Leçon d'oral 1.
Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à la calculatrice.

Denis Vekemans *

20 octobre 2006

Pré-requis
- Suites réelles : récurrence, convergence, suites adjacentes.
- Fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles : continuité (théorème des valeurs intermédiaires, théorème du point fixe), convexité, dérivabilité (théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, formules de Taylor).

1 Position du problème

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles.

Dans tout l'exposé, on se place dans le cas où f est une fonction strictement monotone continue et qui change de signe sur $[a, b]$, ce qui assure qu'il existe un unique $x^* \in [a, b]$ pour lequel $f(x^*) = 0$.

A l'oral : "Pour l'existence, c'est immédiat d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; pour l'unicité, c'est immédiat car la stricte monotonie assure l'injectivité".

Une méthode d'approximation d'une solution d'une équation numérique consiste à trouver un procédé pour approcher x^*.

2 Méthode de dichotomie

2.1 Algorithme

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

A l'oral : "Dans le cadre de cette leçon, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés".

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, faire

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

A l'oral : "La valeur de N est à choisir en fonction de la précision voulue".

On pose $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Si $f(c_{n+1}) = 0$, alors écrire ["$x^* =$" c_{n+1}] et sortir de la boucle pour.

Si $f(c_{n+1})f(a_n) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_{n+1}$,

sinon on pose $a_{n+1} = c_{n+1}$ et $b_{n+1} = b_n$.

A l'oral : "Ainsi, $f(a_{n+1})$ et $f(b_{n+1})$ sont de signes opposés".

Fin de la boucle pour.

Ecrire [a_{N+1} "et" a_{N+1} "encadrent le zéro de f"].

2.2 Convergence

Théorème 1

Dans le cadre de la leçon, les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ précédemment définies convergent vers l'unique racine x^* de f.

2.3 Majoration de l'erreur

Propriété 2

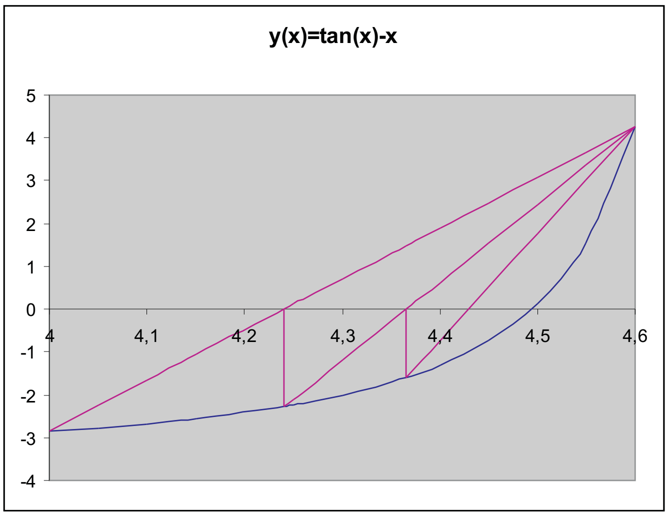
Dans le cadre de la leçon, on a

$$|a_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n} \text{ et } |b_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

3 La méthode de Lagrange

3.1 Brève présentation

A l'oral : "Les segments tracés joignent le point $C(c, f(c))$ et le point $M_n(x_n, f(x_n))$, en passant par le point $X_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ (qui définit x_{n+1} à partir de x_n)".



3.2 Propriétés

A l'oral : "Le théorème suivant définit un cadre qui assure la convergence de la méthode de Lagrange et qui permet un contrôle de l'erreur".

