Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2014 du sujet du PG1

Denis Vekemans [*]

Exercice 1

Affirmation 1 On est certain que cet homme a 34 ans.

Faux ! Si on appelle A l'âge de cet homme, durant l'année en cours, après sa date d'anniversaire.

L'an dernier, son âge était divisible par 11. L'an dernier, son âge était soit $A-2$, soit $A-1$. Donc, soit $A-2$, soit $A-1$ est divisible par 11.

L'année prochaine, son âge sera divisible par 5. L'année prochaine, son âge sera soit A, soit $A+1$. Donc, soit A, soit $A+1$ est divisible par 5.

	Année précédente			Année en cours			Année prochaine		
	Avant la date	Date d'anniversaire	Après la date	Avant la date	Date d'anniversaire	Après la date	Avant la date	Date d'anniversaire	Après la date
Âge	A-2	A-1	A-1	A-1	A	A	A	A+1	A+1

Si $A=89$, $A-1=88$ est divisible par 11 et $A+1=90$ est divisible par 5. L'homme peut donc avoir 89 ans (après sa date d'anniversaire), par exemple ; auquel cas, il avait 88 ans au 31 décembre de l'an dernier et aura 90 ans au 31 décembre de l'année prochaine.

Affirmation 2 La probabilité que le temps soit humide après-demain est $0,25$.

Vrai ! Si on note S l'état "temps sec" et H l'état "temps humide".

On note un événement par une succession d'états :

- SS désigne le passage d'un état "temps sec" à un état "temps sec", on a $P(SS)=\frac{5}{6}$ d'après l'énoncé ;
- SH désigne le passage d'un état "temps sec" à un état "temps humide", on a $P(SH)=\frac{1}{6}$ car la modélisation ne permettant que les deux état S et H, on a $P(SS)+P(SH)=1$;
- HH désigne le passage d'un état "temps humide" à un état "temps humide", on a $P(HH)=\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé ;
- HS désigne le passage d'un état "temps humide" à un état "temps sec", on a $P(HS)=\frac{1}{3}$ car la modélisation ne permettant que les deux état S et H, on a $P(HH)+P(HS)=1$.

En tenant compte du fait qu'"aujourd'hui, le temps est sec", les seules suites qui vont fournir un état "temps humide" après demain sont :

∗. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

– SSH qui désigne qu'aujourd'hui l'état est "temps sec", que demain l'état sera "temps sec" et qu'après demain l'état sera "temps humide", on a

$$\begin{aligned} P(SSH) &= P(SS) \times P(SH) \text{ on passe d'abord d'un état "temps sec" à un état "temps sec",} \\ &\quad \text{puis d'un état "temps sec" à un état "temps humide"} \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

– ou SHH qui désigne qu'aujourd'hui l'état est "temps sec", que demain l'état sera "temps humide" et qu'après demain l'état sera "temps humide", on a

$$\begin{aligned} P(SHH) &= P(SH) \times P(HH) \text{ on passe d'abord d'un état "temps sec" à un état "temps humide",} \\ &\quad \text{puis d'un état "temps humide" à un état "temps humide"} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

La probabilité que le temps soit humide après demain est donc $P(SSH) + P(SHH) = \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Remarque : dans $P(SSH) = P(SS) \times P(SH)$ ou dans $P(SHH) = P(SH) \times P(HH)$, on utilise tacitement le fait que les changements de temps sont indépendants les uns des autres ; dans l'addition $P(SSH)+P(SHH)$, on utilise tacitement le fait que les événements SSH et SHH sont incompatibles.

Affirmation 3 Cette voiture est en excès de vitesse.

Faux ! Une voiture roulant à une vitesse constante a parcouru 150 mètres en 8 secondes, roule à

$$\frac{\frac{150}{1\ 000}\ km}{\frac{8}{3\ 600}\ h} = 67,5\ km/h < 70\ km/h.$$

On a utilisé les conversions $1\ km = 1\ 000\ m$ et $1\ h = 3\ 600\ s$.

Affirmation 4 La somme des carrés de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vrai ! Si un nombre est impair, son carré est un nombre impair (c'est évident, mais on peut le démontrer comme suit : un nombre est impair s'il peut s'écrire $2 \times k + 1$ avec k entier, donc son carré est donc $(2 \times k + 1)^2 = 4 \times k^2 + 4 \times k + 1 = 2 \times (2 \times k^2 + 2 \times k) + 1$ qui est un nombre impair).

