Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet de Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. Si a et b sont entiers naturels, $RDE(a, b)$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b et $QDE(a, b)$ désigne le quotient de la division euclidienne de a par b.
   - $5+7+9 = 21$, $RDE(21, 6) = 3$ (en effet, $21 = 3 \times 6 + 3$), $RDE(21, 3) = 0$ (en effet, $21 = 7 \times 3 + 0$) ;
   - $15+17+19 = 51$, $RDE(51, 6) = 3$ (en effet, $51 = 8\times6+3$), $RDE(51, 3) = 0$ (en effet, $51 = 17\times3+0$) ;
   - $1527 + 1529 + 1531 = 4587$, $RDE(4587, 6) = 3$ (en effet, $4587 = 764 \times 6 + 3$), $RDE(4587, 3) = 0$ (en effet, $4587 = 1529 \times 3 + 0$).
2. Les trois entiers impairs consécutifs sont notés $2 \times k + 1$, $2 \times k + 3$, $2 \times k + 5$. La somme de ces trois entiers est $N = 6 \times k + 9$.
   (a) $N = 6 \times k + 9 = 6 \times (k + 1) + 3$ puis $QDE(N, 6) = k + 1$ et $RDE(N, 6) = 3$ (le reste est bien inférieur strictement au diviseur).
   (b) $N = 6 \times k + 9 = 3 \times (2 \times k + 3)$ puis $QDE(N, 3) = 2 \times k + 3$ et $RDE(N, 3) = 0$ (le reste est bien inférieur strictement au diviseur).
3. Les trois entiers impairs consécutifs sont notés $2 \times k + 1$, $2 \times k + 3$, $2 \times k + 5$. La somme de ces trois entiers est $N = 6\times k+9$. $N = 6\times k+9 = 12027 \Longrightarrow 6\times k = 12027-9 = 12018 \Longrightarrow k = \frac{12018}{6} = 2003$. Les trois entiers impairs consécutifs sont $2\times2003+1 = 4007$, $2\times2003+3 = 4009$, $2\times2003+5 = 4011$.
4. On suppose p entier naturel non nul.
   - 1 entier impair n'est pas forcément multiple de 5 (contre-exemple : 1) ;
   - une somme de 2 entiers impairs consécutifs n'est pas forcément multiple de 5 (contre-exemple : $1 + 3 = 4$) ;
   - une somme de 3 entiers impairs consécutifs n'est pas forcément multiple de 5 (contre-exemple : $1 + 3 + 5 = 9$) ;

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

- une somme de 4 entiers impairs consécutifs n'est pas forcément multiple de 5 (contre-exemple : $1+3+5+7=16$) ;
- mais une somme de 5 entiers impairs consécutifs est toujours multiple de 5. En effet, si les cinq entiers impairs consécutifs sont notés $2\times k+1$, $2\times k+3$, $2\times k+5$, $2\times k+7$, $2\times k+9$. La somme de ces cinq entiers est $N=10\times k+25$. $N=10\times k+25=5\times(2\times k+5)$ d'où N est multiple de 5. La plus petite valeur de p possible est 5 car 5 répond à la condition et ni 1, ni 2, ni 3, ni 4 ne répondent à la condition.

Questions complémentaires

1. *Phase 1* : Qu'en est-il d'une procédure d'élève ?

   HYPOTHESE 1. Probablement, l'élève va disposer librement 3, 4 ou 5 bâtonnets dans chaque boîte mise à sa disposition (au hasard ou de façon réfléchie) ...

   De deux choses l'une,
   – soit sa proposition remplit les conditions imposées et dans ce cas, il doit la valider,
   – soit sa proposition ne remplit pas les conditions imposées (il lui reste des bâtonnets à répartir, une boîte contient moins de 2 (au sens large) ou plus de 5 (au sens large) bâtonnets, ...) et dans ce cas, il doit prendre en compte son essai pour essayer de le corriger ...

   HYPOTHESE 2. L'élève dispose les boîtes en cercle et distribue les bâtonnets 1 par 1 dans les boîtes en tournant toujours dans le même sens jusqu'à avoir épuisé tous les bâtonnets.

