Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet de Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Exercice 1

1. Les faces cachées sont en gras dans le tableau :

face	*ABFE*	*BCGF*	**CDHG**	**DAEH**	**ABCD**	*EFGH*
motif	*hachures*	*uni*	*hachures*	*uni*	*points*	*points*

2. Pour répondre à cette question, il est implicite :
   ✓ qu'on ne tient pas compte ni du nombre de points de l'original ni du nombre de ses hachures (qui manifestement diffèrent entre la figure n°1 et les "patrons" proposés) ;
   ✓ qu'on ne tient pas compte ni de l'orientation du pointillage (pointillage parallèlement aux côtés du carré pour la figure n°1 et parallèlement aux diagonales du carré pour la figure n°2), ni de celle de ses hachures.

   Patron n°1 : oui ! Pour le vérifier, il suffit de nommer les points correctement et de vérifier que les motifs coïncident avec ceux proposés dans l'inventaire de la question 1.

   Patron n°2 : non ! Par repliage mental, on s'aperçoit que ce ne sont pas des faces opposées qui ont même motif mais des faces adjacentes.

   Patron n°3 : oui ! Pour le vérifier, il suffit de nommer les points correctement et de vérifier que les motifs coïncident avec ceux proposés dans l'inventaire de la question 1.

   Patron n°4 : non ! Par repliage mental, on s'aperçoit que les faces hachurées sont effectivement opposées, mais que ce n'est le cas ni des faces pointées ni des faces unies qui sont adjacentes.

3. (a) On obtient $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ petits cubes.
   (b) Le volume du petit cube est le volume du grand cube divisé par le nombre de petits cubes qui composent ce grand cube (le volume est une mesure), d'où le volume du petit cube est $\frac{216cm^3}{27} = 8cm^3$.
   (c) La longueur d'une arête du petit cube est donnée par la racine cubique de son volume, d'où le côté du petit cube mesure $\sqrt[3]{8cm^3} = 2cm$. La longueur d'une arête du grand cube est donnée par la racine cubique de son volume, d'où le côté du grand cube mesure $\sqrt[3]{216cm^3} = 6cm$.

(d)

nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
nombre de petits cubes	$1^{(*)}$	$6^{(**)}$	$12^{(***)}$	$8^{(****)}$	0	0	0

$^{(*)}$: le cube du centre ;

$^{(**)}$: les six petits cubes ayant une face qui coïncide avec le cube du centre ;

$^{(***)}$: les douze petits cubes ayant seulement un côté (en tant que droite) commun avec ceux (toujours en tant que droite) du grand cube ;

$^{(****)}$: les huit petits cubes ayant trois côtés (en tant que droite) communs avec ceux (toujours en tant que droite) du grand cube (ou ayant un sommet commun avec ceux du grand cube).

(e) Le nombre de petites faces décorées est six (le nombre de faces du grand cube) fois neuf (le nombre de faces décorées sur une face du grand cube), soit 54. On peut retrouver ce résultat en utilisant le tableau de la question précédente : $0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 12 + 3 \times 8 = 54$.

4. (a) Le nouveau solide est constitué de $27 - 8 = 19$ petits cubes. Il a donc un volume de $19 \times 8cm^3 = 152cm^3$.

(b) Le nouveau solide a une aire latérale égale à celle du cube car l'action "j'enlève un petit cube en l'un des sommets du grand cube" n'a aucun effet sur l'aire latérale (on remplace l'aire de trois des faces d'un petit cube par l'aire des trois autres faces de ce même petit cube). Il a donc une aire latérale de

$$\underbrace{6}_{\text{nombre de faces}} \times \underbrace{\underbrace{6cm}_{\text{côté du grand cube}} \times \underbrace{6cm}_{\text{côté du grand cube}}}_{\text{aire d'une face du grand cube}} = 216cm^2.$$

Exercice 2

1.

