

Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2012 du sujet du PG2

Denis Vekemans *

Exercice 1

Affirmation 1 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

Faux ! En effet, $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Affirmation 2 Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a , $\frac{a^2-1}{2}$ et $\frac{a^2+1}{2}$, alors ce triangle est rectangle.

Vrai ! En effet,

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 &= a^2 + \frac{a^4}{4} - \frac{2 \times a^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 &= \frac{a^4}{4} + \frac{2 \times a^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle.

Affirmation 3 La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$.

Faux ! Les événements équiprobables survenant lors du lancer successif de deux pièces de monnaies sont : pile, puis pile ; pile, puis face ; face, puis pile ; face, puis face. La formule de Laplace donne donc la probabilité cherchée égale à $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$.

Affirmation 4 À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

Faux ! Soit x le prix de l'article dans chacun des magasins avant les modifications.

Le prix devient $(x \times 0,8) \times 1,2$ après modifications dans le magasin A. Le prix devient $(x \times 1,2) \times 0,8$ après modifications dans le magasin B. La multiplication dans l'ensemble des nombres réels étant associative et commutative, le prix sera le même après modifications dans chacun des deux magasins.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Affirmation 5 Le périmètre du carré augmente de 20%.

Faux ! Soit c le côté du carré avant augmentation. Le périmètre du carré avant augmentation est $p = 4 \times c$.

Après augmentation de 5%, le côté du carré devient $c \times 1,05$. Par conséquent, le périmètre du carré devient $4 \times (c \times 1,05) = (4 \times c) \times 1,05 = p \times 1,05$ et a donc, lui aussi, augmenté de 5%.

Exercice 2

PARTIE A Exemples

$$1. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{64} = \frac{63}{64}.$$

$$2. \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

PARTIE B Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p \times \left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q \times \left(\frac{p+q}{2}\right)} &= \frac{q+p}{p \times q \times \left(\frac{p+q}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{p \times q} \end{aligned}$$

2. $\sqrt{p \times q} \in \mathbb{N}$ (comme produit de nombres entiers naturels);

$\sqrt{\frac{p+q}{2}} \in \mathbb{N}$ (car la somme de deux nombres impairs est paire et donc divisible par 2), puis

$p \times \left(\frac{p+q}{2}\right) \in \mathbb{N}$ (comme produit de nombres entiers naturels);

$\sqrt{\frac{p+q}{2}} \in \mathbb{N}$ (car la somme de deux nombres impairs est paire et donc divisible par 2), puis

$q \times \left(\frac{p+q}{2}\right) \in \mathbb{N}$ (comme produit de nombres entiers naturels).

Conclusion : les trois dénominateurs des fractions précédentes sont des entiers naturels.

3.

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} &= \frac{2}{1 \times 15} \text{ on choisit } p = 1 \text{ et } q = 15 \\ &= \frac{1}{1 \times \left(\frac{1+15}{2}\right)} + \frac{1}{15 \times \left(\frac{1+15}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{120} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} &= \frac{2}{3 \times 5} \text{ on choisit } p = 3 \text{ et } q = 5 \\ &= \frac{1}{3 \times \left(\frac{3+5}{2}\right)} + \frac{1}{5 \times \left(\frac{3+5}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{2 \times n + 1} &= \frac{2}{1 \times (2 \times n + 1)} \text{ on choisit } p = 1 \text{ et } q = 2 \times n + 1 \\
 &= \frac{1}{1 \times \left(\frac{1+2 \times n+1}{2}\right)} + \frac{1}{(2 \times n + 1) \times \left(\frac{1+2 \times n+1}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{(2 \times n + 1) \times (n + 1)}
 \end{aligned}$$

PARTIE C "Algorithme glouton" de Fibonacci

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{13}{81} &= \frac{1}{7} + \frac{7 \times 13 - 81}{7 \times 81} \text{ on a utilisé } \frac{1}{7} < \frac{13}{81} < \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{7} + \frac{10}{567} \\
 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{10 \times 57 - 567}{567 \times 57} \text{ on a utilisé } \frac{1}{57} < \frac{10}{567} < \frac{1}{56} \\
 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{3}{32\,319} \\
 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,773}
 \end{aligned}$$

2. (a)

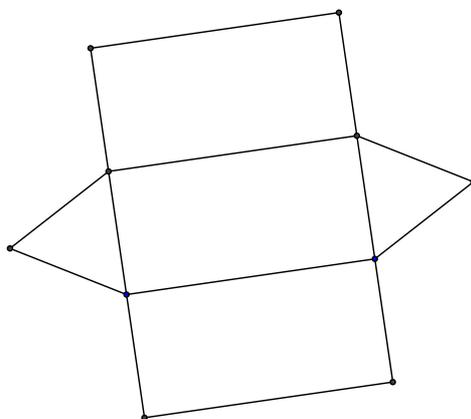
$$\frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81}.$$

(b) En réinjectant ce qu'on sait sur $\frac{13}{81}$ d'après la question C.1.,

$$\frac{256}{81} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,773}.$$

Exercice 3

1. La figure n'est pas à l'échelle ...



2. Dans un triangle équilatéral, lorsque le côté mesure x , la hauteur mesure $d = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x$ (ce résultat est un résultat de cours, mais il se démontre facilement par le théorème de Pythagore).

L'aire de ce triangle équilatéral est donnée par $A = \frac{x \times d}{2} = \frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$.

3. (a) Le volume du prisme est $V = 100 = A \times h = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 \times h$, puis $h = \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times x^2}$ (car $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$).

(b) Un patron présente

✓ 3 faces rectangulaires, chacune d'aire $h \times x = \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times x^2} \times x = \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times x}$;

✓ 2 faces triangulaires, chacune d'aire $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$.

Son aire est donc $S = 3 \times \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times x} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 = \frac{400 \times \sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times x^2$.

4. (a) On peut, à titre d'exemple, entrer la valeur 0,5 dans la cellule A2, la formule = A2+0,5 (*remarque* : = \$A2 + 0,5, fixant la colonne, fonctionnerait aussi) dans la cellule A3 et copier le contenu de la cellule A3 de la case A4 à la case A35.

(b) On peut, toujours à titre d'exemple, entrer la formule = 400 × racine(3)/A2 + racine(3) × A2²/2 (*remarque* : = 400 × racine(3)/\$A2 + racine(3) × \$A2²/2, fixant la colonne, fonctionnerait aussi) dans la cellule B2 et copier le contenu de la cellule B2 de la case B3 à la case B35.

(c) Graphiquement, on trouve x voisin de 7,5 (à 0,5 près) (en réalité, ce minimum est atteint en $\sqrt[3]{400}$, mais ceci n'est pas demandé) qui minimise S .

(d) *Remarque* : la question est mal posée ! Une hauteur est relative à un plan, attend-t-on la valeur de h qui est la hauteur de l'emballage relativement à l'une des faces triangulaires ? ou la valeur de d qui est la hauteur de l'emballage relativement à l'une des faces rectangulaires ? La phrase " h est la hauteur du prisme droit" me décide à opter pour la valeur de h .

Lorsque $x = 7,5$, $h = \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times 7,5^2}$ (*remarque* : il est étrange de calculer de façon exacte une valeur provenant d'une valeur approchée).