

Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2013 du sujet du PG3

Denis Vekemans *

Exercice 1

Affirmation 1 Tout prisme droit a deux fois plus d'arêtes que de faces.

Faux ! Un prisme droit à base triangulaire possède 9 arêtes et 5 faces ; et, $9 \neq 2 \times 5$.

Affirmation 2 Le triangle ABD a la même aire que le triangle ABC .

Vrai ! Ces deux triangles ont la même hauteur AD (en tant que longueur) relativement au côté $[AB]$.

Affirmation 3 Le volume V de ce pavé droit est multiplié par 4.

Faux !

	Pavé droit avant transformation	Pavé droit après transformation
Longueur	L	$1,5 \times L$
Largeur	l	l
Hauteur	h	$2 \times h$
Volume	$L \times l \times h$	$1,5 \times L \times l \times 2 \times h = 3 \times L \times l \times h$

Le volume est donc multiplié par 3 et non par 4.

Affirmation 4 La taille moyenne des élèves de la classe est 167 cm.

Vrai ! La taille moyenne d'un élève de la classe est (en centimètres) :

$$\frac{14 \times 162 + 10 \times 174}{24} = 167$$

Affirmation 5 Le produit de deux nombres pairs consécutifs est divisible par 8.

Vrai ! Parmi deux nombres pairs consécutifs, l'un des deux est multiple de 4. Et le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 2 est forcément un multiple de 8.

Exercice 2

1. En appliquant la propriété P au nombre 164 330 258 647, la somme des chiffres de 164 330 258 647 est 49 et le reste de la division de 49 par 9 est 4 (car $49 = 5 \times 9 + 4$), donc, le reste de la division de 164 330 258 647 par 9 est 4 également.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. $\overline{abcd} = a \times 1\,000 + b \times 100 + c \times 10 + d$.

(a)

$$\begin{aligned}
 \overline{abcd} &= a \times 1\,000 + b \times 100 + c \times 10 + d \\
 &= a + b + c + d + a \times 999 + b \times 99 + c \times 9 \\
 &= a + b + c + d + 9 \times \underbrace{(111 \times a + 11 \times b + c)}_{\text{on pose cet entier naturel égal à } k} \\
 &= a + b + c + d + 9 \times k.
 \end{aligned}$$

(b) Soient q le quotient et r le reste dans la division euclidienne de $\overline{abcd}$ par 9 :

$$\overline{abcd} = q \times 9 + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 9.$$

Soient q' le quotient et r' le reste dans la division euclidienne de $a + b + c + d$ par 9 :

$$a + b + c + d = q' \times 9 + r' \quad \text{avec} \quad 0 \leq r' < 9.$$

Mais, en remplaçant la nouvelle expression de $a + b + c + d$ dans l'expression de $\overline{abcd}$ de la question précédente, on obtient :

$$\overline{abcd} = q' \times 9 + r' + 9 \times k = (q' + k) \times 9 + r' \quad \text{avec} \quad 0 \leq r' < 9.$$

Et, par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de $\overline{abcd}$ par 9, on obtient :
 $q = q' + k$ et $r' = r$.

3. Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si le reste dans la division euclidienne de cet entier naturel par 9 est nul. Il résulte donc immédiatement (il s'agit du cas où les restes considérés sont nuls) de la propriété P que :

"Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9."

4. $18 = 2 \times 3^2$. Les diviseurs de 18 sont donc $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

La somme des chiffres de 164 330 258 643 est 45 qui est divisible par 9, donc 164 330 258 643 est aussi divisible par 9. Et, 9 est un diviseur commun à 18 et 164 330 258 643.

18 est un nombre pair et n'est donc pas un diviseur de 164 330 258 643 (qui est un nombre impair).

18 n'est donc pas un diviseur commun à 18 et 164 330 258 643.

Conclusion : le plus grand diviseur commun à 18 et 164 330 258 643 est 9.

PROBLÈME

PARTIE A

1. $AB = 480 \text{ m}$. $AC = 360 \text{ m}$. $BC = 600 \text{ m}$.

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ car $480^2 = 230\,400$; $360^2 = 129\,600$; $600^2 = 360\,000$; et $230\,400 + 129\,600 = 360\,000$.

Ainsi, par la réciproque du théorème de Pythagore, on déduit que le triangle ABC est rectangle en A .