Vraie grandeur	$1km$	$4km$	$6km$	$14km$
Représentation	$1cm$	$4cm$	$6cm$	$14cm$

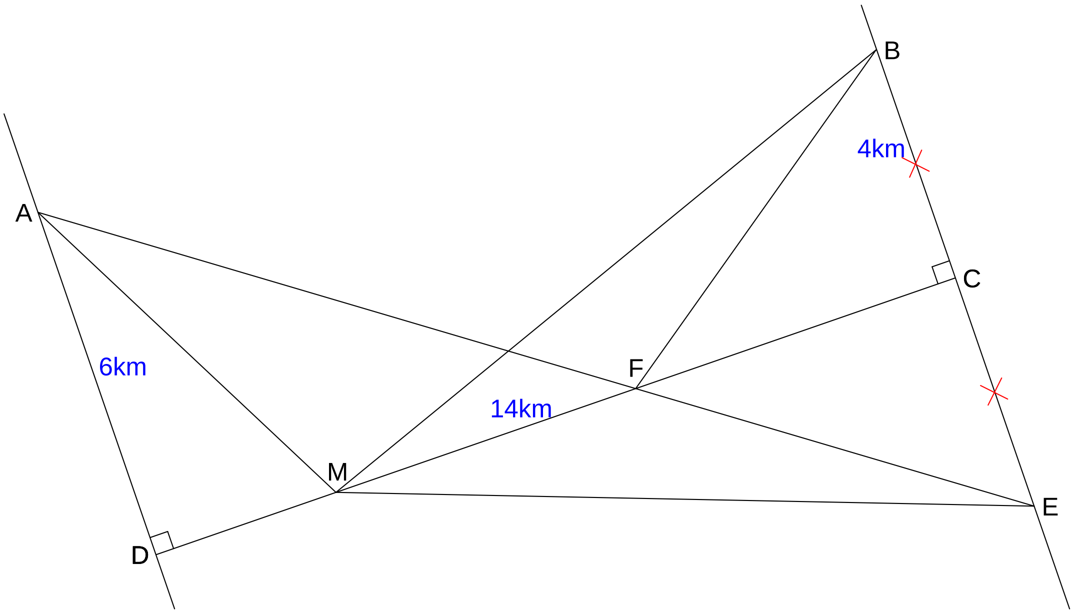
A l'échelle, $1cm$ représente $1km = 100000cm$ ou encore l'échelle est $1 : 100000$.

Cette figure n'est pas à l'échelle :

2. Comme les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires, pour construire E le symétrique orthogonal de B par rapport à la droite (CD), il suffit que C soit milieu de $[BE]$ ainsi la droite (CD) est médiatrice du segment $[BE]$ et B et E sont symétriques orthogonaux par rapport à la droite (CE).

3. F et M sont sur la droite (CD) qui est médiatrice du segment $[BE]$ (voir ci-dessus), donc $FB = FE$ et $MB = ME$.

Il s'ensuit que $AM + MB = \underbrace{AM + ME \geq AE}_{\text{inégalité triangulaire}} = AF + FE = AF + FB$, d'après l'inégalité triangulaire appliquée au triangle AME. Le cas d'égalité ne survient que si M appartient au segment $[AE]$, c'est-à-dire si M et F sont confondus. Ceci est exclu par hypothèse, donc $AM + MB > AF + FB$.



4. Il vient directement de l'inégalité précédente que pour obtenir le trajet le plus court de A à B en passant par la droite (CD), il faut passer par F. C'est aussi l'endroit où il faut placer la gare G.
5. En considérant les parallèles (DA) et (CE), et les sécantes (DC) et (AE), le théorème de Thalès donne :
$$\left(\frac{FA}{FE}=\right)\frac{FD}{FC}=\frac{AD}{CE},$$
puis
$$\frac{FD}{FC}=\frac{6km}{4km}=\frac{3}{2},$$
et
$$FD=\frac{3}{2}\times FC.$$
6. Comme $FD+FC=CD=14km$, on déduit en utilisant l'égalité ci-dessus que $\frac{3}{2}\times FC+FC=CD=14km$ ou $\frac{5}{2}\times FC=14km$, puis $FC=5,6km$ (et $FD=8,4km$).
7. Soit H le projeté orthogonal de E sur la droite (AD).

   Le triangle AHE est reactngle en H (par construction) et le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle donne donc :
$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{AH^2+HE^2} \\ &= \sqrt{(AD+DH)^2+DC^2} \\ &= \sqrt{(AD+CE)^2+DC^2} \\ &= \sqrt{(6km+4km)^2+(14km)^2} \\ &= \sqrt{296}km \\ &\approx 17,205km=17205m. \end{aligned}$$
   En effet, il est évident que $DCEH$ est un rectangle (car possèdant trois angles droits) et ses côtés opposés sont donc égaux.

Question complémentaire

1. (a) Procédures à la partée des élèves :
   - ✓ L'élève place un point M sur la droite en estimant visuellement la plus courte distance du point A à la droite, réalisée par AM. [Cette méthode peut aboutir à un résultat acceptable].
   - ✓ L'élève peut placer plusieurs points M_1, ..., M_n sur la droite, mesurer, puis conclure sur le point choisi M_i le plus proche du point A. [Cette méthode peut aboutir à un résultat acceptable].
   - ✓ L'élève trace la perpendiculaire à la droite passant par le point A ; puis, l'intersection de la droite et de cette perpendiculaire fournit le point cherché. [Il s'agit de la méthode experte attendue].
   - ✓ L'élève trace des cercles de centre A, de plus en plus grands, jusqu'à ce que l'un "touche" la droite en un point H ; et ce point H est le point cherché. [Cette méthode peut aboutir à un résultat acceptable].