   Le terme "objectifs" dans l'énoncé n'est pas clair : les auteurs du sujet attendent-t-il
   – des objectifs disciplinaires ? Des compétences de cycle 2 à acquérir : ...
   – des objectifs transversaux ? Le rôle du travail en groupe, le rôle de la vérification, ...
   – des objectifs de la phase 1 relatifs à la séance ? Préparer la phase 2 ! Là, probablement "non", à la lecture de la question 3.

   Le livre d'accompagnement des programmes de cycle 2 donne comme compétences mobilisables lors de la résolution de problème :

   (a) faire des hypothèses et les tester ;
   (b) élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;
   (c) organiser par un raisonnement différentes étapes d'une résolution ;
   (d) vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ;
   (e) formuler une réponse dans les termes du problème ;
   (f) expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter.

   Comme objectifs de la phase 1, on peut poser :

   (a) faire des hypothèses et les tester (c'est-à-dire tâtonner) ;
   (b) élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle (c'est-à-dire revenir sur des essais infructueux, par exemple).

2. • Le fait que les **objets** mis en jeu (bâtonnets, boîtes, ...) soient **manipulables** a bien entendu un effet sur les procédures des élèves : sur papier, la situation devrait être schématisée, ce qui la rend moins facile à comprendre (valider ou invalider une proposition n'est plus aussi visuel, revenir sur un essai infructueux entraîne des ratures, ...).
   • Le fait que le **nombre de boîtes** soit **imposé par la consigne** constitue aussi une aide appréciable : à partir d'un essai infructueux, l'élève ne sera pas tenté de rajouter une boîte, mais seulement de déplacer certains bâtonnets.

   Remarque. Le fait que 3, 4 et 5 soient des entiers successifs est aussi facilitateur. L'activité serait différente avec des boîtes qui ne doivent contenir que 1, 3 ou 6 bâtonnets. La procédure évoquée par l'hypothèse 2 ne serait plus pertinente dans ce cas.
3. Le rôle de la première phase est de **permettre aux élèves de s'approprier la situation**, de façon à ce qu'ils prennent conscience de toutes les contraintes de l'énoncé (le nombre de boîtes et le nombre de bâtonnets sont imposés).
4. Procédure pour la phase 2.
   (a) Procédure par imitation schématique de ce qui a été réalisé dans la phase 1.

   L'élève peut rester très proche de ce qu'il a fait dans la phase 1 et se contenter de remplacer la manipulation matérielle par des schématisations. Par exemple,
   – les bâtonnets seront par exemple des bâtons,
   – les boîtes seront peut-être symbolisées par des cercles destinés à entourer les bâtons par 3, 4 ou 5,
   – puis, les actions comme "déplacer un bâton d'une boîte à une autre" seront peut-être réalisées par des flèches (avec ou sans raturage),
   – ...

   (b) Procédure par recherche d'une décomposition additive du nombre de bâtonnets en k parties (k désignant le nombre de boîtes).

   L'élève qui a pris un peu de recul par rapport à l'activité de la phase 1 et qui aura fait le lien entre la disposition des bâtonnets dans les boîtes et l'écriture additive associée (ce passage lors de la première phase est loin d'être évident) pourra éviter la schématisation et chercher une décomposition additive adéquate (d'une écriture additive "test", la travailler jusqu'à ce qu'elle ne contienne que des 3, des 4 ou des 5).

   C'est le cas de la procédure élaborée par Hubert (voir question suivante).
5. L'écriture "test" de 31 de laquelle il part est : $5+5+5+5+5+5+1=31$.

   Cette écriture comporte un "1", elle ne convient donc pas. Il la manipule en transférant un bâtonnet du troisième terme (troisième boîte ?) au dernier (à la dernière boîte ?), mais avant de finir sa ligne, il se rend compte que l'écriture comportera un "2" et ne conviendra donc pas non plus. Il décide alors de transférer un deuxième bâtonnet du sixième terme (sixième boîte ?) au dernier (à la dernière boîte ?) et obtient l'écriture $5+5+4+5+5+4+3=31$ qui répond aux exigences de l'énoncé.

   La procédure qu'il utilise est correcte, menée avec adresse et assez pertinente.

