# *Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet de Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes, La Réunion*

Denis Vekemans *

**Exercice 1**

1. Il est implicite que la recette totale provient uniquement des parts de flan pâtissier à $1,50$ €et des parts de tarte aux pommes à $2$ €.

   (a) Soit $x$ le nombre de parts à $1,50$ €vendues. Soit $y$ le nombre de parts à $2$ €vendues.

   On obtient alors le système d'équations linéaires suivant à deux équations et deux inconnues. La première équation traduit le nombre de parts vendues, la deuxième équation traduit la recette.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=72\ [(L_1)] \\ 1,5\times x+2\times y=122\ [(L_2)] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=72\ [(L_1)] \\ 0,5\times x=22\ [(-L_2+2\times L_1)] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=44 \\ y=28 \end{array}\right.$$

   Ainsi, la recette totale provient de $44$ parts de flan pâtissier à $1,50$ €et de $28$ parts de tarte aux pommes à $2$ €.

   (b) Si on avait vendu $72$ parts de tarte aux pommes, on aurait une recette de $72 \times 2$ €$= 144$ €.

   Cependant, par rapport à cela, pour chaque part de flan pâtissier vendue, on peut considérer que la recette est diminuée de $2$ €$-1,5$ €$= 0,5$ €.

   Ainsi, pour diminuer de $144$ €$-122$ €$= 22$ €, il faut considérer qu'on a vendu $22/0,5 = 44$ parts de flan pâtissier. Et, par conséquent, on a vendu $72 - 44 = 28$ parts de tarte aux pommes.

2. Une fois Jean-Marc servi, il reste $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de la tarte aux pommes ; Jean-Marc a eu $\frac{1}{3}$ de la tarte aux pommes. Après le passage de Sophie, il reste $(1-\frac{3}{8})\times\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$ ; Sophie a eu $\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$ de la tarte aux pommes. Antoine et Rémi se partageant le reste de façon équitable, ils ont donc chacun $\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$ de la tarte aux pommes.

   On peut vérifier que $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

**Questions complémentaires**.

1. Cette situation peut être proposée dès le cycle 2.

   Citons le document d'accompagnement des programmes : "Au cycle 2, les élèves entrent véritablement dans le monde des nombres, dans le cadre d'un apprentissage structuré. Ils commencent à construire ce qu'on appelle traditionnellement le sens des nombres et des opérations. Dans le prolongement des premières expériences rencontrées au cycle 1, c'est à ce moment de leur scolarité qu'ils prennent véritablement conscience du pouvoir que leur donnent les nombres pour résoudre des problèmes variés et qu'ils construisent les premières significations pour l'addition, la soustraction et la multiplication." La présente situation concerne l'opération "addition" : les pattes des poules et des lapins s'additionnent.

   Pour justifier que cette activité relève bien du cycle 2, on pourrait citer la compétence suivante concernant "problèmes résolus en utilisant une procédure personnelle", comme objectif visé : "Dans des situations où deux quantités (ou valeurs) sont "réunies", déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs)."

   Les nombres mis en jeu sont connus et manipulables dès la fin de cycle 1, mais la maîtrise de l'addition nécessaire et la gestion simultanée de nombreuses contraintes (le nombres de pattes des lapins et des poules) tout autant nécessaire font de cette situation un problème relevant du cycle 2.

