Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2017 du sujet du PG1

Denis Vekemans *

PREMIÈRE PARTIE

1. **Représentation géométrique**

   a) La notion d'échelle fait référence à la notion de proportionnalité : les distances à vol d'oiseau et les mesures des côtés du triangle sont proportionnelles.

   Ainsi, le tableau suivant est de proportionnalité

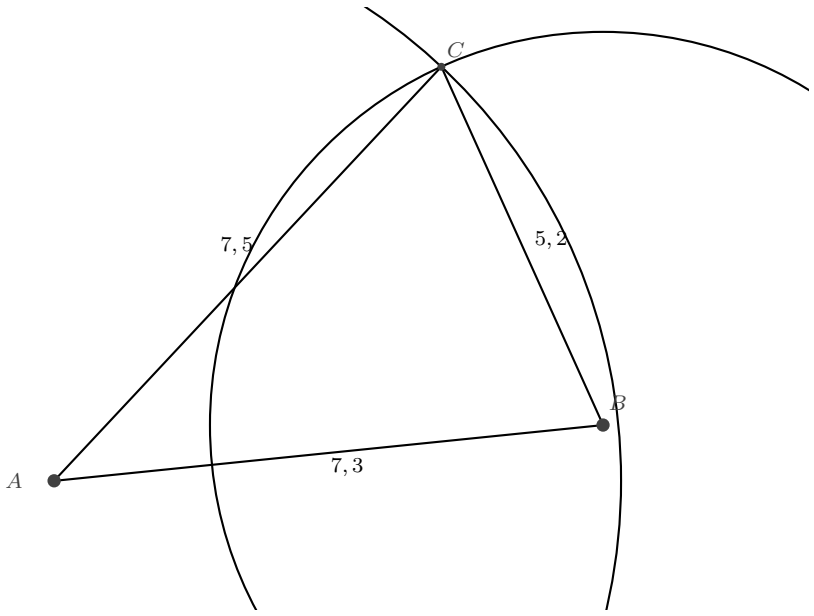
	AB	BC	CA
Distance à vol d'oiseau en km	$204,4$	$145,6$	210
Mesure de la distance sur la représentation en cm	$7,3$	x	y

   ,

   et on peut calculer

$$x = \frac{7,3 \times 145,6}{204,4} = 5,2 \text{ et } y = \frac{7,3 \times 210}{204,4} = 7,5.$$

   b) On place A et B tels que $AB = 7,3$ cm. Puis on trace le cercle de centre A de rayon $7,5$ cm et le cercle de centre B de rayon $5,2$ cm. Ces deux cercles se coupent en deux points dont l'un, que l'on nomme C.

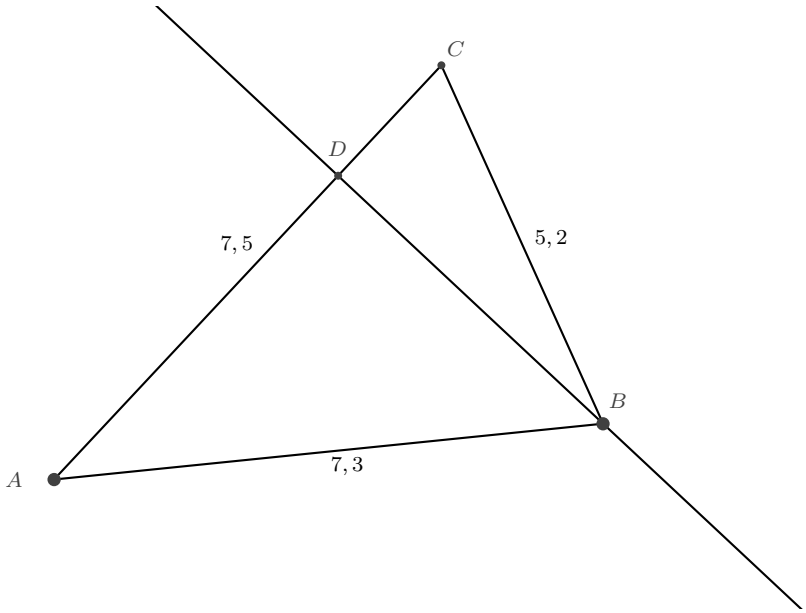


∗. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

c) $7,5$ *cm* représentent 210 *km* = 210 000 *m* = 21 000 000 *cm* (en observant la longueur AC).
Ainsi, 1 *cm* représente 2 800 000 *cm* (en divisant les deux longueurs précédentes par $7,5$).
L'échelle de la représentation est donc 1 : 2 800 000.