Théorème 3

Dans le cadre de la leçon, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et si f'' a un signe constant sur $[a,b]$,

alors la suite $(x_n)_n$ donnée par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c - x_n}{f(c) - f(x_n)} f(x_n)$$

a un sens et converge vers l'unique racine x^* de f si l'on prend

- *$x_0 = a$ et $c = b$ lorsque $f'f'' > 0$;*
- *$x_0 = b$ et $c = a$ lorsque $f'f'' < 0$.*

De plus,

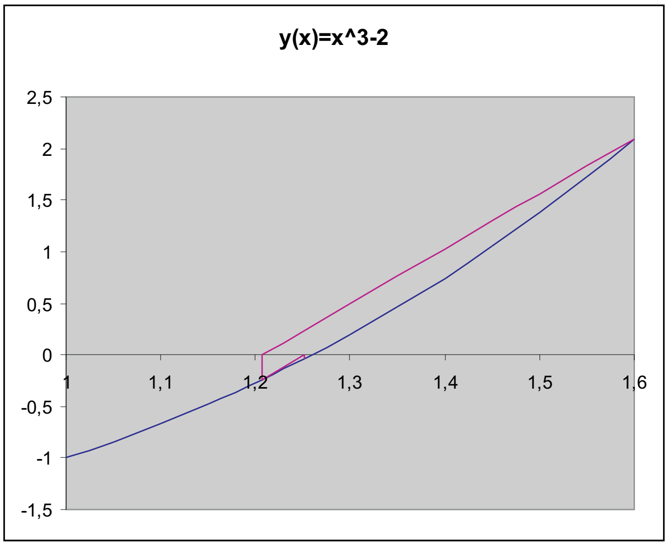
$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{|c - x^*|}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x^*|,$$

où $m_1 = \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

4 La méthode d'ajustement linéaire

4.1 Brève présentation

A l'oral : "Les segments tracés sont parallèles et joignent le point $M_n(x_n, f(x_n))$ et le point $X_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ (qui définit x_{n+1} à partir de x_n) ; le coefficient directeur de ces segments est $\frac{m+M}{2}$".



4.2 Propriétés

A l'oral : "Le théorème suivant définit un cadre qui assure la convergence de la méthode d'ajustement linéaire et qui permet un contrôle de l'erreur".

Théorème 4

Dans le cadre de la leçon, si f est dérivable sur $[a, b]$ et s'il existe m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, alors la suite $(x_n)_n$ donnée par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\omega} f(x_n)$$

avec $\omega = \frac{m+M}{2}$ a un sens et converge vers l'unique racine x^* de f si l'on prend

- *$x_0 = a$ lorsque $f(a)f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$;*
- *$x_0 = b$ lorsque $f(a)f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$.*

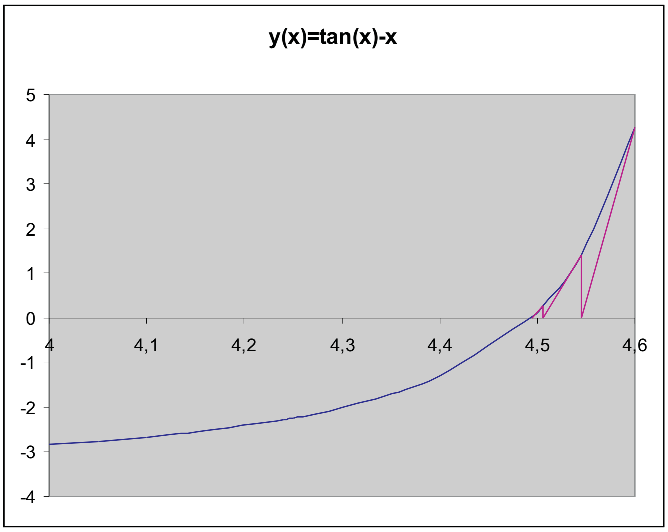
De plus,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \underbrace{|\frac{M-m}{m+M}|}_{<1} |x_n - x^*|.$$

5 La méthode de Newton

5.1 Brève présentation

A l'oral : "Les segments tracés sont tangents à la courbe représentative de f et joignent le point $M_n(x_n, f(x_n))$ et le point $X_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ (qui définit x_{n+1} à partir de x_n)".



5.2 Propriétés

A l'oral : "Le théorème suivant définit un cadre qui assure la convergence de la méthode de Newton et qui permet un contrôle de l'erreur".