2. - **L'élève A**. Il représente les 14 pattes par 14 "bâtons". Il fait 3 groupements de 4 pattes qu'il associe à 3 lapins et 1 groupement de 2 pattes qu'il associe à 1 poule. Il a ainsi restitué les 14 pattes. Il pose l'addition (le "-" n'est certainement pas là pour désigner une soustraction) $3 + 1$ en colonne et trouve 4 (résultat correct) qui correspond au nombre total de lapins et de poules.
     Il ne commet pas d'erreur. Il rédige une phrase de conclusion correcte.
   - **L'élève B**. Sur une première ligne, il représente les 4 têtes par 4 "bâtons" puis il représente les 14 pattes par 14 "bâtons". Il fait 2 groupements de 4 pattes qu'il associe à 2 lapins et 3 groupement de 2 pattes dont seuls 2 parmi les 3 sont associés à 2 poules. Il aurait ici dû se rendre compte qu'il avait 1 animal de trop et modifier son essai de "découpage" du 14 en conséquence.
     La suite est à détacher du problème (l'élève est sans doute fatigué) : il additionne en colonne 12 (qui correspond probablement au nombre de pattes associées à des têtes) et 4 (qui correspond sans doute au nombre d'animaux) pour obtenir 16 (résultat correct, mais interprêté comme un nombre d'animaux alors qu'il a probablement sommé des pattes et des animaux).
     La réponse exprimée est fausse bien que le calcul soit correct.
   - **L'élève C**. L'élève représente 3 lapins et 1 poule. Il additionne ensuite en ligne les pattes des lapins $4 + 4 + 4 = 8 + 4 = 12$ (sommation par paquets), puis en colonne celles des lapins et de la poule $12 + 2 = 14$. Il a donc 4 animaux pour 14 pattes.
     Il ne commet pas d'erreur. Il rédige une phrase de conclusion correcte.
   - **L'élève D**. Il représente les 14 pattes par 14 "bâtons". Il fait 7 groupements de 2 pattes qu'il associe à 7 poules. Il aurait ici dû se rendre compte qu'il avait 3 animaux de trop et modifier son essai de "découpage" du 14 en conséquence.
     La suite est à détacher du problème (l'élève est sans doute fatigué) : il représente 4 lapins (sans doute

parce qu'il veut 4 animaux et qu'il n'y arrive pas).

Il n'exprime pas de phrase de conclusion.

**Remarque** : dans les productions des élèves $A$ et $C$, on ne sait pas d'où provient le bon groupement 3 lapins et 1 poule, mais il se trouvent qu'ils justifient parfaitement le fait que ce groupement convient.

3. Pour les encadrés, ils doivent être divisés en deux parties :
   - la partie "brouillon" qui comme son nom l'indique sont "support pour essayer, ...". Cette partie est un écrit de type "recherche" ; elle ne doit pas forcément être formalisée.
   - la partie "rédaction de la solution". Cette partie est destinée à être communiquée et discutée ; elle doit être plus soignée.

   En accord avec cette réponse, on peut constater que dans les livrets d'évaluation autant CE2 que 6ème sont présents deux encadrés (un pour le brouillon et un pour la réponse) qui n'ont pas le même statut.

**Exercice 2**

1. On rappelle les formules suivantes :
   (a) le volume d'un parallélépipède rectangle de hauteur $h$, de largeur $l$ et de profondueur $p$ est
   $$l \times h \times p.$$
   (b) le volume d'une pyramide dont l'aire de la base est $B$ et dont la hauteur est $h$ est donnée par
   $$\frac{B \times h}{3}.$$

   Le volume $\mathcal{V}_{ABCDEFGH}$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est $8 \times 6 \times 3 = 144$ (en $m^3$).

   Le volume $\mathcal{V}_{ABCDS}$ de la pyramide $ABCDS$ est $\frac{8\times6\times x}{3} = 16 \times x$ (en $m^3$).

   Le volume $V(x)$ de la serre est alors donné par $V(x) = \mathcal{V}_{ABCDEFGH} + \mathcal{V}_{ABCDS}$ ou $V(x) = 144 + 16 \times x$ (en $m^3$).
2. $V(1,5) = 144 + 16 \times 1,5 = 168$. Lorsque $SK = 1,5m$, le volume de la serre est de $168m^3$.
3. $V(x) = 200 \iff 144 + 16 \times x = 200 \iff 16 \times x = 200 - 144 = 56 \iff x = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}$. Lorsque le volume de la serre est de $200m^3$, $SK = 3,5m$.

   *On note $S(x)$ la surface vitrée correspondant à $x$.*
4. Graphiquement, lorsque $x = 4,2m$, $S(x) = 160m^2$. Le graphique ne permet ici que d'obtenir un résultat approximatif.
5. Graphiquement, lorsque $S(x) \leq 150m^2$, $x \leq 3,2m$. Le graphique ne permet ici encore que d'obtenir un résultat approximatif.
6. Lorsque $x = 0$ la serre se réduit à un parallélépipède rectangle. Graphiquement, lorsque $x = 0m$, $S(x) = 132m^2$. Le graphique ne permet ici que d'obtenir un résultat approximatif.

