

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2020 – Groupement 3

Bruno Loiseau

I.N.S.P.É. Lille - Hauts de France

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME

Partie A : Le grillage et le potager

1. (a) On sait que l'aire du potager doit être de 90 m^2 . Or, puisque $AEFG$ est un rectangle, cette aire s'exprime par la formule $AG \times GF$, où AG et GF sont exprimés en mètre¹. Dès lors que l'on suppose que $AG = 5 \text{ m}$, il en résulte que $GF = 90 : 5 \text{ m} = 18 \text{ m}$ et que, puisque $AGFE$ est un rectangle, la longueur de la clôture est (tenant compte de la porte de 1 m) $GF + FE - 1 \text{ m} = GF + AG - 1 \text{ m} = 18 \text{ m} + 5 \text{ m} - 1 \text{ m} = 23 \text{ m}$.
- (b) De même, si l'on suppose que $AG = 7,5 \text{ m}$, il en résulte que $GF = 90 : 7,5 \text{ m} = 12 \text{ m}$. Il en résulte que, puisque $AGFE$ est un rectangle, la longueur de la clôture est (tenant compte de la porte de 1 m) $GF + FE - 1 \text{ m} = GF + AG - 1 \text{ m} = 12 \text{ m} + 7,5 \text{ m} - 1 \text{ m} = 18,5 \text{ m}$.
2. (a) On sait, par les mêmes raisonnements que plus haut, que si $AG = x$ (en mètre) alors $GF = \frac{90}{x}$ (en mètre) et donc que, tenant compte de la largeur de la porte, la longueur $L(x)$ peut en effet s'exprimer par la formule

$$L(x) = x + \frac{90}{x} - 1.$$

- (b) Pour cette question, il importe de savoir que pour prouver que deux expressions algébriques (en x) sont égales, il faut un raisonnement général ; en revanche, pour prouver qu'elles ne le sont pas, il suffit de trouver une valeur de x pour lesquelles elles ne sont pas égales.

- i. Pour $x = 2$ on a

$$x + \frac{89}{x} = 2 + \frac{89}{2} = 2 + 44,5 = 46,5$$

tandis que pour $x = 2$ on a

$$x + \frac{90}{x} - 1 = 2 + \frac{90}{2} - 1 = 2 + 45 - 1 = 46$$

Les deux expressions ne sont pas égales lorsque $x = 2$, elles ne sont donc pas égales en général.

- ii. On a :

$$x + \frac{90}{x} - 1 = x + \frac{90}{x} - \frac{x}{x} = x + \frac{90 - x}{x}$$

Cette expression est donc correcte.

- iii. On a :

$$x + \frac{90}{x} - 1 = x + \frac{90}{x} - \frac{x}{x} = x + \frac{90 - x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{90 - x}{x} = \frac{x^2 + 90 - x}{x} = \frac{x^2 - x + 90}{x}$$

Cette expression est donc correcte.

- iv. Nous avons vu que pour $x = 2$, l'expression de départ vaut $46,5$. Or, pour $x = 2$, l'expression