2. **Étude de faisabilité**

a) D est le point du segment $[AC]$ tel que la distance BD soit la plus courte possible. Ce point D est le point de concours du segment $[AC]$ et de la droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par B.



Remarque : je suppose qu'il n'est nul besoin de justifier pour cette question. En effet, primo je ne vois pas dans le programme du collège le théorème de la projection orthogonale (celui qui dit qu'un point d'une droite qui réalise un minimum de distance à un autre point est justement sur une perpendiculaire à cette droite passant par cet autre point), et secondo il s'agit ici de distance d'un point à un segment (d'après l'énoncé) lequel du fait des mesures données est aussi distance d'un point à la droite supportant le segment.

La droite (BD) est donc hauteur issue de B dans le triangle ABC car elle passe par B et est perpendiculaire au côté $[AC]$.

b) En appliquant le théorème d'Al Kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD$, on trouve, en remplaçant :

$$(5,2\ cm)^2 = (7,3\ cm)^2 + (7,5\ cm)^2 - 2 \times (7,5\ cm) \times AD,$$

puis

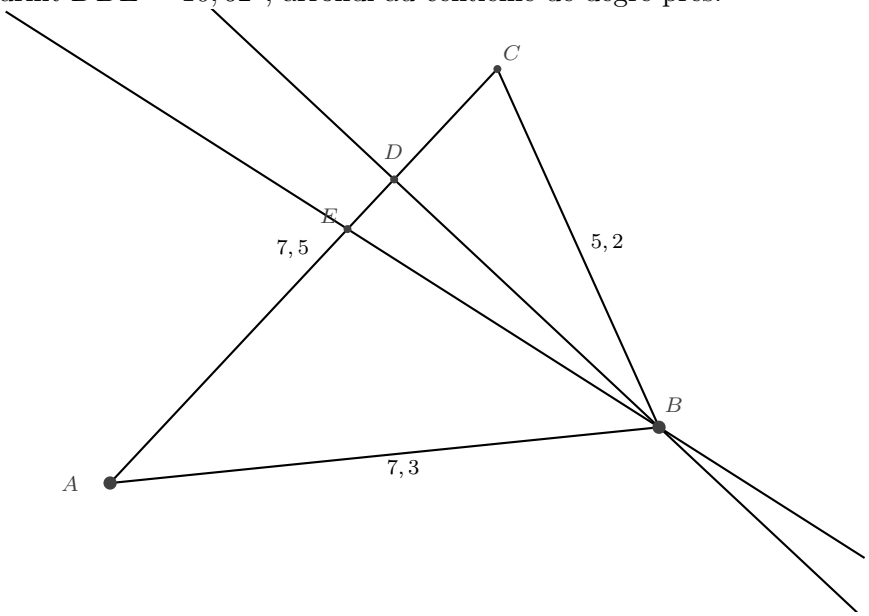
$$\begin{aligned} AD &= \frac{(5,2\ cm)^2 - (7,3\ cm)^2 - (7,5\ cm)^2}{-2 \times (7,5\ cm)} \\ &= \frac{27,04 - 53,29 - 56,25}{-15}\ cm \\ &= \frac{-82.5}{-15}\ cm \\ &= 5,5\ cm \end{aligned}$$

c) D étant un point du segment $[AC]$, on a $AC = AD + DC$ et on déduit : $DC = AC - AD = 7,5\ cm - 5,5\ cm = 2\ cm$.
Le triangle ABD est rectangle en D (car la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)). Le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle rectangle donne donc $AB^2 = AD^2 + BD^2$. On déduit $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2}$, et on trouve, en remplaçant :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(7,3\ cm)^2 - (5,5\ cm)^2} \\ &= \sqrt{53,29 - 30,25}\ cm \\ &= \sqrt{23,04}\ cm \\ &= 4,8\ cm \end{aligned}$$