   Par le calcul,

   l'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ de la face $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = 8 \times 6 = 48m^2$, l'aire $\mathcal{A}_{ADHE}$ de la face $ADHE$ est $\mathcal{A}_{ADHE} = 8 \times 3 = 24m^2$,

l'aire $\mathcal{A}_{DCGH}$ de la face $DCGH$ est $\mathcal{A}_{DCGH} = 6 \times 3 = 18m^2$,

l'aire $\mathcal{A}_{CBFG}$ de la face $CBFG$ est $\mathcal{A}_{CBFG} = 8 \times 3 = 24m^2$,

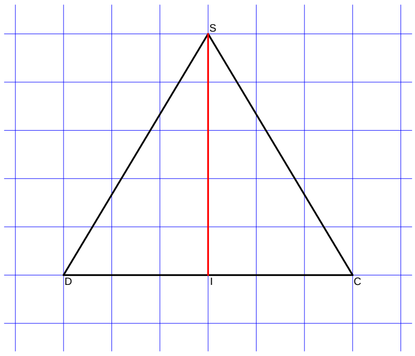
l'aire $\mathcal{A}_{BAEF}$ de la face $BAEF$ est $\mathcal{A}_{BAEF} = 6 \times 3 = 18m^2$.

Puis, $S(0) = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{ADHE} + \mathcal{A}_{DCGH} + \mathcal{A}_{CBFG} + \mathcal{A}_{BAEF} = 132m^2$.

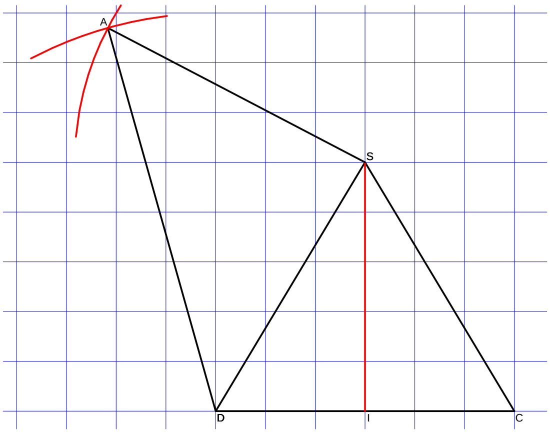
*A partir de maintenant, $x = 3$.*

7. Il est implicite que la pyramide est régulière (ou que $K$ soit à l'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$).
   - **Première façon d'obtenir la hauteur du triangle $SDC$**
     Le triangle $BCD$ est rectangle en $C$ (car $ABCD$ est un rectangle). Le théorème de Pythagore donne donc $BC^2 + CD^2 = BD^2$. Puis, $BD = \sqrt{6^2m^2 + 8^2m^2} = 10m$. Or $K$ est milieu de la diagonale $[BD]$, donc $KD = \frac{10m}{2} = 5m$.
     Le triangle $SKC$ est rectangle en $K$ (car $K$ est pied de la hauteur de la pyramide). Le théorème de Pythagore donne donc $SK^2 + KD^2 = SD^2$. Ensuite, $SD = \sqrt{3^2m^2 + 5^2m^2} = \sqrt{34}m$.
     De même, on obtiendrait $SC = \sqrt{34}m$.
     Le triangle $SDC$ est isocèle en $S$, soit $I$ le milieu du segment $[CD]$, puisque le triangle $SDC$ est isocèle en $S$, $I$ (qui est pied de la médiane issue de $S$) est aussi pied de la hauteur issue de $S$ du triangle $SDC$. Le triangle $SID$ est rectangle en $I$ (car $K$ est pied de la hauteur issue de $S$ du triangle $SDC$). Le théorème de Pythagore donne donc $SI^2 + ID^2 = SD^2$. Comme $I$ est le milieu du segment $[CD]$, $ID = \frac{6m}{2} = 3m$. Ensuite, $SI = \sqrt{\sqrt{34}^2m^2 - 3^2m^2} = 5m$.
   - **Deuxième façon d'obtenir la hauteur du triangle $SDC$**
     Soit $I$ le milieu du segment $[CD]$. Dans le triangle $CAD$, $I$ est le milieu du segment $[CD]$ et $K$ est le milieu du segment $[CA]$, donc, d'après le théorème des milieux, $KI = \frac{AD}{2} = \frac{8m}{2} = 4m$. Le triangle $SKI$ est rectangle en $K$ (car $K$ est pied de la hauteur de la pyramide). Le théorème de Pythagore donne donc $SK^2 + KI^2 = SI^2$. Puis, $SI = \sqrt{3^2m^2 + 4^2m^2} = 5m$.
     Enfin, puisque le triangle $SDC$ est isocèle en $S$ (car la pyramide est régulière), $I$ (qui est pied de la médiane issue de $S$) est aussi pied de la hauteur issue de $S$ du triangle $SDC$ et $SI$ est la hauteur issue de $I$ du rtiangle $SDC$.
   - ...
8. (a) Le quadrillage de la copie était composé de petits carreaux de $0,5cm$ de côté. On utilise des lettres capitales pour la figure en vraie grandeur et des lettres minuscules pour la figure à l'échelle 1 : 200.
      - $DC = 6m$. D'où $dc = \frac{6m}{200} = \frac{600cm}{200} = 3cm$ ($3cm$ ou 6 petits carreaux).
      - $(SI) \perp (DC)$. D'où $(si) \perp (dc)$ (une réduction conserve les angles).
      - $SI = 5m$. D'où $si = \frac{5m}{200} = \frac{500cm}{200} = 2,5cm$ ($2,5cm$ ou 5 petits carreaux).