   (b) Propriété attendue. Le point d'une droite d le plus proche d'un point A donné est le projeté orthogonal H de A sur la droite d qui peut donc être obtenu comme intersection de la perpendiculaire à la droite d passant par A et de la droite d elle-même.

   Difficulté qui peut faire obstacle à l'émergence de cette propriété. L'élève doit se détacher des configurations usuelles (droites parallèles à l'un des bord de la feuille où la plus courte distance d'un point à une droite s'obtient en menant une horizontale ou une verticale par ce point).

   Sinon, lors d'une démarche par tâtonnement, l'élève peut être confronté à des problèmes de mesurages (proposer comme solution un point qui ne l'est pas du tout ou proposer plusieurs points ou ...), ce qui va faire obstacle à l'émergence de la propriété attendue.

   (c) Comme expliqué dans la sous-question précédente, lorsque la droite est parallèle au bord de la feuille, la propriété attendue (projection orthogonale) peut ne pas émerger car l'orthogonalité n'est plus la seule réponse correcte puisque l'élève peut alors se contenter d'utiliser le parallélisme aux bords de la feuille, autrement dit l'horizontale ou la verticale.

   (d) L'ensemble cherché est la réunion des deux droites parallèles situées à $7cm$ de la droite. Pour les construire, il suffit de placer deux points de part et d'autre de la droite à $7cm$ de la droite (on utilise alors une techhnique donnée dans le point 2 du document) puis de mener les parallèles à la droite passant par chacun de ces deux points.

2. Avantage du travail avec un logiciel de géométrie dynamique :
   - ✓ cela **évite les erreurs de mesurage** ;
   - ✓ c'est **rapide** pour trouver un point solution (et donc plusieurs aussi) en utilisant la mobilité du point A
   - ✓ la **géométrie devient dynamique** : l'élève peut se rendre compte des directions à prendre pour augmenter ou diminuer la distance du point A à la droite lors du déplacement de ce point A.

Exercice 3

1. (a) 34 n'étant pas un multiple de 3, Pierre ne peut, seul, donner exactement 34 points à Jean. Cependant, Pierre peut donner plus de points que 34 en jetons de 3 points de manière à ce que Jean rende la différence en jetons de 7 points.

   Soit $B \in \mathbb{N}$ le nombre de jetons bleus donnés par Pierre (de trois points) et $R \in \mathbb{N}$ le nombre de jetons rouges rendus par Jean (de sept points).

   On cherche donc une valeur de $B \in \mathbb{N}$ et une valeur de $R \in \mathbb{N}$ telle que $3 \times B = 34 + 7 \times R$.

   Recherche par tâtonnement d'une solution (on dit une car il en existe plusieurs) :

   ✓ Si $R = 0$, $3 \times B = 34$ et $B \notin \mathbb{N}$. Le cas $R = 0$ ne fournit donc pas de solution.

   ✓ Si $R = 1$, $3 \times B = 34 + 7 = 41$ et $B \notin \mathbb{N}$. Le cas $R = 1$ ne fournit donc pas de solution.

   ✓ Si $R = 2$, $3 \times B = 34 + 7 \times 2 = 48$ et $B = 16$. Ainsi, $\boxed{B = 16 \textbf{ et } R = 2}$ fournit une solution.

   On s'arrête là car on a trouvé une solution.

   (b) Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{N}$ le nombre de jetons bleus de Paul et $\mathcal{R} \in \mathbb{N}$ le nombre de jetons rouges de Paul.

   D'après ce qu'affirme Paul, $\mathcal{B} \times 3 + \mathcal{R} \times 7 = 94$ et $\mathcal{B} + \mathcal{R} = 29$.

   Or, 29 est impair, ce qui induit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont de parités contraires.

   Mettons que $\mathcal{B}$ soit pair et $\mathcal{R}$ soit impair, alors $\underbrace{\underbrace{\mathcal{B} \times 3}_{pair} + \underbrace{\mathcal{R} \times 7}_{impair}}_{impair}$ est impair, ce qui est absurde car 94 est pair.

   Mettons que $\mathcal{B}$ soit impair et $\mathcal{R}$ soit pair, alors $\underbrace{\underbrace{\mathcal{B} \times 3}_{impair} + \underbrace{\mathcal{R} \times 7}_{pair}}_{impair}$ est impair, ce qui est absurde car 94 est pair.

   Donc, $\boxed{\text{Paul ment}}$!

   Remarque : on obtenait la même conclusion en résolvant le système linéaire.

   (c) Soit β le nombre de jetons bleus de Céline et ρ le nombre de jetons rouges de Céline.

