

Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2011 du sujet du PG2

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. L'affirmation 1 est fausse !

Temps de parcours des 50 premiers kilomètres : $t = 50km/(25km/h) = 2h$.

Temps de parcours des 50 derniers kilomètres : $t = 50km/(15km/h) = 3h20min$.

Vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours : $V = 100km/(2h + 3h20min) = 75/4km/h$.

2. L'affirmation 2 est vraie !

Un nombre à 3 chiffres identiques en base 10 s'écrit

$$\begin{aligned}\overline{aaa} &= 100 \times a + 10 \times a + a \\ &= 111 \times a \\ &= 3 \times 37 \times a,\end{aligned}$$

et est donc divisible par 37 (et par 3).

3. L'affirmation 3 est fausse !

5 et 15, par exemple sont impairs, mais leur *PGCD* étant de 5, ils ne sont pas premiers entre eux.

4. L'affirmation 4 est vraie !

En effet,

$$\begin{aligned}(9 - 4 \times \sqrt{5}) \times (9 + 4 \times \sqrt{5}) &= 9^2 - 4^2 \times \sqrt{5}^2 \\ &= 81 - 16 \times 5 \\ &= 1.\end{aligned}$$

5. L'affirmation 5 est vraie !

Longueur du trait pointillé : $\pi \times AB/2$. Longueur du trait pointillé : $\pi \times AI/2 + \pi \times IB/2 = \pi \times (AI + IB)/2 = \pi \times AB/2$.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

6. L'affirmation 6 est fausse !

La population sera multipliée par $1,2^5 = 2,488\,32$ au bout de $5h$.

Remarque : selon le principe de "qui peut le plus, peut le moins", la réponse à cette question peut aussi bien être "l'affirmation 6 est vraie" car si la population est multipliée par $2,488\,32$, elle est multipliée au moins par 2.

Exercice 2 $f(v) = k \times v^2$.

v en m/s ; $f(v)$ en m .

PARTIE 1

1. (a) Dans la cellule $B2$: " $= \$B\$3 \star B1 \wedge 2$ ".
 (b) Oui, la formule proposée satisfait la nouvelle contrainte : l'adressage $B1$ est relatif, l'adressage $\$B\3 est absolu.
2. (a) $72km/h = 72\,000m/3\,600s = 20m/s$.
 La distance de freinage sur route sèche est donc de $0,08 \times 20^2m = 32m$.
 (b) Soit v_0 cette vitesse en m/s .
 $0,08 \times v_0^2 > 45m$ ou $v_0 > \sqrt{562,5}m/s$ ou $v_0 > \sqrt{562,5}(km/1000)/(h/3600) = 3,6 \times \sqrt{562,5}m/s$.
 Arrondi à l'unité en km/h , cela donne $v_0 > 85km/h$.

PARTIE 2

1. Par lecture graphique, on a $f(30) = 144$.
 Or, $f(30) = k \times 30^2 = k \times 900$.
 Ceci donne $k = 144/900 = 0,16$.
2. On admet que la valeur de k sur route mouillée est $0,16$ (voir question 1).
 Soit M un point de la courbe représentative de la fonction $f_{\text{mouillée}}$ (qui a v associe $0,16 \times v^2$) : M est de coordonnées $(v; 0,16 \times v^2)$ dans le repère orthogonal choisi.
 Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses : N est de coordonnées $(v; 0)$ dans le repère choisi.
 Alors, N , le milieu du segment $[HM]$, est un point de la courbe représentative de la fonction $f_{\text{sèche}}$ (qui a v associe $0,08 \times v^2$) : en effet, N est de coordonnées $(v; (0 + 0,16 \times v^2)/2)$ ou $(v; 0,08 \times v^2)$ dans le repère choisi.
Remarque : on obtient la courbe représentative de la fonction $f_{\text{sèche}}$ à partir de celle de $f_{\text{mouillée}}$ par une affinité d'axe des abscisses relativement à l'axe des ordonnées, de rapport $\frac{1}{2}$.

PROBLÈME

PARTIE A Le triangle OAB est équilatéral (en effet, il est isocèle en O car $OA = OB = r$ et l'angle en O de ce triangle est de $360^\circ/6 = 60^\circ$).

Ainsi, la hauteur $[OH]$ de ce triangle est aussi médiane et $AH = HB = AB/2 = r/2$.

Dans le triangle OHA , rectangle en H , l'application du théorème de Pythagore donne $HO^2 + HA^2 = OA^2 = r^2$, puis $HO = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = \frac{\sqrt{3} \times r}{2}$.

L'aire du triangle OAB est donc $AB \times OH/2 = \frac{\sqrt{3} \times r^2}{4}$.

Et l'aire de l'hexagone régulier est, par conséquent, de $6 \times \frac{\sqrt{3} \times r^2}{4} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times r^2}{2}$.

PARTIE B

1. Le volume de l'écrou est égal au volume du prisme droit à base hexagonale de rayon (ou de côté, voir PARTIE A) $18,9\text{mm}/2 = 9,45\text{mm}$ diminué du volume du cylindre de rayon $10\text{mm}/2 = 5\text{mm}$, tous deux étant de hauteur 8mm .

Ainsi, le volume de l'écrou est $\left(\frac{3 \times \sqrt{3} \times 9,45^2}{2} - \pi \times 5^2 \right) \times 8\text{mm}^3$.

Le volume de l'écrou arrondi au mm^3 près est donc de $1\,228\text{mm}^3$.

2. La masse volumique du laiton est de $8\,400\text{kg}/\text{m}^3 = 8\,400 \times 1\,000/1\,000^3\text{g}/\text{mm}^3 = 0,008\,4\text{g}/\text{mm}^3$.

La masse de l'écrou est donc de $0,008\,4 \times \left(\frac{3 \times \sqrt{3} \times 9,45^2}{2} - \pi \times 5^2 \right) \times 8\text{g}$.

La masse de l'écrou arrondie au g près est donc de 10g .

PARTIE C Le triangle ROS est isocèle en O car $OR = OS = r$ et l'angle en O de ce triangle est de $360^\circ/5 = 72^\circ$.

Ainsi, la hauteur $[OH]$ du triangle ROS est aussi bissectrice de l'angle en O du triangle ROS . L'angle en O du triangle OHR mesure donc $72^\circ/2 = 36^\circ$.

Dans le triangle OHR , rectangle en H , les formules de trigonométrie donnent $OH = r \times \cos(36^\circ)$ et $RH = r \times \sin(36^\circ)$.

Mais, la hauteur $[OH]$ du triangle ROS est aussi médiane du triangle ROS et $RS = 2 \times RH = 2 \times r \times \sin(36^\circ)$.

L'aire du triangle ORS est donc $RS \times OH/2 = 2 \times r \times \sin(36^\circ) \times r \times \cos(36^\circ)/2 = r^2 \times \sin(36^\circ) \times \cos(36^\circ)$.

Et l'aire du pentagone régulier est, par conséquent, de $5 \times r^2 \times \sin(36^\circ) \times \cos(36^\circ)$.