   (b) $DA = 8m$. D'où $da = \frac{8m}{200} = \frac{800cm}{200} = 4cm$ ($4cm$ ou 8 petits carreaux).
      - On trace le cercle $\gamma_1$ de centre $s$ de rayon $sd$ ; le point $a$ est sur ce cercle car le triangle $sad$ est isocèle en $s$ puisque la pyramide est régulière.




- On trace le cercle $\gamma_2$ de centre $d$ de rayon $4cm$ (ou 8 petits carreaux) ; le point $a$ est sur ce cercle car $da = 4cm$.
- A l'une des intersection des cercles $\gamma_1$ et $\gamma_2$, on définit le point $a$.




## Exercice 3

1. Le quadrillage de la copie peut être utilisé
   - pour construire le segment $[AC]$ de $15cm$,
   - pour construire le milieu $O$ du segment $[AC]$,
   - pour tracer la perpendiculaire $d$ à la droite $(AC)$ passant par $O$,

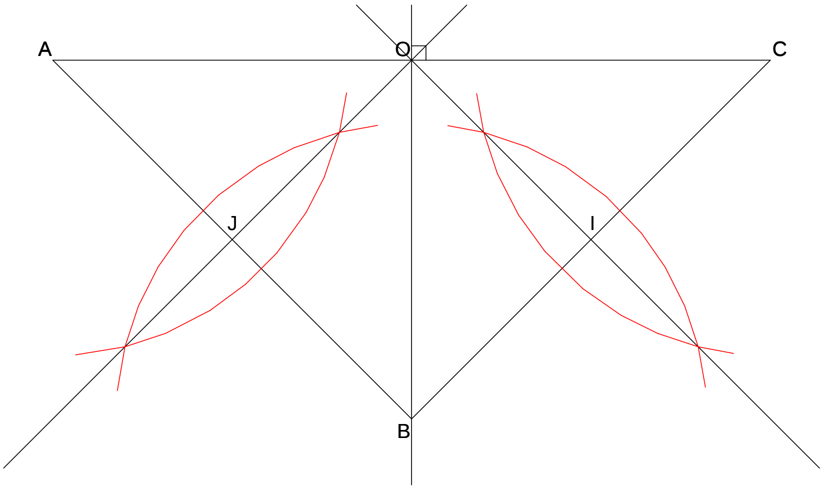
     *Remarque* : le triangle $ABC$ étant isocèle en $B$, la droite $(OB)$ est médiane, hauteur, ... et est donc perpendiculaire à la droite $(AC)$.
   - pour construire le segment $[OB]$ de $7,5cm$ (avec $B$ sur la droite $d$).

     *Remarque* : on a $OA = OB = OC$ car $O$ est milieu de l'hypoténuse du triangle $ABC$ rectangle en $B$ et est donc centre du cercle circonscrit à ce triangle.
   - On trace alors les segment $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$.