Théorème 5

Dans le cadre de la leçon, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si f'' a un signe constant sur $[a, b]$, alors la suite $(x_n)_n$ donnée par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n)$$

a un sens et converge vers l'unique racine x^* de f si l'on prend

- $x_0 = a$ *lorsque* $f'f'' < 0$;
- $x_0 = b$ *lorsque* $f'f'' > 0$.

De plus,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x^*|^2,$$

où $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ *et* $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Démonstration du théorème 5

On traite le cas où $f' > 0$ et où $f'' > 0$. On a $x_0 = b$.

Montrons par récurrence que $x_n \in [x^*, b]$.

- La propriété est vraie au rang 0 car $x_0 = b \in [x^*, b]$.
- Si la propriété est vraie au rang n, on a $f(x_n) > 0$ (car f est strictement croissante et car $f(x^*) = 0$) et $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ (car f est strictement croissante). Puis, $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$, et donc $(x_n)_n$ est une suite décroissante. De plus, comme f est strictement convexe, on a $f(x_{n+1}) > 0 = f(x^*)$ (car les tangentes sont strictement en-dessous de la courbe représentative), puis $x_{n+1} > x^*$ (car f est croissante).

La suite $(x_n)_n$ est donc décroissante et minorée par x^*. Elle converge donc vers une limite l qui est telle que $l = l - \frac{f(l)}{\underbrace{f'(l)}_{\neq 0}}$, ce qui donne $f(l) = 0$, puis $l = x^*$.

Soit $g : x \in [a, b[\mapsto g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, on a $x_{n+1} = g(x_n)$.

$$g(x) - x^* = \frac{(x - x^*)f'(x) - f(x)}{f'(x)}.$$

La formule de Taylor Lagrange appliquée à f donne

$$\exists\zeta \in [a, b],\ 0 = f(x^*) = f(x) + (x^* - x)f'(x) + \frac{(x^* - x)^2}{2}f''(\zeta).$$

Puis,

$$g(x) - x^* = \frac{(x^* - x)^2}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(x)}.$$

Et enfin,

$$|\underbrace{g(x_n)}_{=x_{n+1}} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x^*|^2.$$

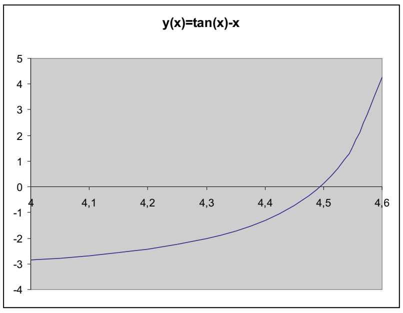
A l'oral : "On dit que la convergence de la méthode de Newton est quadratique".

■

6 Exemple numérique

On considère l'équation $f(x) = 0$ où $f : [4, \frac{46}{10}] \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x) = \tan(x) - x$. On a $f(4) < 0$ et $f(\frac{46}{10}) > 0$.

Le graphe de la fonction f est le suivant :



Le tableau suivant fournit les valeurs des $(x_n)_n$ provenant des différentes méthodes.

	dichotomie	Lagrange	ajustement linéaire	Newton
x_0	$\underline{4},3000000000$	$\underline{4},0000000000$	$\underline{4},6000000000$	$\underline{4},600000000000$
x_1	$\underline{4},4500000000$	$\underline{4},2401045235$	$\underline{4,493}2865349$	$\underline{4},545732122079$
x_2	$\underline{4},5250000000$	$\underline{4},3656609178$	$\underline{4,493}3486683$	$\underline{4},506145588039$
x_3	$\underline{4},4875000000$	$\underline{4,4}295862330$	$\underline{4,493}3794044$	$\underline{4,49}4171630174$
x_4	$\underline{4},5062500000$	$\underline{4,4}616762457$	$\underline{4,493}3946020$	$\underline{4,4934}12196821$
x_5	$\underline{4,49}68750000$	$\underline{4,4}776695947$	$\underline{4,49340}21150$	$\underline{4,4934094579}44$
x_6	$\underline{4,49}21875000$	$\underline{4,4}856117787$	$\underline{4,49340}58286$	$\underline{4,493409457909}$
x_7	$\underline{4,49}45312500$	$\underline{4,4}895487200$	$\underline{4,49340}76641$	$\underline{4,493409457909}$
x_8	$\underline{4,493}3593750$	$\underline{4,49}14985196$	$\underline{4,49340}85713$	$\underline{4,493409457909}$
x_9	$\underline{4,493}9453125$	$\underline{4,49}24637450$	$\underline{4,493409}0197$	$\underline{4,493409457909}$
x_{10}	$\underline{4,493}6523437$	$\underline{4,49}29414637$	$\underline{4,493409}2413$	$\underline{4,493409457909}$
x_{11}	$\underline{4,493}5058593$	$\underline{4,493}1778753$	$\underline{4,493409}3508$	$\underline{4,493409457909}$