3 **Validation du projet**

a) Dans le triangle BDE rectangle en D (car la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)), on a $\tan\widehat{DBE} = \dfrac{DE}{BD}$, et on trouve en remplaçant : $\tan\widehat{DBE} = \dfrac{0,9\ cm}{4,8\ cm} = 0,1875$. Puis la calculatrice fournit $\widehat{DBE} = 10,62°$, arrondi au centième de degré près.



b) Le triangle BDE est rectangle en D (car la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)). Le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle rectangle donne donc $BE^2 = BD^2 + DE^2$. On déduit $BE = \sqrt{BD^2 + DE^2}$, et on trouve, en remplaçant :

$$\begin{aligned} BE &= \sqrt{(4,8\ cm)^2 + (0,9\ cm)^2} \\ &= \sqrt{23,04 + 0,81}\ cm \\ &= \sqrt{23,85}\ cm \\ &= 4,88\ cm, \text{ arrondi au centième de centimètre près.} \end{aligned}$$

c) En raison de l'échelle de la représentation qui est 1 : 2 800 000, BE représente une distance de $\sqrt{23,85}\ cm \times 2\ 800\ 000$ qui vaut $136,7\ km$, arrondie au dixième de kilomètre près.

4 **Tarification**

a) Un œil affûté permet de conjecturer graphiquement que le tarif 2 est plus intéressant à partir du treizième trajet (c'est vrai, et c'est démontré à la question d)),

mais on pourrait tout aussi bien conclure que le tarif 2 est aussi intéressant pour le douzième trajet (c'est faux, mais c'est peu visible graphiquement) et strictement plus intéressant à partir du treizième,

ou même que le tarif 2 est strictement plus intéressant à partir du douzième trajet (c'est encore faux, mais toujours peu visible graphiquement).

Remarque : j'espère que le jury sera clément pour cette question et acceptera les trois réponses ci-dessus.

b) $f(x) = 12,40 \times x$.

c) $g(x) = 30 + 12,40 \times (1 - \dfrac{20}{100}) \times x = 30 + 9,92 \times x$.

d) Se demander à partir de combien de trajet le tarif 2 est préférable au tarif 1 revient à chercher x tel que $g(x) < f(x)$ i.e. $30 + 9,92 \times x < 12,40 \times x$ i.e. $30 < \underbrace{(12,40 - 9,92)}_{=2,48} \times x$ i.e. $x > \dfrac{30}{2,48}$ i.e., comme $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 13$.

5 **Les dangers de l'autoroute**

a) Le conducteur étant fatigué, son temps de réaction est de 2 s. Il roule à 120 km/h, c'est-à-dire à $120 \times 1\ 000\ m/3\ 600\ s = \dfrac{100}{3}\ m/s$. Durant son temps de réaction, il parcourt donc $D_r = 2 \times \dfrac{100}{3}\ m = \dfrac{200}{3}\ m$ soit $66,7\ m$ quand on arrondit au dixième de mètre.

b) Graphiquement, on lit $D_f \approx 70\ m$ à une vitesse de 120 km/h.

Ainsi, $D_a = D_r + D_f \approx \underbrace{66,7\ m + 70\ m}_{=136,7\ m}$ et comme le cerf est à 150 m au départ, il devrait pouvoir être évité.

c) Avec les données relatives à cette question, $D_f = \dfrac{v^2}{254 \times 0,8} = \dfrac{v^2}{203,2}$ où v est la vitesse du conducteur exprimée en km/h.

Ainsi, dans la cellule B3, il suffit de rentrer la formule "=A3*A3/203,2". Cette formule recopiée sur la plage B3 :B15 fournira le résultat escompté.

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1

1.

	de 15 à 25 ans	de 26 à 44 ans	de 45 à 60 ans	plus de 60 ans	Total
Pas du tout	A	82	415	147	666
Une fois	682	B	1 243	589	C
Deux fois	D	634	552	138	1 737
Trois fois	174	95	E	F	1 907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	G
Total	1 542	H	3 517	2 445	I

- $A + 82 + 415 + 147 = 666$, donc $A = 22$.
- $251 + 418 + 923 + 317 = G$, donc $G = 1\ 909$.
- $415 + 1\ 243 + 552 + E + 923 = 3\ 517$, donc $E = 384$.
- $147 + 589 + 138 + F + 317 = 2\ 445$, donc $F = 1\ 254$.
- $I = 12\ 527$ (lecture dans l'énoncé).
- $1\ 542 + H + 3\ 517 + 2\ 445 = 12\ 527$, donc $H = 5\ 023$.
- $22 + 682 + D + 174 + 251 = 1\ 542$, donc $D = 413$.
- $82 + B + 634 + 95 + 418 = 5\ 023$, donc $B = 3\ 794$.
- $666 + C + 1\ 737 + 1\ 907 + 1\ 909 = 12\ 527$, donc $C = 6\ 308$.