Exercice 2

1. $ABCD$ est un carré de côté a, il a donc ses côtés de même longueur. I est milieu du segment $[AB]$, donc $AI = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ et K est milieu du segment $[CD]$, donc $CK = KD = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.
   $ABCD$ est un carré, il a donc ses côtés opposés parallèles et par conséquent $(AB)//(DC)$ ou $(IB)//(DK)$.
   Le quadrilatère $BKDI$ est convexe et a ses côtés opposés $[IB]$ et $[DK]$ parallèles et de même longueur, donc $\boxed{\text{le quadrilatère } BKDI \text{ est un parallélogramme}}$.
   $ABCD$ est un carré, donc l'angle $\widehat{DAI}$ est droit et le triangle DAI est rectangle en A. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle DAI, on obtient $DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5\times a^2}{4}$. Enfin, $DI = \sqrt{\frac{5\times a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a$. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur, donc $\boxed{DI = BK = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a}$. Pour rappel, $\boxed{IB = DK = \frac{a}{2}}$.
2. Début de parenthèse "(". Si on avait voulu montrer que le quadrilatère $EFGH$ était un carré, il suffisait, par exemple de montrer que la figure, puis le quadrilatère $EFGH$, étaient stables par rotation de centre O et d'angle 90° ... En effet, le seul quadrilatère stable par rotation de 90° est le carré. Fin de parenthèse ")".
   (a) On a déjà $DI = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a$.
   Le théorème de la hauteur dans triangle DAI rectangle en A (qui s'obtient par exemple en calculant de deux manières différentes l'aire du triangle DAI) donne $AF \times DI = DA \times AI$ (AF est une hauteur car d'après les hypothèses, $EFGH$ est un carré, puis $(AF) \perp (DI)$) puis $AF = \frac{DA\times AI}{DI} = \frac{a\times\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times a$.
   Dans le triangle ABG, I est milieu du segment $[AB]$ et $(IF)//(BG)$ (car les côtés $[DI]$ et $[BK]$ du parallélogramme $BKDI$ sont parallèles), donc par la réciproque du théorème des milieux, F est milieu du segment $[AG]$. Puis, $AF = FG = \frac{\sqrt{5}}{5} \times a$.
   Pour calculer AJ, on procède comme à la question 1. $ABCD$ est un carré, donc l'angle $\widehat{ABJ}$ est droit et le triangle ABJ est rectangle en B. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABJ, on obtient $AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5\times a^2}{4}$. Puis, $AJ = \sqrt{\frac{5\times a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a$.
   Pour conclure, on a $\frac{5}{2} \times FG = \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times a = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a = AJ$ ou $\boxed{AJ = \frac{5}{2} \times FG}$.
   (b) $\boxed{\frac{FG}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\times a}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$.
   L'aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ du carré $ABCD$ est donnée par $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = a^2$.
   L'aire $\mathcal{A}_{EFGH}$ du carré $EFGH$ est donnée par $\mathcal{A}_{EFGH} = FG^2 = (\frac{\sqrt{5}}{5} \times a)^2 = \frac{a^2}{5}$.
   Puis, $\boxed{\frac{\mathcal{A}_{EFGH}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{5}}{a^2} = \frac{1}{5}}$.
3. (a) Pour calculer BG, on procède comme à la question 2(a). Le théorème de la hauteur dans triangle ABJ rectangle en B (qui s'obtient par exemple en calculant de deux manières différentes l'aire du triangle ABJ) donne $BG \times AJ = AB \times BJ$ (BG est une hauteur car d'après les hypothèses, $EFGH$ est un carré, puis $(BG) \perp (AJ)$) puis $BG = \frac{AB\times BJ}{AJ} = \frac{a\times\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times a$.

Comme $EFGH$ est un carré, on a $EF = FG = \frac{\sqrt{5}}{5} \times a$.

De plus, comme $BKDI$ est un parallélogramme, ses côtés opposés $[DI]$ et $[KB]$ sont parallèles, puis $(EF)//(GB)$.

Le quadrilatère $EFBG$ est convexe et a ses côtés opposés $[EF]$ et $[GB]$ parallèles et de même longueur, donc $\boxed{\text{le quadrilatère } EFBG \text{ est un parallélogramme}}$.

Il s'ensuit que les diagonales du parallélogramme $EFBG$ se coupent en leur milieu qui est M puisque M est défini comme le milieu du segment $[FG]$. Donc, M est aussi milieu du segment $[EB]$, et $\boxed{\text{les points } E,\ M \text{ et } B \text{ sont alignés}}$.

