_g - f(x) + g(x) \leq |g(x) - f(x) - l_g + l_f| < \frac{|l_g - l_f|}{2} = \frac{l_f - l_g}{2} \\ & \Longrightarrow \quad g(x) - f(x) < -\frac{l_f - l_g}{2} < 0. \end{aligned}$$

C'est absurde car $g(x) - f(x) \geq 0$ sur $D_f \bigcap D_g$ et on a donc montré que $l_f \leq l_g$.

■

Démonstration du théorème 2.2.2.

Si $0 \leq g \leq f$, on déduit $|g| \leq |f|$.

Si f admet 0 pour limite en a, alors

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap D_g, |x-a| < \eta \Longrightarrow |g(x)| \leq |f(x)| < \epsilon$, puis

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f \bigcap D_g, |x-a| < \eta \Longrightarrow |g(x)| < \epsilon$, ce qui signifie que la fonction g admet 0 pour limite en a.

■

Démonstration du théorème 2.3.1.

Si f admet l pour limite en a, alors

$\forall \epsilon_f > 0,\ \exists \eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D_f, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon_f$, puis

$\forall \epsilon_f > 0,\ \exists \eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in E \subset D_f, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon_f$.

Si u admet L pour limite en l, alors

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_u > 0,\ \text{tel que } \forall y \in D_u, |y-l| < \eta_u \Longrightarrow |u(y) - L| < \epsilon$, puis, en prenant $\epsilon_f = \eta_u$,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_f > 0$ et $\exists \eta_u > 0,\ \text{tels que } \forall x \in E$

(et, par conséquent, $\forall f(x) \in f(E) \subset D_u$),

$|x-a| < \eta_f \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon_f = \eta_u \Longrightarrow |u(f(x)) - L| < \epsilon$, puis

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_f > 0,\ \text{tel que } \forall x \in E, |x-a| < \eta_f \Longrightarrow |u(f(x)) - L| < \epsilon$, ce qui signifie que $u(f)$ converge vers L sur E.

■

Exemples de la section 2.3.

Exemple 1.

Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(x) \geq 0$ et $\cos(x) = |\cos(x)| = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Puis, comme $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$, on a $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

■

Exemple 2.

On a $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$. Donc, en posant $x = a + h$,

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \lim_{h \to 0} \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) = \sin(a).$$

On a $\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$. Donc, en posant $x = a + h$,

$$\lim_{x \to a} \cos(x) = \lim_{h \to 0} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) = \cos(a).$$

■