Ainsi, la somme des carrés de deux nombres entiers impairs est en fait une somme de deux nombres entiers impairs et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair (c'est encore évident, mais on peut le démontrer comme suit : un nombre est impair s'il peut s'écrire $2 \times \kappa + 1$ avec κ entier (pour le premier à sommer) et $2 \times \lambda + 1$ avec λ entier (pour le second à sommer), donc la somme est $(2 \times \kappa + 1) + (2 \times \lambda + 1) = 2 \times (\kappa + \lambda + 1)$ qui est un nombre pair).

Affirmation 5 La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.

Faux ! Contre-exemple : 3 et 5 sont des nombres premiers, mais $3 + 5 = 8$ n'est pas un nombre premier (car 8 est divisible par 1, 2, 4 ou 8).

Affirmation 6 La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

Faux ! Contre-exemple : 2 et 3 sont des nombres premiers, et $2 + 3 = 5$ est aussi un nombre premier.

Exercice 2

1. $0,5\ L$ de boisson A contient $0,5 \times 0,1\ L = 0,05\ L$ de jus d'orange ; $1,25\ L$ de boisson B contient $1,25 \times 0,05\ L = 0,0625\ L$ de jus d'orange. La bouteille de boisson B contient donc plus de jus d'orange que la bouteille de boisson A.

2. $20cL$ de boisson A contient $20 \times 0,1\ cL = 2\ cL$ de jus d'orange ; $30\ cL$ de boisson B contient $30 \times 0,05\ cL = 1,5\ cL$ de jus d'orange. Le mélange de $20\ cL + 30\ cL = 50\ cL$ contient $2\ cL + 1,5\ cL = 3,5\ cL$ de jus d'orange soit un taux de $\dfrac{3,5\ cL}{50\ cL} = 0,07 = 7\%$.

3. Le verre de $40\ cL$ contient $x\ cL$ de boisson A soit $x \times 0,1\ cL$ de jus d'orange et $(40 - x)\ cL$ de boisson B soit $(40 - x) \times 0,05\ cL$ de jus d'orange.

   Le mélange de $40\ cL$ contient $x \times 0,1\ cL + (40 - x) \times 0,05\ cL = (2 + 0,05 \times x)\ cL$ de jus d'orange soit un taux de $\dfrac{(2 + 0,05 \times x)\ cL}{40\ cL} = \dfrac{2 + 0,05 \times x}{40}$.

   Le mélange doit contenir 8% de jus d'orange, donc $0,08 = \dfrac{2 + 0,05 \times x}{40}$, i.e. $3,2 = 2 + 0,05 \times x$, i.e. $x = \dfrac{1,2}{0,05} = 24$.

   Conclusion : un verre qui contient $24\ cL$ de boisson A et $16\ cL$ de boisson B contient 8% de jus d'orange pour un mélange de $40\ cL$.

4. Quel nombre est alors obtenu dans la cellule C14 ?

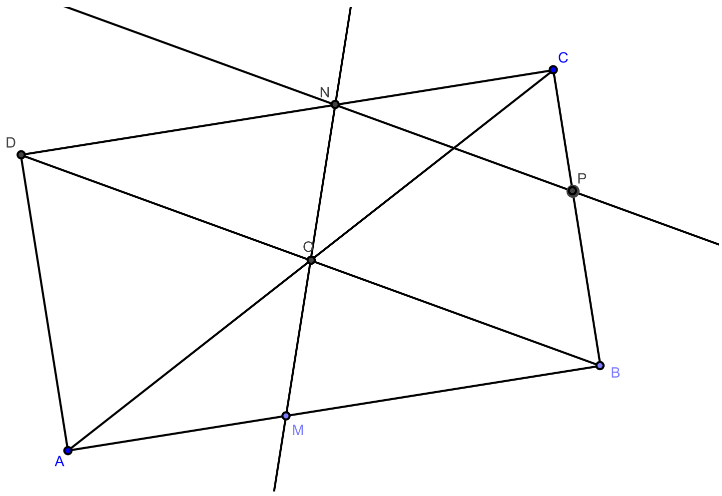
   Il s'agit du nombre $(0,1 \times A14 + 0,05 \times B14)/40$ d'après la formule copiée/collée.

   Ce nombre vaut $(0,1 \times 12 + 0,05 \times 28)/40 = (1,2 + 1,4)/40 = 0,065$.