(b) Cette construction peut être réalisée avec la règle seule car

- la droite (EB) va couper la droite (FG) en M milieu du segment $[FG]$ (voir question 3(a)) et va couper la droite (FC) en P,
- de même, la droite (FC) va couper la droite (GH) en N milieu du segment $[GH]$ et va couper la droite (GD) en Q,
- de même, la droite (GD) va couper la droite (HE) en U milieu du segment $[HE]$ et va couper la droite (HA) en R,
- et de même, la droite (HA) va couper la droite (EF) en V milieu du segment $[EF]$ et va couper la droite (EB) en S,

pour obtenir un nouveau carré $PQRS$. $\boxed{\text{Seule la règle non graduée est nécessaire}}$ car les points utiles sont tous définis comme des intersections de droites.

(c) De même que dans la question 2(b), on montrerait que $\boxed{\frac{PQ}{FG} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$. Puis, $\frac{PQ}{AB} = \frac{PQ}{FG} \times \frac{FG}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}$. Et, enfin, comme $AB = a$, $\boxed{PQ = \frac{a}{5}}$.

Exercice 3

1. $1\mathcal{L} = 1000cm^3$. Soit x la troisième dimension en centimètres. Le volume de lait en centimètres cubes est $1000 = 19 \times 9,4 \times x$. D'où $x = \frac{1000}{19 \times 9,4} \approx 5,599$ que l'on approche par $5,6$ par excès à $0,1$ près.

   La troisième dimension du brick est donc approximativement de $5,6cm$ à $1mm$ près par excès.

2. (a) $1\mathcal{L} = 1000cm^3$. Soit y la mesure du côté de la base carrée en centimètres. Le volume de jus d'orange en centimètres cubes est $1000 = 20 \times y^2$. D'où $y = \sqrt{\frac{1000}{20}} \approx 7,071$ que l'on approche par $7,1$ par excès à $0,1$ près.

   La longueur du côté du carré à la base du brick est donc approximativement de $7,1cm$ à $1mm$ près par excès.

   (b) La fonction donnant le volume du brick en fonction de sa hauteur est linéaire (si V est le volume du brick en centimètres cubes, alors $V = h \times y^2$ où h est la hauteur du brick en centimètres). Ainsi, pour augmenter le volume du brick de 20%, il suffit d'augmenter sa hauteur de 20% (propriété dite de la proportionnalité des écarts d'une fonction linéaire). La nouvelle hauteur doit donc être de $1,2 \times 20cm = 24cm$.

3. $1\mathcal{L} = 1dm^3 = 1000cm^3$.

Soient x, y et z les trois dimensions du brick en centimètres. Le volume du brick en centimètres cubes est donc $1000 = x \times y \times z$.

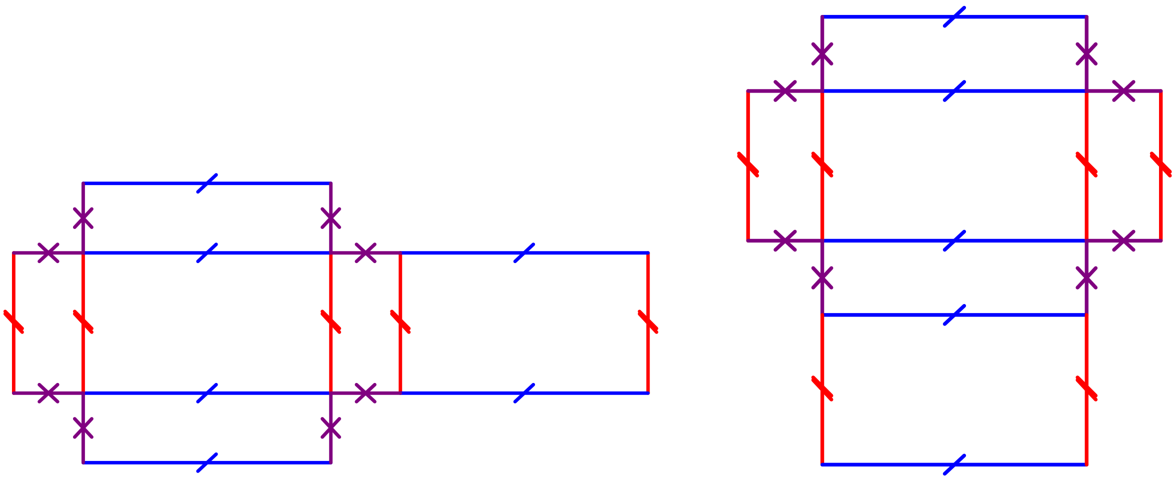
x, y et z sont donc des diviseurs de 1000 supérieurs à 3. Les diviseurs de 1000 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000 (on obtient cette liste de diviseurs à partir de la décomposition de 1000 en produit de facteurs premiers : $1000 = 2^3 \times 5^3$).