2. (a) L'angle droit en A du triangle ABC permet de dire que $[AC]$ est hauteur du triangle ABC issue de C (relativement à la base $[AB]$). L'aire du triangle ABC est donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{480 \times 360}{2} m^2 = 86\,400 m^2.$$

- (b) Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC (relativement à la base $[BC]$). AH est la distance du point A à la droite (BC) . L'aire du triangle ABC est donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AH \times 600}{2} m = 86\,400 m^2.$$

Puis,

$$AH = \frac{2 \times 86\,400}{600} m = 288 m.$$

PARTIE B

1. Un tour de parcours mesure $AB + BC + CA = 480 m + 600 m + 360 m = 1\,440 m$.

Deux tours de parcours mesurent donc $2 \times 1\,440 m = 2\,880 m$.

À la vitesse moyenne de $8 km/h$ ou $8\,000 m/h$, il faut $\frac{2\,880}{8\,000} h = 0,36 h$ (par définition de la vitesse moyenne).

On convertit $0,36 h$ en secondes : $0,36 h = 0,36 \times 3\,600 s = 1\,296 s$; puis en heures, minutes, secondes en divisant euclidiennement $1\,296$ par 60 ($1\,296 = 21 \times 60 + 36$), ce qui donne une durée de 21 minutes et 36 secondes.

2. (a) La formule $= E\$1/(C4 + D4/100)$ ne donne pas le bon résultat car $1 min$ se convertit en $60 s$ et non pas en $100 s$.

Il faut remplacer cette formule par $= E\$1/(C4 + D4/60)$.

- (b) Le $\$$ devant le 1 permet de fixer la ligne 1 lors d'un recopiage d'une formule (et c'est le but recherché parce que la distance parcourue est toujours à prendre dans la ligne 1).

Sans ce $\$$ dans le calcul de la cellule $E4$, le logiciel aurait bien pris en considération pour $E1$ la valeur contenue dans la cellule $E1$.

Mais, le copié/collé de cette formule avec $E1$ au lieu de $E\$1$ de la cellule $E4$ à la cellule $E5$ aurait remplacé $E1$ par $E2$ dans la formule collée alors que la distance parcourue est donnée en $E1$ et non pas en $E2$.

PARTIE C

1. (a) Si J est à égale distance des points B et C , il est sur la médiatrice du segment $[BC]$. Si J est à égale distance des points A et C , il est sur la médiatrice du segment $[AC]$. Ainsi, J est à l'intersection de deux des médiatrices du triangle ABC (de la troisième aussi) et est par conséquent le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC .

De plus, comme le triangle ABC est rectangle en A (voir partie A), $[BC]$ est un diamètre du cercle Γ et J est le milieu du segment $[BC]$.

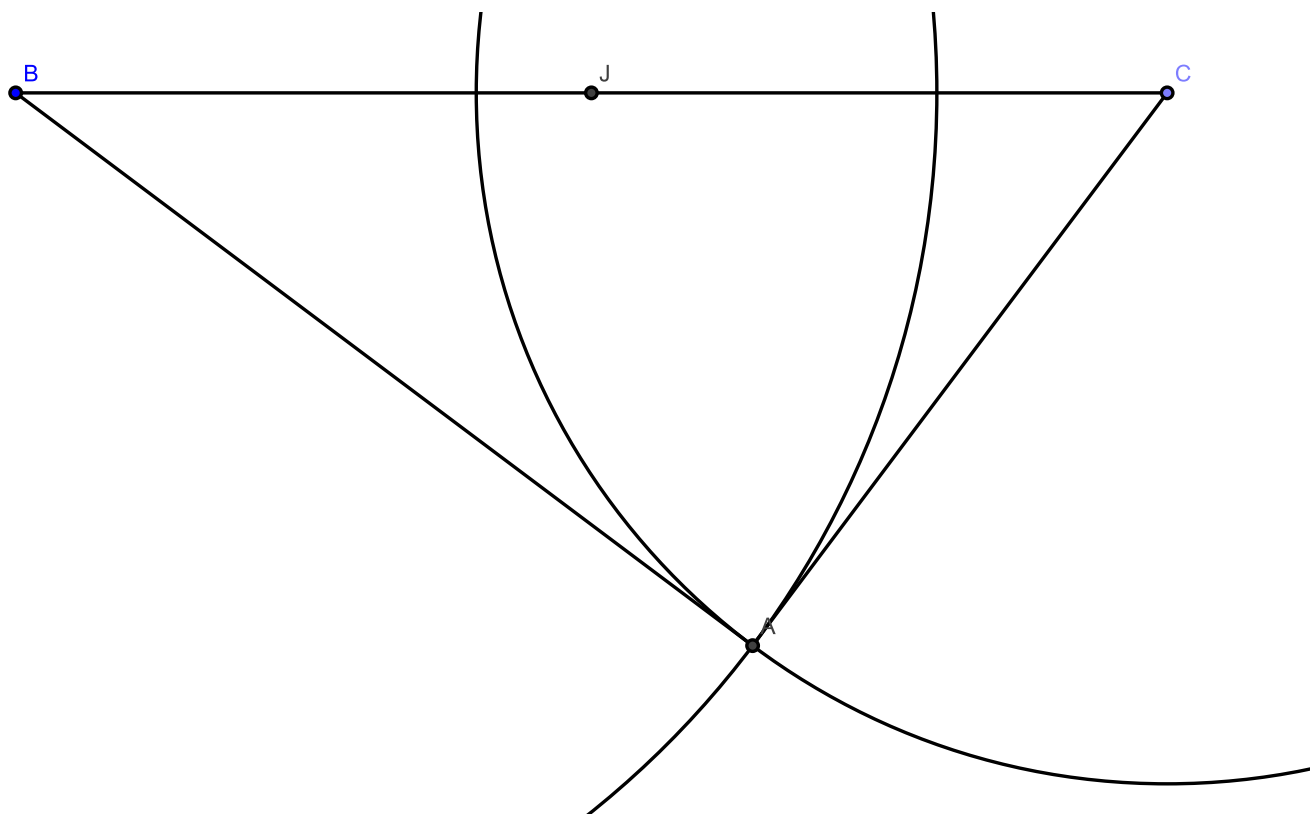
- (b) *Remarque.* "Construire, à la règle et au compas, le triangle ABC à l'échelle $1/5\,000$ " doit être lu comme "Construire, à la règle graduée et au compas, le triangle ABC à l'échelle $1/5\,000$ " car sans outil de mesure, il est impossible de tenir une échelle en compte à partir d'une figure à main levée.