   Ce nombre représente le taux de jus d'orange dans le mélange de composé de $12\ cL$ de boisson A et $28\ cL$ de boisson B : $0,065 = 6,5\%$ de jus d'orange dans le mélange.

Exercice 3

Partie A



1. Le quadrilatère $MBCN$ est un trapèze rectangle en B et en C (car les angles en B et en C de ce quadrilatère sont droits par propriété du rectangle $ABCD$).

2. Soit s la symétrie de centre O.

   Par s,

   – l'image du point A est le point C et l'image du point B est le point D (car O est centre de symétrie du rectangle $ABCD$) ;
   – l'image de la droite (AB) est donc la droite (CD) (parce que la symétrie centrale est une isométrie et qu'elle conserve, par conséquent, l'alignement) ;
   – l'image de la droite (OM) est la droite (OM) (parce qu'une droite passant par le centre de symétrie est globalement invariante par cette symétrie) ;
   – l'image de M (comme point de concours des droites (AB) et (OM)) est donc N (comme point de concours des droites (CD) et (OM)) ;
   – donc, l'image du segment $[AM]$ est le segment $[CN]$ et l'image du segment $[BM]$ est le segment $[DN]$ (parce que la symétrie centrale est une isométrie et qu'elle conserve, par conséquent, l'alignement),

   et ainsi, $AM = CN$ et $BM = DN$ (parce que la symétrie centrale est une isométrie et qu'elle conserve, par conséquent, les longueurs).

3. En considérant les parallèles (NP) et (DB) et les sécantes (DC) et (BC), le théorème de Thalès donne $\dfrac{CD}{CN} = \dfrac{CB}{CP} (= \dfrac{DB}{NP})$.
   On déduit $\dfrac{CP}{CN} = \dfrac{5\ cm}{9\ cm} = \dfrac{5}{9}$.
   Et, de $CP = \dfrac{5}{9} \times CN$ et de $CB = \dfrac{5}{9} \times CD$, on tire

$$\begin{array}{rcl} BP & = & CB - CP \\ & = & \dfrac{5}{9} \times CN - \dfrac{5}{9} \times CD \\ & = & \dfrac{5}{9} \times (CD - CN) \\ & = & \dfrac{5}{9} \times DN \\ & = & \dfrac{5}{9} \times BM \text{ car } BM = DN \text{ voir question précédente.} \end{array}$$

Partie B

1. (a) Soit s la symétrie de centre O.

   Par s, l'image du quadrilatère $BMNC$ est le quadrilatère $DNMA$, donc $\mathcal{A}(BMNC) = \mathcal{A}(DNMA)$ (parce que la symétrie centrale est une isométrie et qu'elle conserve, par conséquent, les longueurs).
   Ainsi, $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(BMNC) + \mathcal{A}(DNMA) = 2 \times \mathcal{A}(BMNC)$ et $\mathcal{A}(BMNC) = \dfrac{\mathcal{A}(ABCD)}{2} = \dfrac{5\ cm \times 9\ cm}{2} = \dfrac{45}{2}\ cm^2$.

(b) La formule donnant l'aire d'un triangle fournit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(BMP) &= \frac{BM \times BP}{2} \text{ car l'angle en } B \text{ du triangle } BMP \text{ est droit}\\
&= \frac{BM \times \frac{5}{9} \times BM}{2} \text{ d'après la partie précédente}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times BM^2}{2}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times (9\ cm - AM)^2}{2} \text{ car } AM + MB = AB\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times (9\ cm - 6\ cm)^2}{2} \text{ car pour cette question, } AM = 6\ cm\\
&= \frac{5}{2}\ cm^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(PNC) &= \frac{PC \times CN}{2} \text{ car l'angle en } C \text{ du triangle } PNC \text{ est droit}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times CN \times CN}{2} \text{ d'après la partie précédente}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times CN^2}{2}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times AM^2}{2} \text{ car } AM = CN \text{ d'après la partie précédente}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times (6\ cm)^2}{2} \text{ car pour cette question, } AM = 6\ cm\\
&= 10\ cm^2
\end{aligned}$$

(c) De $\mathcal{A}(BMNC) = \mathcal{A}(BMP) + \mathcal{A}(MNP) + \mathcal{A}(PNC)$, on extrait

$$\mathcal{A}(MNP) = \frac{45}{2}\ cm^2 - \frac{5}{2}\ cm^2 - 10\ cm^2 = 10\ cm^2.$$

2. À partir de maintenant, les longueurs sont données en cm et les aires sont données en cm^2 : $AM = x$ signifie que le segment $[AM]$ mesure $x\ cm$; $\mathcal{A}(BMNC) = \frac{45}{2}$ signifie que l'aire du quadrilatère $BMNC$ est de $\frac{45}{2}\ cm^2$; etc.