A l'oral : "les chiffres exacts ont été soulignés".

Pour la dichotomie,

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Pour la méthode de Lagrange,

$$x_0 = 4,0000000000 \ ; \ x_{n+1} = x_n - \frac{(4,6000000000 - x_n) \cdot (\tan(x_n) - x_n)}{78,5026991814 - \tan(x_n) + x_n}.$$

Pour la méthode d'ajustement linéaire,

$$x_0 = 4,6000000000 \ ; \ x_{n+1} = x_n - 0,0250490807 \cdot (\tan(x_n) - x_n)).$$

Et, pour la méthode de Newton,

$$x_0 = 4,6000000000 \ ; \ x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)}.$$

A Annexe : les différents choix

Il est choisi de ne pas introduire la notion de séparation des zéros de f et de poser toute la leçon dans un cadre où il est assuré que la fonction f admet une unique racine. Raison de ce choix : il faut faire vite pour que l'exposé tienne en 25 minutes.

Il est choisi de ne pas inclure le théorème du point fixe dans la leçon, mais les trois méthodes d'ajustement linéaire, de Lagrange et de Newton sont bien entendu des méthodes de point fixe. La connaissance de la démonstration du théorème du point fixe est capitale pour cette leçon. Même raison que précédemment.

Il est choisi de présenter rapidement les méthodes pour pouvoir présenter trois méthodes de point fixe.

Il est choisi de ne traiter l'outil calculatrice qu'à la fin en visitant chacune des différentes méthodes. Raison de ce choix : la comparaison directe des méthodes est facilitée ; de plus, éteindre et rallumer plusueurs fois la calculatrice au cours de l'exposé nuit à sa clarté et déconcentre le candidat.

Les méthodes ont été proposées de la moins performante à la plus performante.

Option : présenter la leçon sans traiter la méthode d'ajustement linéaire ou la méthode de Lagrange, mais en détaillant l'utilisation de l'outil calculatrice.

B Annexe : démonstrations laissées de côté

<u>Démonstration du théorème 1</u>

Par construction, on a $(a_n)_n$ qui est croissante, $(b_n)_n$ qui est décroissante, et

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{b_n - a_n}_{=\frac{b-a}{2^n}} = 0.$$

Les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite l.

Prenons le cas où f est strictement croissante. La limite de la suite $(a_n)_n$ est telle que $f(l) \leq 0$, par continuité de f. De même, la limite de la suite $(b_n)_n$ est telle que $f(l) \geq 0$, par continuité de f. Et, il s'ensuit que $f(l) = 0$.

■

<u>Démonstration de la propriété 2</u>

C'est évident car le théorème des suites adjacentes nous fournit $x^* \in [a_n, b_n]$ avec $a_n - b_n = \frac{b-a}{2^n}$.

■

<u>Démonstration du théorème 3</u>

On traite le cas où $f' > 0$ et où $f'' > 0$. On a $x_0 = a$ et $c = b$.

Montrons par récurrence que $x_n \in [a, x^*]$.

– La propriété est vraie au rang 0 car $x_0 = a \in [a, x^*]$.

