Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2013 du sujet du PG2

Denis Vekemans *

Exercice 1

Affirmation 1 Pour tout nombre entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Vrai ! Il suffit de mettre 2^n en facteur dans $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$:

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n \times (1 + 2 + 4) = 7 \times 2^n.$$

Et, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est donc divisible par 7.

Affirmation 2 La probabilité que toutes les réponses soient justes est $\frac{1}{27}$.

Vrai ! La probabilité que Martin réponde correctement à la première question est de $\frac{1}{3}$. Il en est de même pour la deuxième et la troisième questions.

L'indépendance des réponses de Martin permet de déduire que la probabilité que Martin réponde correctement aux trois questions est de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

Remarque : ce n'est pas vraiment explicite, mais "Martin répond au hasard à chaque question" induit que les réponses de Martin aux trois questions sont indépendantes.

Affirmation 3 La probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{1}{3}$.

Faux ! La probabilité que Martin réponde mal à la première question est de $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Il en est de même pour la deuxième et la troisième questions.

L'indépendance des réponses de Martin permet de déduire que la probabilité que Martin réponde mal aux trois questions est de $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \neq \frac{1}{3}$.

Affirmation 4 Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée dans la figure de gauche est égal au rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée dans la figure de droite.

Vrai !

Si on appelle $\mathcal{D}_1$ le disque de rayon 5 cm (celui qui est dénommé le "disque central" par la suite), $\mathcal{D}_2$ le disque de rayon 10 cm, $\mathcal{D}_3$ le disque de rayon 15 cm, $\mathcal{D}_4$ le disque de rayon 20 cm et $\mathcal{D}_5$ le disque de rayon 25 cm.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$\mathcal{D}_5$ peut être vu comme l'homothétique de $\mathcal{D}_1$ dans le rapport de 5 (en d'autres termes : $\mathcal{D}_5$ est $\mathcal{D}_1$ aggrandi 5 fois). Ainsi, d'après les propriétés des aggrandissements, l'aire de $\mathcal{D}_5$ est 25 fois plus grande que l'aire de $\mathcal{D}_1$.

De même, $\mathcal{D}_4$ peut être vu comme l'homothétique de $\mathcal{D}_1$ dans le rapport de 4 (en d'autres termes : $\mathcal{D}_4$ est $\mathcal{D}_1$ aggrandi 4 fois). Ainsi, d'après les propriétés des aggrandissements, l'aire de $\mathcal{D}_4$ est 16 fois plus grande que l'aire de $\mathcal{D}_1$.

Par différence, l'aire de la partie grisée dans la figure de gauche est donc $25 - 16 = 9$ fois plus grande que l'aire du disque central.

Si on appelle $\mathcal{C}_1$ le carré de côté 10 cm (celui qui est dénommé le "carré central" par la suite), $\mathcal{C}_2$ le carré de côté 20 cm, $\mathcal{C}_3$ le carré de côté 30 cm, $\mathcal{C}_4$ le carré de côté 40 cm et $\mathcal{C}_5$ le carré de côté 50 cm.

$\mathcal{C}_5$ peut être vu comme l'homothétique de $\mathcal{C}_1$ dans le rapport de 5 (en d'autres termes : $\mathcal{C}_5$ est $\mathcal{C}_1$ aggrandi 5 fois). Ainsi, d'après les propriétés des aggrandissements, l'aire de $\mathcal{C}_5$ est 25 fois plus grande que l'aire de $\mathcal{C}_1$.

De même, $\mathcal{C}_4$ peut être vu comme l'homothétique de $\mathcal{C}_1$ dans le rapport de 4 (en d'autres termes : $\mathcal{C}_4$ est $\mathcal{C}_1$ aggrandi 4 fois). Ainsi, d'après les propriétés des aggrandissements, l'aire de $\mathcal{C}_4$ est 16 fois plus grande que l'aire de $\mathcal{C}_1$.

Par différence, l'aire de la partie grisée dans la figure de droite est donc $25 - 16 = 9$ fois plus grande que l'aire du carré central.