   (a) Soit s la symétrie de centre O.

   Par s, l'image du quadrilatère $BMNC$ est le quadrilatère $DNMA$, donc $\mathcal{A}(BMNC) = \mathcal{A}(DNMA)$ (parce que la symétrie centrale est une isométrie et qu'elle conserve, par conséquent, les longueurs).

   Ainsi, $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(BMNC) + \mathcal{A}(DNMA) = 2 \times \mathcal{A}(BMNC)$ et $\mathcal{A}(BMNC) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{2} = \frac{5 \times 9}{2} = \frac{45}{2}$ ne dépend pas de x.

(b) La formule donnant l'aire d'un triangle fournit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(BMP) &= \frac{BM \times BP}{2} \text{ car l'angle en } B \text{ du triangle } BMP \text{ est droit}\\
&= \frac{BM \times \frac{5}{9} \times BM}{2} \text{ d'après la partie précédente}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times BM^2}{2}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times (9-x)^2}{2} \text{ car } AM + MB = AB \text{ et } AM = x\\
&= \frac{5 \times (9-x)^2}{18}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(PNC) &= \frac{PC \times CN}{2} \text{ car l'angle en } C \text{ du triangle } PNC \text{ est droit}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times CN \times CN}{2} \text{ d'après la partie précédente}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times CN^2}{2}\\
&= \frac{\frac{5}{9} \times x^2}{2} \text{ car } AM = CN \text{ d'après la partie précédente et } AM = x\\
&= \frac{5 \times x^2}{18}
\end{aligned}$$

De $\mathcal{A}(BMNC) = \mathcal{A}(BMP) + \mathcal{A}(MNP) + \mathcal{A}(PNC)$, on extrait

$$\begin{aligned}
f(x) = \mathcal{A}(MNP) &= \frac{45}{2} - \frac{5 \times (9-x)^2}{18} - \frac{5 \times x^2}{18}\\
&= \frac{405 - 5 \times (x^2 - 18 \times x + 81) - 5 \times x^2}{18}\\
&= \frac{405 - 5 \times x^2 + 90 \times x - 405 - 5 \times x^2}{18}\\
&= -\frac{5}{9} \times x^2 + 5 \times x
\end{aligned}$$

3. (a) – Le graphique correct ne peut être celui de la figure 1, car d'après la première partie (ou bien d'après un calcul rapide), $f(6) = 10$, ce qui n'est pas le cas sur la figure 1.
   – Le graphique correct ne peut être celui de la figure 2, car d'après un calcul rapide, $f(3) = 10$, ce qui n'est pas le cas sur la figure 2.

   Puisque l'un des trois graphiques est supposé correct, il ne peut s'agir que de celui de la figure 3.

   (b) Par lecture graphique, il semble que la fonction f atteigne son maximum en une valeur proche de $4,5$ et l'aire maximale est alors proche de 11 si on arrondit à l'unité près.

4. (a)

$$\begin{aligned}
\frac{45}{4} - \frac{5}{9} \times (x - \frac{9}{2})^2 &= \frac{45}{4} - \frac{5}{9} \times (x^2 - 9 \times x + \frac{81}{4})\\
&= \frac{45}{4} - \frac{5}{9} \times x^2 + 5 \times x - \frac{45}{4}\\
&= -\frac{5}{9} \times x^2 + 5 \times x = f(x).
\end{aligned}$$

(b) et (c) On a $(x-\frac{9}{2})^2 \geq 0$ (car un carré est positif au sens large), donc $-\frac{5}{9}\times(x-\frac{9}{2})^2 \leq 0$, puis $\frac{45}{4}-\frac{5}{9}\times(x-\frac{9}{2})^2 \leq \frac{45}{4}$, i.e. $f(x) \leq \frac{45}{4}$.

D'autre part, $f(\frac{9}{2}) = \frac{45}{4}$.

De $f(x) \leq \frac{45}{4}$ et $f(\frac{9}{2}) = \frac{45}{4}$, on déduit que la fonction f atteint son maximum $\frac{45}{4}$ en la valeur $\frac{9}{2}$.