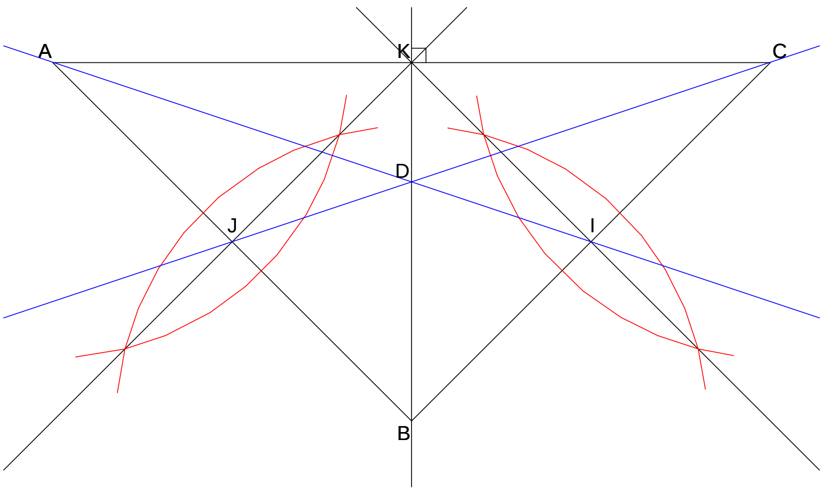
   On suppose les points $A$, $B$, $C$, $O$, les segment $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$ déjà placés puis on explique la construction du reste de la figure et enfin, on la contruit.

   Nota bene : sur la figure, le quadrillage n'est pas reporté !
   - Soit $\Gamma$ le cercle de centre $B$ de rayon $r$ ($r$ est choisi strictement plus grand que $\frac{AB}{2}$).
   - Soit $\Gamma_1$ le cercle de centre $A$ de même rayon $r$.

- Soit $\Gamma_2$ le cercle de centre $C$ de même rayon $r$.
- Les cercles $\Gamma$ et $\Gamma_1$ se coupent en deux points distincts $M_1$ et $N_1$. On appelle $J$ l'intersection des droites $(M_1N_1)$ et $(AB)$. $J$ est milieu du segment $[AB]$.
- Les cercles $\Gamma$ et $\Gamma_2$ se coupent en deux points distincts $M_2$ et $N_2$. On appelle $I$ l'intersection des droites $(M_2N_2)$ et $(BC)$. $I$ est milieu du segment $[BC]$.




2. (a) L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle $ABC$ est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \times OB}{2} = \frac{15cm \times 7{,}5cm}{2} = 56,25cm^2$ (car $(AC) \perp (OB)$).
   (b) L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle $ABC$ est aussi $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$ (car $(AB) \perp (BC)$). Et, l'aire $\mathcal{A}_{AIC}$ du triangle $AIC$ est aussi $\mathcal{A}_{AIC} = \frac{AB \times IC}{2}$ (toujours car $(AB) \perp (BC)$). Or $I$ est milieu du segment $[BC]$, donc $IC = \frac{BC}{2}$ et $\mathcal{A}_{AIC} = \frac{AB \times IC}{2} = \frac{AB \times \frac{BC}{2}}{2} = \frac{AB \times BC}{4} = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{2} = \frac{56{,}25cm^2}{2} = 28,125cm^2$.
3. $O = K$.




   (a) Dans le triangle $ABC$, $[CJ]$ est une médiane car $J$ est milieu du segment $[AB]$, $[AI]$ est une médiane car $I$ est milieu du segment $[BC]$. Ainsi, $D$ est intersection de deux médianes et donc centre de gravité du triangle $ABC$. Comme les médianes d'un triangle sont concourantes, on a $B$, $D$ et $K$ alignés (car $K$ étant milieu du segment $[AC]$, $[BK]$ est aussi une médiane du triangle $ABC$).