Exercice 2

1. – Les diagonales du carré $PRCE$ sont perpendiculaires, donc, l'angle $\widehat{ATU}$ du quadrilatère $TUBA$ est droit.
   – Les diagonales du carré $PRCE$ sont perpendiculaires, donc $(UT) \perp (TA)$. Mais, comme $(UB)//(TA)$, on déduit que $(UT) \perp (UB)$, donc, l'angle $\widehat{TUB}$ du quadrilatère $TUBA$ est droit.
   – On a $CM = PB$ (donné dans l'énoncé) et $CR = PR$ (comme côtés d'un même carré $PRCE$), de plus sur la droite (CR), C, M et R sont lus dans cet ordre, et sur la droite (PR), P, B et R sont lus dans cet ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès (version forte), on déduit $(CP)//(MB)$ ou encore $(UT)//(BA)$. Mais, comme $(UT) \perp (TA)$, on déduit que $(BA) \perp (TA)$, donc, l'angle $\widehat{BAT}$ du quadrilatère $TUBA$ est droit.

   Le quadrilatère $TUBA$ possède donc trois angles droits et est un **rectangle**.
2. (a) Il est immédiat que $x \in]0, 40[$.
   (b) Dans le carré $PRCE$, les diagonales sont axes de symétrie (orthogonales), donc, en particulier, (PC) est bissectrice de l'angle droit $\widehat{EPR}$. Puis, $\widehat{UPB} = 45^\circ$. Comme on sait aussi que $\widehat{UPB}$ est droit, le triangle PUB est donc isocèle rectangle en U. Le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle donne $PU^2 + UB^2 = PB^2$, puis $2 \times UB^2 = PB^2$ (car $PU = UB$), et enfin, $PU = UB = \frac{PB}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times x}{2}$.
   (c) De même que précédemment, on déduit que le triangle PTR est isocèle rectangle en T. Le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle donne $PT^2 + TR^2 = PR^2 = CR^2$ (car $CR = PR$, comme

côtés d'un même carré $PRCE$), puis $2 \times PT^2 = CR^2$ (car $PT = TR$), et enfin, $PT = TR = \frac{CR}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times 40}{2}$.

De $PU + UT = PT$, on obtient $TU = PT - PU = \frac{\sqrt{2}\times 40}{2} - \frac{\sqrt{2}\times x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (40 - x)$.

(d) L'aire du triangle $TUBA$ est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= UB \times TU \\ &= \frac{\sqrt{2}\times x}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (40 - x) \\ &= \frac{x \times (40 - x)}{2}. \end{aligned}$$

3. Si on recherche le maximum de la fonction $\mathcal{A}$ (qui à $x \in]0, 40[$ associe $\mathcal{A}(x)$) sur le graphique, on trouve une valeur x_0 qui fournit la plus grande valeur de la fonction g, $\mathcal{A}(x_0)$.

   Graphiquement, $x_0 \approx 20$ et $\mathcal{A}(x_0) \approx 200$.

4. (a)

$$\begin{aligned} -\frac{(x-20)^2}{2} + 200 &= \frac{400 - (x-20)^2}{2} \\ &= \frac{(20 - (x - 20)) \times (20 + (x - 20))}{2} \\ &\quad \text{(en utilisant la formule } a^2 - b^2 = (a-b)\times(a+b) \text{ avec } a = 20 \text{ et } b = x - 20) \\ &= \frac{x \times (40 - x)}{2} = \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

(b) Quel que soit $x \in]0, 40[$,

$$\mathcal{A}(x) = \underbrace{-\underbrace{(x-20)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} + 200 \leq \frac{2}{0}0.$$

$\mathcal{A}(20) = \frac{20\times(40-20)}{2} = 200$.

Ainsi, la fonction f atteint en 20 son maximum $f(20) = 200$.

(c) Lorsque $CM = x = 20$, on a $BU = \frac{\sqrt{2}\times 20}{2} = 10 \times \sqrt{2}$ (voir question 2b) et §$TU = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (40 - 20) = 10 \times \sqrt{2}$ (voir question 2c) et donc le rectangle $TUBA$ (voir question 1) a deux côtés consécutifs de même longueur et est un **carré**.

Exercice 3

- Au degré 1, 2 personnes numérotées de 2 à 3.
- Au degré 2, 4 personnes numérotées de 4 à 7.