En organisant sa recherche des écritures multiplicatives, on obtient :

- $4 \times 5 \times 50$; $4 \times 50 \times 5$; $5 \times 4 \times 50$; $5 \times 50 \times 4$; $50 \times 4 \times 5$; $50 \times 5 \times 4$;
- $4 \times 10 \times 25$; $4 \times 25 \times 10$; $10 \times 4 \times 25$; $10 \times 25 \times 4$; $25 \times 4 \times 10$; $25 \times 10 \times 4$;
- $5 \times 5 \times 40$; $5 \times 40 \times 5$; $40 \times 5 \times 5$;
- $5 \times 8 \times 25$; $5 \times 25 \times 8$; $8 \times 5 \times 25$; $8 \times 25 \times 5$; $25 \times 5 \times 8$; $25 \times 8 \times 5$;
- $5 \times 10 \times 20$; $5 \times 20 \times 10$; $10 \times 5 \times 20$; $10 \times 20 \times 5$; $20 \times 5 \times 10$; $20 \times 10 \times 5$;
- $10 \times 10 \times 10$.

Remarque : il n'est pas dit si l'on doit considérer que les écritures $4 \times 5 \times 50$ et $4 \times 50 \times 5$ sont les mêmes.

4. Deux patrons ...



Questions complémentaires

1. Le vocabulaire de la géométrie dans l'espace (et de la géométrie plane) est sous-jacent à cette activité de type "jeu du portrait".

   En effet, des phrases qui peuvent être utilisées sont ...

   - "Est-ce un polyèdre ?". Le terme "polyèdre" doit être maîtrisé au niveau du sens en fin de cycle 3.
   - "Est-ce un cube ?", "Est-ce un pavé droit ?", ... La dénomination de certains polyèdre devrait être acquise en fin de cycle 3 pour des solides simples tels que le cube, le pavé droit.
   - "A-t-il six faces ?", "A-t-il huit sommets ?" Utiliser des propriétés des figures fait également appel au vocabulaire de la géométrie dans l'espace. Les termes "face" et "arête" doivent être maîtrisé par les élèves en fin de cycle 3.

- "A-t-il une face carrée ?", "A-t-il une face triangulaire ?", ... Le vocabulaire de la géométrie plane peut également être utilisé dans ce "jeu du portrait" pour décrire certaines faces.
- ...

L'élève qui pose une question doit utiliser le vocabulaire géométrique, et l'élève qui répond doit avoir compris le sens de cette question et donc le vocabulaire utilisé. Le "jeu du portrait" permet ainsi de donner du sens au vocabulaire utilisé.

2. (a)
   - La compétence "construire un solide". Par les manipulations des cartons, l'élève est amené à construire un solide à partir de ses faces.
   - La compétence "reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle". Les dépliages du cube formé permettent de donner du sens au patron (empreintes de faces accolées par un côté commun) et de créer aussi des images anticipatrices : l'élève qui démonte puis remonte un solide à partir de ses faces pourra plus facilement imaginer le repliage d'un patron rendant la manipulation superflue.

   (b) Il est important de construire un cube à partir de ses arêtes (par exemple avec des tiges) tout comme il est important de construire un cube à partir de ses faces (par exemple avec des cartons) : cela donne deux approches différentes du cube et permet que l'élève ne se cantonne ni à observer les propriétés des arêtes, ni à observer celles des faces.

   Après l'Ecole, au Collège/Lycée, on distinguera même des notions de parallélisme ou d'orthogonalité selon qu'elles concernent des droites (arêtes de polyèdres) ou des plans (faces de polyèdres).

   Une visite préalable des notions d'"arête" et de "face" est initiée à l'école et ces notions sont distinguées (tiges ou cartons). La préparation au travail de Collège/Lycée est un engagement de l'Ecole.