$$\frac{x^2 + 89}{x}$$

vaut

$$\frac{4 + 89}{2} = \frac{93}{2} = 46,5$$

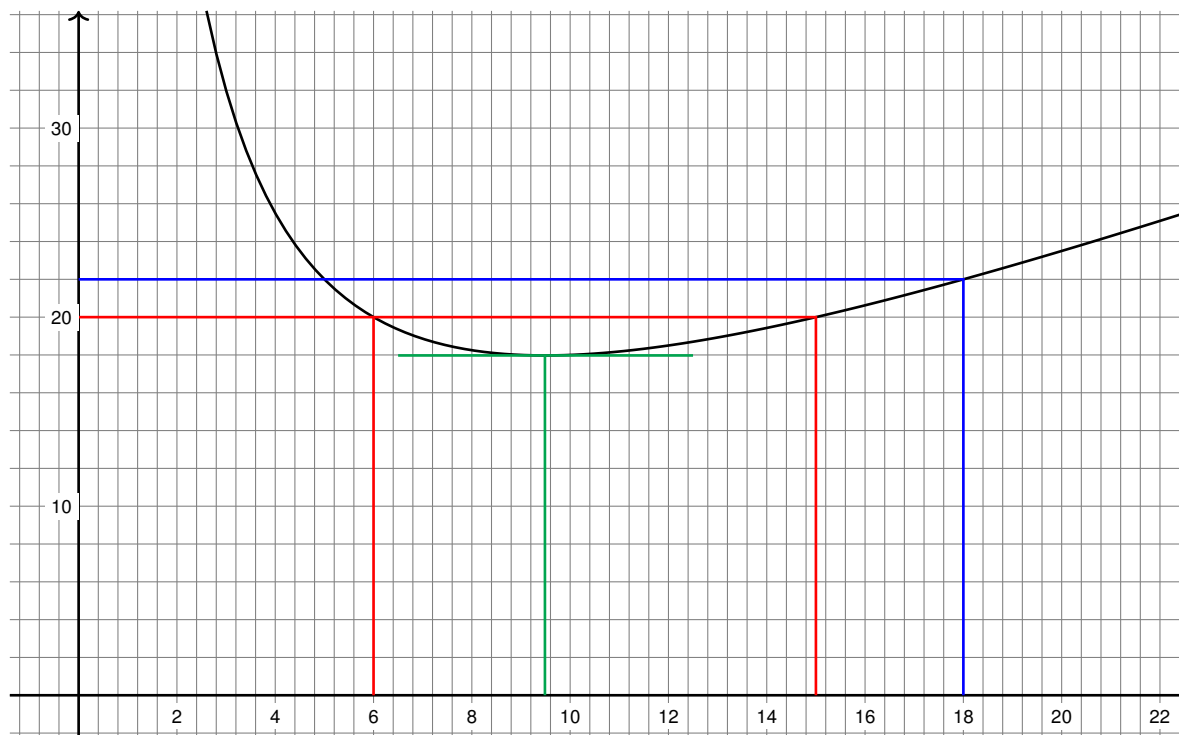
Cette expression n'est donc pas correcte.

1. Il nous semblerait plus naturel d'écrire « exprimés en mètres ». Toutefois nous constatons que dans tous les sujets, et ce depuis des années, le singulier est toujours utilisé. Nous en concluons que les auteurs des sujets, et, partant, les correcteurs, tiennent à ce singulier, et nous ne pouvons que conseiller aux candidats soucieux de ne pas perdre de point pour l'orthographe, de l'utiliser. Toutefois, nous tenons à préciser que nous nous sommes donné la peine de poser la question au Service du Dictionnaire de l'Académie Française, et que celui-ci nous a attesté que le singulier comme le pluriel sont tous deux corrects en l'occurrence.

3. Le candidat aura observé que les mailles de la grille sont de 0,4 en abscisses et de 2 en ordonnée. On peut donc lire sur le graphique :

- la longueur de grillage lorsque $AG = 18$ m est approximativement de 22 m (en bleu sur le graphique)
- Les valeurs possibles de AG lorsque la longueur de grillage est 20 m sont respectivement et approximativement 6 m et une valeur entre 14,8 m et 15,2 m (en rouge sur le graphique).
- Cette valeur est beaucoup plus délicate à déterminer graphiquement. Elle semble se situer entre 8,4 m et 10,4 m (en vert sur le graphique). La courbe est trop plate pour donner un emplacement plus précis ; le jury devrait admettre n'importe quelle valeur dans cet intervalle, ou encore que vous indiquiez que la valeur se trouve dans un certain intervalle plus ou moins large situé dans cette zone.

Remarque : En utilisant la formule de $L(x)$, on peut vérifier qu'en effet la longueur de grillage est exactement de 22 m lorsque $AG = 18$ m ; qu'elle est exactement de 20 m lorsque $AG = 6$ m, et également lorsque $AG = 15$ m, valeur que l'on peut conjecturer en lisant le graphe. En revanche déterminer la valeur minimum nécessite des outils relevant du lycée (on trouve $\sqrt{90} \text{ m} \approx 9,49 \text{ m}$).