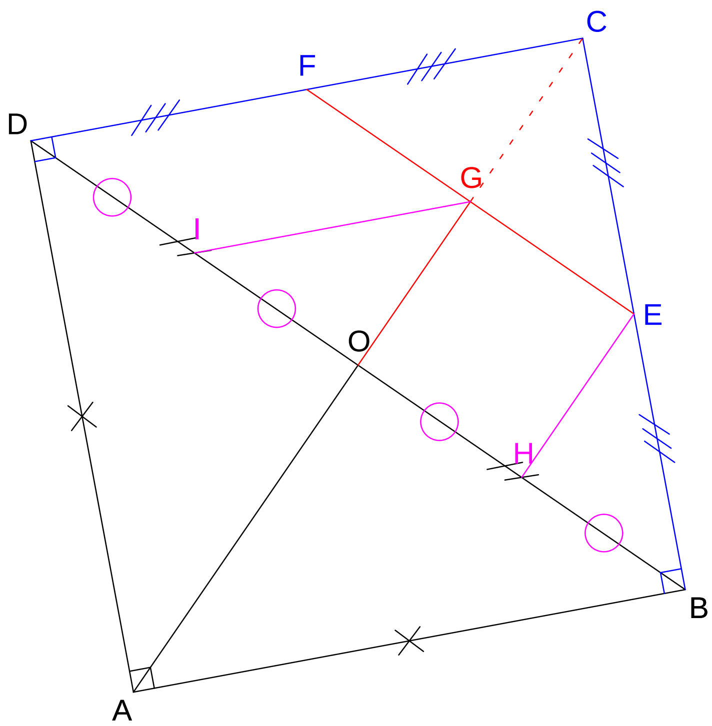
(b) Comme propriété de la médiane, on a, de plus, $KD = \frac{KB}{3} = \frac{7{,}5cm}{3} = 2,5cm$.

(c) On a déjà vu que $(KB) \perp (AC)$, donc comme $B$, $D$ et $K$ sont alignés, $(KD) \perp (AC)$. Il s'ensuit que l'aire $\mathcal{A}_{ADC}$ est $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{AC \times KD}{2} = \frac{15cm \times 2{,}5cm}{2} = 18,75cm^2$.

(d) L'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ du quadrilatère $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{ADC} = 56,25cm^2 - 18,75cm^2 = 37,5cm^2$.

**Questions complémentaires.**

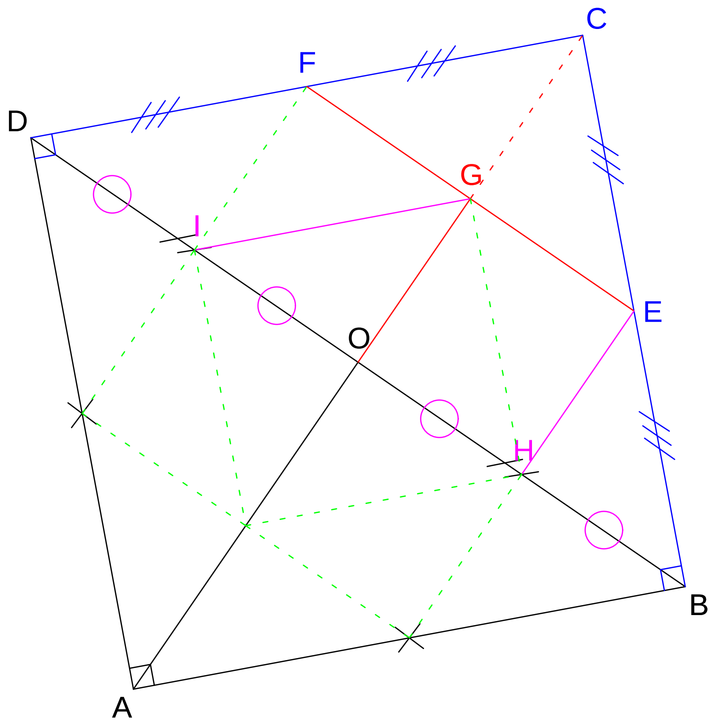
1. Une grande part d'implicite dans la description de la figure : qu'est-ce qu'un tangram ? Pour une définition sans équivoque, on décrit le tangram suivant :




- $ABCD$ est un carré.
- $O$ est milieu du segment $[BD]$.
- $E$ est milieu du segment $[BC]$.
- $F$ est milieu du segment $[CD]$.
- $G$ est l'intersection des droites $(CO)$ et $(EF)$.
- $H$ est milieu du segment $[OB]$.
- $I$ est milieu du segment $[OD]$.

(a) Première procédure. Décomposition des figures en sous-figures ayant toutes la même aire (ici des triangles de type $T$) et comparaison des mesures d'aires.