À l'échelle $1/5\,000$,

- $AB = 480\,m$ est représenté par AB mesurant $\frac{48\,000}{5\,000}\,cm = 9,6\,cm$;
- $AC = 360\,m$ est représenté par AC mesurant $\frac{36\,000}{5\,000}\,cm = 7,2\,cm$;
- et $BC = 600\,m$ est représenté par BC mesurant $\frac{60\,000}{5\,000}\,cm = 12\,cm$.

Algorithme de construction du triangle ABC à l'échelle $1/5\,000$, et de J .

- On construit un segment $[BC]$ mesurant $12\,cm$.
- On trace un cercle Γ_B de centre B et de rayon $9,6\,cm$.
- On trace un cercle Γ_C de centre C et de rayon $7,2\,cm$.
- Γ_B et Γ_C se coupent en deux points dont l'un que l'on nomme A .
- On place J sur le segment $[BC]$ tel que BJ mesure $6\,cm$ (car J est le milieu du segment $[BC]$).



2. K est milieu de $[AB]$ et J est milieu de $[BC]$, donc, par le théorème des milieux appliqué au triangle ABC , en particulier, $(KJ) \parallel (AC)$, puis $(KJ) \parallel (AI)$. I est milieu de $[AC]$ et J est milieu de $[BC]$, donc, par le théorème des milieux appliqué au triangle ABC , en particulier, $(IJ) \parallel (AB)$, puis $(IJ) \parallel (AK)$. Ainsi, le quadrilatère $AIJK$ a ses côtés opposés parallèles et est un parallélogramme.

De plus, l'angle en A du parallélogramme $AIJK$ est droit (voir partie A), donc $AIJK$ est un **rectangle**.

3. Il faut montrer dans cette question que la droite (KI) est la médiatrice du segment $[HA]$.

K est milieu de $[AB]$ et I est milieu de $[AC]$, donc, par le théorème des milieux appliqué au triangle ABC , en particulier, $(KI) \parallel (BC)$, mais comme $(AH) \perp (BC)$ (par définition de la hauteur), on déduit que $(AH) \perp (KI)$ (quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une, est perpendiculaire à l'autre).

Soit L le point d'intersection des droites (AH) et (KI) . Dans le triangle AHB , K est milieu de $[AB]$ et L de la droite (AH) est tel que $(KL) \parallel (BH)$ (ou $(KI) \parallel (BC)$), donc, par la réciproque du théorème des milieux, L est milieu de $[AH]$.

Enfin, la droite (KI) est perpendiculaire à la droite (AH) et passe par le milieu L du segment $[AH]$, on déduit alors que la droite (KI) est la médiatrice du segment $[HA]$.