Partie B : Le compost et le potager

- Le volume vaut $1,2 \text{ m} \times 1,6 \text{ m} \times 1,6 \text{ m} = 3,072 \text{ m}^3$.
- Après un mois, le bac initialement plein ne contiendra plus que $0,8 \times 3,072 \text{ m}^3 = 2,4576 \text{ m}^3$. Alternative-ment, on peut calculer 20 % de $3,072 \text{ m}^3$, soit $0,6144 \text{ m}^3$ et le retrancher de $3,072 \text{ m}^3$.
 - On peut utiliser la formule $=B2*0,8$ ou, alternativement, $=B2-B2/5$.
 - Le volume de compost nécessaire, exprimé en m^3 , est égal à l'aire à recouvrir multipliée par la hauteur, exprimés respectivement en m^2 et en m. On obtient donc un volume de $40 \text{ m}^2 \times 0,03 \text{ m} = 1,2 \text{ m}^3$. Or, d'après le tableau, on ne dispose que de $1,066 \text{ m}^3$ après 5 mois. On ne dispose donc pas de compost en suffisance.

Partie C : Achats de graines à planter

- Avec le tarif A : il faut 8 barquettes ($8 \times 5 = 40$) qui vont donc coûter $8 \times 1,20 \text{ €} = 9,6 \text{ €}$.
 - avec le tarif B : on n'atteint pas les 50 plants, donc on paie $40 \times 0,25 \text{ €} = 10 \text{ €}$.
 - Avec le tarif C : $3 \text{ €} + 40 \times 0,20 \text{ €} = 11 \text{ €}$.

Le tarif A est le plus avantageux.
- Le tarif A permet d'acheter $30 : 1,2 = 25$ barquettes de 5 plants, soit 125 plants.
 - Avec le tarif B, il est manifeste que pour 30 € on pourra acheter plus de 50 plants (puisque pour 10 € on en obtient déjà 40). On dispose donc du tarif réduit, c'est-à-dire que chaque plant coûtera $0,95 \times 0,25 \text{ €}$ (alternativement $0,25 - 0,05 \times 0,25$), soit $0,2375 \text{ €}$. Pour ce tarif, le nombre de plants que l'on peut donc

acheter est (le plus grand nombre entier inférieur ou égal à) $30 : 0,2375$. On obtient 126,3137... , ce qui signifie qu'on peut en obtenir exactement 126.

- Avec le tarif C, il faut d'abord payer la carte, après quoi il ne reste que 27 €. Ensuite on peut acheter 27 : 0,20 plants, soit 135 plants.

C'est donc ce tarif qui permet d'acheter le plus de plants.

3. Avec le tarif A, on paie $1,20 \text{ €} : 5 = 0,24 \text{ €}$ le plant (en faisant abstraction du fait qu'on doit acheter les plants par lots de 5, donc acheter un nombre de plants multiple de 5). Avec le tarif B, à partir de 50 plants, on les paie $0,2375 \text{ €}$ pièce. Il suffit donc de comparer le tarif B et le tarif C.

Avec le tarif C, on ne paie que 20 centimes par plant, mais on paie 3 € au départ. Par rapport au tarif B, on « récupère » 3,75 centimes à chaque plant. Dès lors, on aura récupéré les 3 € en achetant $3 : 0,0375 = 80$ plants. Donc pour 80 plants on paie le même montant avec les tarifs B et C, et à partir du 81ème le tarif C est plus avantageux.

Alternativement, on pouvait aussi obtenir le résultat par tâtonnement :

Nombre de plants	40	50	60	70	80	81
Tarif B (arrondi au centime)	10,00 €	11,88 €	14,25 €	16,63 €	19,00 €	19,24 €
Tarif C (arrondi au centime)	11,00 €	13,00 €	15,00 €	17,00 €	19,00 €	19,20 €

Pour 80 plants, les tarifs B et C sont égaux. Chaque plant supplémentaire coûte 23,75 centimes avec le tarif B et 20 centimes seulement avec le C, donc ce dernier est plus avantageux dès le 81ème plant.