Utiliser le triangle de type $T$ (soit $T = E$, soit $T = G$) comme sous-unité, décomposer les figures $A$, $B$, $C$, $D$ et $F$ en triangles de type $T$ (c'est-à-dire isométriques à $T$), puis compter le nombre de triangles de type $T$ qui décomposent chaque figure.




Ensuite, dresser un tableau pour pouvoir comparer les aires des différentes figures :

| figure | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre de triangles de type $T$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Et enfin, conclure en comparant les mesures : les figures $E$ et $G$ ont même aire ; les figures $C$, $D$ et $F$ ont même aire ; et les figures $A$ et $B$ ont même aire.

Deuxième procédure. Tri des aires.

Les figures $A$ et $B$ ont même aire (car elles sont superposables). Ce sont les figures ayant la plus grande aire (car les autres figures peuvent s'inclure entièrement et strictement dedans).

Les figures $E$ et $G$ ont même aire (car elles sont superposables). Ce sont les figures ayant la plus petite aire (car elles peuvent s'inclure entièrement et strictement dans les autres figures).

Il reste à comparer les aires des figures $F$, $D$ et $C$.

En découpant par exemple le carré $F$ selon l'une de ses diagonales, on obtient deux pièces, qui, bien disposées, permettent de paver tantôt la figure $D$, tantôt la figure $C$. Ces figures $F$, $D$ et $C$ ont donc même aire car elles se décmoposent toutes les trois en deux mêmes pièces.

Remarque. Ces deux procédures sont bien distinctes !

(b) Les figures $C$, $D$ et $F$ ont même aire sans être superposable, ce qui explique qu'un élève pourrait ne pas voir que ces trois figures ont même aire.

Pour l'aider méthodologiquement ...

- "Pour montrer que deux figures ont même aire, tu peux découper les figures (soit réellement avec des ciseaux, soit fictivement par un (ou des) trait(s)) de façon à voir qu'elles sont constituées de parties superposables deux à deux." (sans dire comment il faut réaliser ce découpage).

- "Peux-tu découper le carré $F$ en deux triangles isométriques ?" (sans dire qu'on peut aussi le faire pour le triangle $D$ et le parallélogramme $C$).

(c) Trace écrite.

i. Deux figures superposables ont même aire.

ii. Deux figures non superposables peuvent avoir même aire. Par exemple, quand deux figures sont composées de sous-figures superposables deux à deux (une sous-figure de la première figure avec une sous-figure de la deuxième figure), elles auront même aire.[1]

2. (a) En reprenant la première procédure ...

On remarque que la figure $T$ peut être décomposée en une figure de type $F$ et en une figure de type $E$ ou $G$.

On remarque que la figure $T$ peut être décomposée en une figure de type $D$, en une figure de type $C$ et en une figure de type $E$ ou $G$.

On remarque que la figure $T$ peut être décomposée en une figure de type $A$ ou $B$, en une figure de type $C$ et en une figure de type $F$.

Et on complète alors le tableau ...

| figure | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $T$ | $V$ | $W$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre de triangles de type $T$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | $2+1$ $=3$ | $2+2+1$ $=5$ | $4+2+2$ $=8$ |

(b) Au vu de la question, les auteurs du sujet voulaient peut-être que l'on passe par des fractions de $u$ précédemment, bien que ce ne soit pas nécessaire. On a déjà choisi une unité d'aire (à savoir, le triangle de type $T$) où les aires s'expriment en nombres entiers. La deuxième ligne et la troisième ligne du tableau sont **proportionnelles**.

| figure | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | tangram |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre de triangles de type $T$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 16, le total |
| aire en fraction de $u$ | $\frac{4}{16}$ $=\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{16}$ $=\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{16}$ $=\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{16}$ $=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ $=\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ $=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ $=\frac{1}{16}$ | 1 |

| figure | $T$ | $V$ | $W$ |
|---|---|---|---|
| nombre de triangles de type $T$ | 3 | 5 | 8 |
| aire en fraction de $u$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{8}{16}$ $=\frac{1}{2}$ |

[1] Remarque : ce n'est pas obligatoire qu'on puisse décomposer deux figures avec des pièces superposables pour qu'elles aient même aire (voir à ce sujet l'exercice 2 du sujet CRPE 2007 du groupe I où l'aire grisée est égale à l'aire du triangle sans qu'on puisse décomposer la surface grisée et le triangle avec des pièces superposables).