– Si la propriété est vraie au rang n, on a $f(x_n) < 0$ (car f est strictement croissante et car $f(x^*) = 0$) et $\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} > 0$ (car f est strictement croissante). Puis, $x_{n+1} - x_n = -\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(x_n) > 0$ et donc $(x_n)_n$ est une suite croissante. De plus, comme f est strictement convexe, on a $f(x_{n+1}) < 0 = f(x^*)$ (car les cordes sont strictement au-dessus de la courbe représentative), puis $x_{n+1} < x^*$ (car f est croissante).

La suite $(x_n)_n$ est donc croissante et majorée par x^*. Elle converge donc vers une limite l qui est telle que $l = l - \dfrac{b-l}{\underbrace{f(b)-f(l)}_{\neq 0}} f(l)$, ce qui donne $f(l) = 0$, puis $l = x^*$.

Soit $g : x \in [a, b[\mapsto g(x) = \frac{xf(b)-bf(x)}{f(b)-f(x)}$, on a $x_{n+1} = g(x_n)$.

$$g(x) - x^* = \frac{\overbrace{(x-x^*)f(b) - (b-x^*)f(x)}^{\text{On pose } \psi(x) = (x-x^*)f(b)-(b-x^*)f(x)}}{f(b)-f(x)}.$$

La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et $\psi(x^*) = \psi(b) = 0$.

Pour $x \in [a, b[$ fixé tel que $x \neq x^*$, on pose $\Psi : t \in [a, b] \mapsto \Psi(t) = \psi(t) - \psi(x)\frac{(t-x^*)(t-b)}{(x-x^*)(x-b)}$. La fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et $\Psi(x) = \Psi(x^*) = \Psi(b) = 0$.

Donc, par le théorème de Rolle itéré, il existe $\zeta \in]a, b[$ tel que $\Psi''(\zeta) = 0$. Puis, $\frac{\psi(x)}{(x-x^*)(x-b)} = \frac{1}{2}\psi''(\zeta) = -\frac{1}{2}(b-x^*)f''(\zeta)$.

Donc, $|\psi(x)| \leq \frac{(b-x^*)(b-x)}{2} M_2 |x - x^*|$.

Et, comme $|f(b) - f(x)| \geq m_1 |b - x|$, on obtient pour $x \in [a, b[$ fixé tel que $x \neq x^*$,

$$|g(x) - x^*| \leq \frac{b-x^*}{2}\frac{M_2}{m_1}|x - x^*|,$$

et cette inégalité demeure lorsque $x = x^*$.

■

Démonstration du théorème 4

m et M sont de même signe car f est strictement monotone.

Soit $g : x \in [a, b] \mapsto g(x) = x - \frac{1}{\omega} f(x)$.

Montrons que g admet un point fixe.

On a $g'(x) = 1 - \frac{1}{\omega} f'(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Puis, $g'(x) \in [\underbrace{\dfrac{m-M}{m+M}}_{=-\alpha}, \underbrace{\dfrac{M-m}{m+M}}_{=\alpha}]$, $\forall x \in [a, b]$, et $-1 < -\alpha \leq g'(x) \leq \alpha < 1$, ce qui induit que g est contractante.

Supposons que f change de signe entre a et $\frac{a+b}{2}$. Alors $[a, \frac{a+b}{2}]$ contient l'unique racine x^* de f, puis $[a, 2x^* - a] \subset [a, b]$ et $[a, 2x^* - a]$ est stable par g car

$$|g(x) - x^*| = |g(x) - g(x^*)| \leq \underbrace{|\frac{M-m}{m+M}|}_{<1} |x - x^*| \leq |a - x^*| = x^* - a.$$

Donc, si f change de signe entre a et $\frac{a+b}{2}$, on pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ qui converge vers x^* tel que $g(x^*) = x^*$ ou $f(x^*) = 0$.

De plus, on a $|g(x_n) - x^*| = |x_{n+1} - x^*| \leq \underbrace{|\frac{M-m}{m+M}|}_{<1} |x_n - x^*|$.

■