2. (a) La formule de Laplace (utilisable car chacun des tirages est supposé équiprobable) donne une probabilité de
$$\frac{1\ 737}{12\ 527} \approx 0,14.$$

(b) La formule de Laplace (utilisable car chacun des tirages est supposé équiprobable) donne une probabilité de
$$\frac{1\ 542 + 5\ 023}{12\ 527} = \frac{6\ 565}{12\ 527} \approx 0,52.$$

(c) La formule de Laplace (utilisable car chacun des tirages est supposé équiprobable) donne une probabilité de
$$\frac{317 + 1\ 254}{12\ 527} = \frac{1\ 571}{12\ 527} \approx 0,13.$$

Exercice 2 L'utilisateur choisit un nombre. Nommons ce nombre x.

Deux cas sont envisagés par le programme :

- si $x < 10$, alors celui-ci retourne le résultat $5 \times x + 3$;
- si $x \geq 10$, alors celui-ci retourne le résultat $2 \times x - 7$.

1. Si $x = 7$, comme $7 < 10$, le programme va retourner le résultat $5 \times 7 + 3$, c'est-à-dire 38.

2. Si $x = 12,7$, comme $12,7 \geq 10$, le programme va retourner le résultat $2 \times 12,7 - 7$, c'est-à-dire $18,4$.
3. Si $x = -6$, comme $-6 < 10$, le programme va retourner le résultat $5 \times (-6) + 3$, c'est-à-dire -27.

Exercice 3

Affirmation 1 "117 est un nombre premier".

Faux ! $117 = 3 \times 3 \times 13$ et donc 117 est divisible par d'autres nombres que 1 et/ou lui-même (comme par exemple par 3), ce qui nie qu'il puisse être premier.

Affirmation 2a "Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8".

Vrai !

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= (n^2 + 4 \times n + 4) - (n^2 - 4 \times n + 4) \\ &= n^2 + 4 \times n + 4 - n^2 + 4 \times n - 4 \\ &= 8 \times n\end{aligned}$$

Affirmation 2b "Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 32".

Faux ! Si on choisit n vaut 2, le nombre $(n+2)^2 - (n-2)^2$ vaut $(2+2)^2 + (2-2)^2 = 16$ et 16 n'est pas un multiple de 32 (les multiples de 32 sont : 0, 32, 64, ... et 16 ne fait trivialement pas partie de cette liste).

Affirmation 3 "Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4".

Vrai ! 42 est un exemple : il est bien pair (car $42 = 2 \times 21$), supérieur à 7 (trivial), divisible par 3 (car $42 = 3 \times 14$), non divisible par 9 (les multiples de 9 sont : 0, 9, 18, 27, 36, 45, ... et 42 ne fait trivialement pas partie de cette liste) et non divisible par 4 (les multiples de 4 sont : 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44 ... et 42 ne fait trivialement pas partie de cette liste).

Affirmation 4 "6 est l'unique solution de l'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$".

Faux ! $x = 7$ est clairement une autre solution de cette équation (les deux membres de l'égalité sont nuls).

Affirmation 5 "On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20 % et 10 %. L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28 %".

Vrai !

L'aire du rectangle au départ est de $L \times \ell$ où L est la longueur et ℓ la largeur.

Après diminution, la largeur devient $\ell \times (1 - \frac{20}{100}) = \ell \times 0,8$ (diminution de 20 %) et la longueur devient $L \times (1 - \frac{10}{100}) = L \times 0,9$ (diminution de 10 %). L'aire du rectangle est donc devenue $(L \times 0,9) \times (\ell \times 0,8) = (L \times \ell) \times 0,72 = (L \times \ell) \times (1 - \frac{28}{100})$, ce qui correspond bien à une diminution de 28 %.