1. (a) Au degré 3, 8 personnes numérotées de 8 à 15.

   (b) Au degré n, 2^n personnes numérotées de 2^n à $2^{n+1} - 1$.

2. (a) Les numéros pairs sont des hommes et les numéros impairs sont des femmes, donc, un homme possèdant le numéro p possède un numéro pair ($p = 2 \times k$ avec k entier naturel) et son descendant direct possède le numéro $\frac{p}{2}$ ($\frac{p}{2} = k$).

(b) Les numéros pairs sont des hommes et les numéros impairs sont des femmes, donc, une femme possèdant le numéro m possède un numéro impair ($m = 2 \times \kappa + 1$ avec κ entier naturel) et son descendant direct possède le numéro $\frac{m-1}{2}$ ($\frac{m-1}{2} = \kappa$).

(c) – Si Dominique est un homme, il possède un numéro pair p ($p = 2 \times k$ avec k entier naturel) et son descendant direct possède le numéro $\frac{p}{2}$ ($\frac{p}{2} = k$). Son descendant direct et lui ont des numéros de même parité si et seulement si $\frac{p}{2} = k$ est pair également ($k = 2 \times l$ avec l entier naturel). Ainsi, dans le cas où Dominique est un homme, lui et son descendant direct ont des numéros de même parité si et seulement si le numéro de Dominique est multiple de 4 ($p = 2 \times 2 \times l = 4 \times l$).

– Si Dominique est une femme, elle possède un numéro impair m ($m = 2 \times \kappa + 1$ avec κ entier naturel) et son descendant direct possède le numéro $\frac{m-1}{2}$ ($\frac{m-1}{2} = \kappa$). Son descendant direct et elle ont des numéros de même parité si et seulement si $\frac{m-1}{2} = \kappa$ est impair également ($\kappa = 2 \times \lambda + 1$ avec λ entier naturel). Ainsi, dans le cas où Dominique est une femme, elle et son descendant direct ont des numéros de même parité si et seulement si le numéro de Dominique a un reste de 3 dans la division euclidienne par 4 ($m = 2 \times (2 \times \lambda + 1) + 1 = 4 \times \lambda + 3$).

Conclusion. Dominique et son descendant direct ont des numéros de même parité si et seulement si le numéro de Dominique a un reste de 0 (cas où Dominique est un homme) ou de 3 (cas où Dominique est une femme) dans la division euclidienne par 4.

3. En reprenant la question 1, Au degré 7, $2^7 = 128$ personnes numérotées de $2^7 = 128$ à $2^{7+1} - 1 = 255$. La personne portant le numéro 191 est donc un ascendant de Françoise au degré 7. À ce degré 7, les 64 premières personnes sont des ascendants du père de Françoise et les 64 dernières personnes sont des ascendants de la mère de Françoise : les ascendants du père de Françoise sont donc numérotés de 128 à 191, et les ascendants de la mère de Françoise sont numérotés de 192 à 255. Le numéro 191 est donc un ascendant du **père** de Françoise.

4. – Claude est la personne portant le numéro 257 dans l'arbre généalogique de Françoise (Claude est donc une femme puisqu'elle possède un numéro impair).
   – Son descendant direct X_1 porte donc le numéro 128 (d'après la question 2b) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_2 de X_1 porte donc le numéro 64 (d'après la question 2a) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_3 de X_2 porte donc le numéro 32 (d'après la question 2a) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_4 de X_3 porte donc le numéro 16 (d'après la question 2a) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_5 de X_4 porte donc le numéro 8 (d'après la question 2a) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_6 de X_5 porte donc le numéro 4 (d'après la question 2a) et est un homme (puisque c'est un numéro pair).
   – Le descendant direct X_7 de X_6 porte donc le numéro 2 (d'après la question 2a) et est un homme

(puisque c'est un numéro pair). X_7 est le père de Françoise.

- Enfin, le descendant direct X_8 de X_7 porte donc le numéro 1 (d'après la question 2a) et est une femme (puisque c'est un numéro pair). X_8 est Françoise.

On compte donc 7 hommes sur le chemin de l'arbre qui relie Claude à Françoise.