   On a $\beta \times 3 + \rho \times 7 = 34$.

   Recherche par tâtonnement des solutions :

   ✓ Si $\rho = 0$, $3 \times \beta = 34$ et $\beta \notin \mathbb{N}$. Le cas $\rho = 0$ ne fournit donc pas de solution.

   ✓ Si $\rho = 1$, $3 \times \beta = 27$ et $\beta = 9$. Ainsi, $\boxed{\beta = 9 \textbf{ et } \rho = 1}$ fournit une solution.

   ✓ Si $\rho = 2$, $3 \times \beta = 20$ et $\beta \notin \mathbb{N}$. Le cas $\rho = 2$ ne fournit donc pas de solution.

   ✓ Si $\rho = 3$, $3 \times \beta = 13$ et $\beta \notin \mathbb{N}$. Le cas $\rho = 3$ ne fournit donc pas de solution.

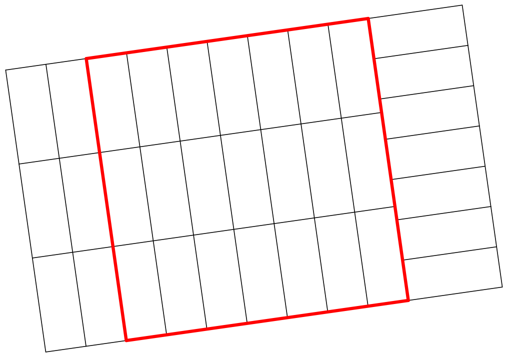
   ✓ Si $\rho = 4$, $3 \times \beta = 6$ et $\beta = 2$. Ainsi, $\boxed{\beta = 2 \textbf{ et } \rho = 4}$ fournit une solution.

   ✓ Si $\rho \geq 5$, $3 \times \beta \leq -1$ et $\beta \notin \mathbb{N}$. Le cas $\rho \geq 5$ ne fournit donc pas de solution.

2. Le schéma suivant réinvestit la décomposition $34 = 9 \times 3 + 7$ pour paver un rectangle de longueur 34 et de largeur 21.

   En faisant pivoter sur lui même d'un quart de tour le carré bordé de rouge, on obtient un schéma qui réinvestit la décomposition $34 = 2 \times 3 + 4 \times 7$ pour paver un rectangle de longueur 34 et de largeur 21.

   Il s'agit d'un pavage et on peut donc disposer un maximum de 34 rectangles de longueur 7 et de largeur 3 dans le rectangle de longueur 34 et de largeur 21.



Question complémentaire

1. Il s'agit d'une activité qui tient place au $\boxed{\text{cycle 3}}$. En effet, la notion de périmètre, présente dans le problème n°3, n'est travaillée à l'Ecole que dans le programme de cycle 3.
2. ✓ Erreur attendue : l'élève mesure les côtés sur le dessin ; il ne tient pas compte de "le dessin n'est pas en vraie grandeur".

   ✓ Erreur attendue : l'élève divise les dimensions du grand rectangle par 5 suite à la présence de 5 rectangles identique pour paver le grand et fournit donc le réultat "longueur de $2,4cm$ et largeur de $2cm$" ; il ne tient pas compte de la disposition des rectangles et utilise de façon complètement farfelue les données.

   ✓ Erreur attendue : l'élève considère que ce sont les petits rectangles (et non le grand) qui ont pour dimensions $12cm$ de long et $10cm$ de large et fournit donc le résultat "longueur de $24cm = 12cm + 12cm$ et largeur de $22cm = 12cm + 10cm$" ; il n'utilise pas correctement le système de cotation.
3. ✓ $\boxed{\text{Etape n°1}}$ La longueur du grand rectangle, $18cm$ correspond à 3 fois celle de l'étiquette. **La longueur de l'étiquette est donc** $6cm$ $(6 = \frac{18}{3})$.

   ✓ $\boxed{\text{Etape n°2}}$ La largeur du grand rectangle, $16cm$ correspond à 2 fois la longueur de l'étiquette augmentée de 2 fois la largeur de l'étiquette. Comme 2 fois la longueur de l'étiquette mesure $2 \times 6cm = 12cm$, par différence, 2 fois la largeur de l'étiquette mesure $16cm - 12cm = 4cm$. **La largeur de l'étiquette est donc** $2cm$ $(2 = \frac{4}{2})$.
4. Ce problème fait appel à la notion de périmètre et plus précisément à la compétence "calculer le périmètre d'un polygone". La notion de périmètre d'un carré doit être utilisée dans les deux sens : "à partir du côté, déduire le périmètre", et "à partir du périmètre, déduire le côté" (évidemment, il faut savoir qu'un carré a ses côtés isomértiques).