Affirmation 6 "Un rectangle a une largeur et une longueur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20 % et la longueur de 10 %. Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15 %".

Faux !

Le périmètre du rectangle au départ est de $2 \times (6\ cm + 9\ cm) = 30\ cm$.

D'un côté, une diminution de 15 % du périmètre du rectangle donne un périmètre de $30\ cm \times (1 - \frac{15}{100}) = 30\ cm \times 0,85 = 25,5\ cm$.
D'un autre côté, après diminution des côtés du rectangle, la largeur devient $6\ cm \times (1 - \frac{20}{100}) = 6\ cm \times 0,8 = 4,8\ cm$ (diminution de 20 %) et la longueur devient $9\ cm \times (1 - \frac{10}{100}) = 9\ cm \times 0,9 = 8,1\ cm$ (diminution de 10 %). Le périmètre du rectangle est donc devenu $2 \times (4,8\ cm + 8,1\ cm) = 25,8\ cm$.
Comme $25,5 \neq 25,8$, l'affirmation est fausse.

TROISIÈME PARTIE

Situation 1 : maternelle

1) Objectif : utiliser le nombre pour mémoriser une quantité. Aspect du nombre mobilisé dans cette situation : l'aspect **cardinal**.
2) **Élève A** Il ne réalise pas l'objectif : il n'utilise pas le nombre.
   Il réussit l'activité, ce qui lui permet de s'approprier la consigne. Il procède en faisant de la **correspondance terme à terme** : un biscuit avec une poupée (il fait autant de voyages que de poupées).

   Élève B On ne peut pas dire qu'il réalise l'objectif : on ne sait pas s'il utilise ou pas le nombre.
   Il réussit l'activité, ce qui lui permet de s'approprier la consigne. Mais on ne sait pas s'**il associe la configuration de doigts au nombre trois** ou s'il fait de la **correspondance terme à terme avec une collection témoin intermédiaire et déplaçable** : une poupée correspond à un doigt qui correspond également à un biscuit.

   Élève C Il réalise probablement l'objectif : on peut supposer qu'il dénombre les trois poupées et sait qu'il faut trois biscuits pour pouvoir approvisionner les trois poupées.

   Élève D Il ne réalise pas l'objectif : il n'utilise pas le nombre.
   Il réussit l'activité, ce qui lui permet de s'approprier la consigne. Il procède en faisant de la **correspondance terme à terme** : un biscuit avec une poupée (il amène tous les biscuits à proximité des poupées, en distribue un à chacun, et ramène le reste).
3) On peut limiter les élèves à un seul trajet. Permettre plusieurs trajets donne du sens à l'activité : les élèves peuvent s'approprier la tâche à réaliser. Limiter ensuite à un seul trajet permet de contraindre les élèves à utiliser le nombre sous son aspect cardinal pour réaliser la tâche.

Situation 2 : évaluations nationales CM2 (2012)

1) L'opération qui permet de résoudre est la **division exacte** : 9 litres pour 5 bidons identiques donc $9 \div 5 = 1,8$ litres pour 1 des bidons.
2) **Julia** Elle représente d'un côté les 9 litres par 9 bâtons et d'un autre côté les 5 bidons par 5 bâtons.
   Elle commence par mettre 1 litre par bidon et il lui reste 4 litres à répartir équitablement sur les 5 bidons. Elle transforme alors les 4 litres en 8 demi-litres et poursuit en mettant 1 demi-litre par bidon et il lui reste 3 demi-litres à répartir équitablement sur les 5 bidons.
   En fait, sa procédure s'apparente à la **division euclidienne** de 18 demi-litres par 5 : le quotient est 3 demi-litres et le reste est 3 demi-litres également. Il aurait fallu réaliser une division exacte et non pas une division euclidienne.

   Karima Il est difficile de remettre le brouillon dans l'ordre. On peut supposer qu'elle a commencé par **poser la division** (exacte ou euclidienne) de 9 par 5, mais cela n'a pas abouti (soit il a réalisé sciemment la division euclidienne qui ne répond pas au problème, soit il veut réaliser la division exacte sans en maîtriser la pose). Elle a donc essayé ensuite sur d'autres voies comme **le**

tâtonnement par une addition itérée de 5 fois la même quantité, mais les trois essais qu'elle a eu le temps de poser ($2,5+2,5+2,5+2,5+2,5$, $2,2+2,2+2,2+2,2+2,2$ et $1,4+1,4+1,4+1,4+1,4$) ne lui permettent pas de conclure correctement. Ses calculs additifs sont posés.

Louis Il procède par **tâtonnement multiplicatif** et **son tâtonnement est réfléchi** : il essaie $5\times 1,5=7,5$, c'est trop peu, $5\times 1,75=8,75$, c'est encore trop peu, $5\times 2=10$, c'est trop, $5\times 1,8=9$, c'est parfait. Ses calculs multiplicatifs sont posés.

3) On peut proposer à Louis : "Il faut 9,15 litres d'huile pour remplir complètement 5 bidons identiques. Quelle est la contenance, en litre, de chacun de ces bidons ?"

Le tâtonnement sera beaucoup plus long à réaliser et ne sera sans doute plus réalisable dans le temps imparti à cet exercice. Il devra donc aller vers une procédure plus experte : la division exacte posée. En effet, cette procédure permet de déterminer les décimales du quotient les unes après les autres, sans avoir besoin de tâtonner.

Situation 3 : évaluations nationales CM2 (2008)

1) La notion du programme concernée est la proportionnalité. Il s'agit ici d'une situation dans laquelle les quantités de farine, de lait, d'œufs, d'huile, de sel sont voulues proportionnelles au nombre de personnes : il s'agit donc de plusieurs situations de proportionnalité.

2) **Élève A** Propriété mixte additive et multiplicative de **linéarité** :

250 g de farine pour 6 personnes ;

donc 125 g de farine pour 3 personnes (la moitié) ;

donc 250 g + 125 g = 375 g de farine pour $6+3$ personnes (la somme).

La procédure est correcte, efficace, et les calculs sont corrects également.

Élève B Un retour à l'unité (on cherche la quantité de farine pour une personne) :

250 g de farine pour 6 personnes ;

donc $41,6$ g de farine pour 1 personne ($250\div 6$) (cette procédure n'est pas encouragée par les données de l'énoncé car le quotient exact est "périodique à partir d'un certain rang", car rationnel, soit $41,\overline{6}$ g et non pas décimal, comme le serait $41,6$ g) ; *Remarque : la division n'est pas menée à terme, mais vu qu'elle ne finit jamais, ce n'est pas blâmable.*

donc $41,6$ $g\times 9=374,4$ g de farine pour 9 personnes (le nonuple).

La procédure est correcte, les calculs sont corrects également, et c'est tout à fait satisfaisant pour un élève de CM2. La raison pour laquelle on ne retrouve pas la réponse de 375 g est que le quotient exact $250\div 6$ est en fait approché (tronqué au dixième) et non calculé exactement, et ce n'est pas bien grave en CM2.

Élève C Un retour à l'unité (on cherche la quantité de farine pour une personne) :

250 g de farine pour 6 personnes ;

donc 41 g de farine pour 1 personne ($250\div 6$) (cette procédure n'est pas encouragée par les données de l'énoncé car le quotient exact est "périodique à partir d'un certain rang", car rationnel et non pas décimal) ; *Remarque : la division n'est pas menée à terme, mais ici, on ne sait pas s'il s'agit*

d'une démarche réfléchie de l'élève pour obtenir un quotient approché au gramme près ou si l'élève pense à tort qu'une division euclidienne répond de façon exacte au problème.

donc 250 $g + 41\ g + 41\ g + 41\ g = 373\ g$ de farine pour $6 + 1 + 1 + 1 = 9$ personnes (la somme).

La procédure est correcte, les calculs sont corrects également, et c'est tout à fait satisfaisant pour un élève de CM2. La raison pour laquelle on ne retrouve pas la réponse de 375 g est que le quotient exact $250 \div 6$ est en fait approché (tronqué à l'entier) et non calculé exactement, et ce n'est pas bien grave en CM2.

3) Un choix de 300 g au lieu de 250 g aurait facilité un retour à l'unité (procédure choisie par les élèves B et C).

300 g de farine pour 6 personnes ;

donc 50 g de farine pour 1 personne $(300 \div 6)$; ...