Deuxième partie : EXERCICES

Exercice 1

1. Le programme met la valeur $6 + 5 = 11$ dans la variable **x**, puis la valeur $3 \times 5 = 15$ dans la variable **y**. Il va donc « dire » $11 \times 15 = 165$ pendant 20 secondes.
2. Le programme met la valeur $6 + 2,7 = 8,7$ dans la variable **x**, puis la valeur $3 \times 2,7 = 8,1$ dans la variable **y**. Il va donc « dire » $8,7 \times 8,1 = 70,47$ pendant 20 secondes.
3. Appelons r la valeur entrée dans « réponse ». Le nombre entré dans la variable **x** est alors $6 + r$, celui entré dans la variable **y** est $3r$, et le nombre « dit » pendant 20 secondes est $(6 + r) \cdot 3r$. Dès lors, ce nombre peut être 0 si et seulement si $6 + r = 0$ ou $3r = 0$, soit $r = -6$ ou $r = 0$. La réponse à la question est donc : le nombre rentré peut être -6 ou 0.

EXERCICE 2

Établissons un tableau des sommes possibles pour les deux tirages différents.
Pour Arthur :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pour Juliette :

Dé 1 \ Dé 2	1	3	3	4	6	8
1	2	4	4	5	7	9
2	3	5	5	6	8	10
2	3	5	5	6	8	10
3	4	6	6	7	9	11
3	4	6	6	7	9	11
4	5	7	7	8	10	12

2. En fait l'écrire dans un phylactère.

1. Chacune des cases des deux tableaux ayant la même probabilité $\frac{1}{36}$, on voit que Arthur avait 4 chances sur 36 d'obtenir un total 5, tandis que Juliette en avait 6. C'est donc elle qui avait le plus de chances.
2. En effet, on constate que les dés d'Arthur peuvent donner une somme 7 dans 6 cas, toutes les autres sommes arrivant moins de 6 fois. C'est donc bien la somme 7 qui a le plus de chances de tomber (une fois sur 6, en fait).
3. (a) Non. Un tableau d'effectifs ne permet jamais d'établir une probabilité exacte, et *a fortiori* ne permet pas de conclure que les nombres 6 et 7 avaient la même probabilité de tomber.
 (b) Et, de fait, ces deux probabilités ne sont pas égales. On observe six fois le nombre 6 dans le tableau des sommes, il y a donc 6 chances sur 36 d'obtenir une somme 6 avec le dé de Juliette, soit une probabilité $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. D'autre part, on n'observe que 5 fois la somme 7, celle-ci n'a que 5 chances sur 36 de sortir, soit une probabilité $\frac{5}{36}$.

EXERCICE 3

1. Pour 7, la somme des carrés des deux entiers qui lui succèdent est $8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$. La somme des carrés des deux entiers qui le précèdent est $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$. La différence entre ces deux sommes est $145 - 61 = 84$.
2. Pour 5, la somme des carrés des deux entiers qui lui succèdent est $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$. La somme des carrés des deux entiers qui le précèdent est $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. La différence entre ces deux sommes est $85 - 25 = 60$.
3. Le tableau permet de conjecturer que le résultat obtenu est égal à 12 fois le nombre de départ.
4. Partant d'un nombre n , il s'agit de calculer $(n+1)^2 + (n+2)^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2$. On peut par exemple :
 — Tout développer, en utilisant les identités remarquables sur le carré d'une somme ou d'une différence :

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 + (n+2)^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2 &= n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 - (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 4n + 4) \\
 &= \cancel{n^2} + 2n + \cancel{1} + \cancel{n^2} + 4n + \cancel{4} - \cancel{n^2} + 2n - \cancel{1} - \cancel{n^2} + 4n - \cancel{4} \\
 &= 12n
 \end{aligned}$$

- Développer séparément $(n+1)^2 - (n-1)^2$ et $(n+2)^2 - (n-2)^2$ et utilisant chaque fois l'identité remarquable sur la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 - (n-1)^2 &= ((n+1) + (n-1)) \cdot ((n+1) - (n-1)) \\
 &= 2n \cdot 2 \\
 &= 4n
 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
 (n+2)^2 - (n-2)^2 &= ((n+2) + (n-2)) \cdot ((n+2) - (n-2)) \\
 &= 2n \cdot 4 \\
 &= 8n
 \end{aligned}$$

ce qui donne au total $12n$.

EXERCICE 4

- a. Une rotation de 60 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre, de centre A .
- b. Une symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[BC]$. On peut également parler d'une rotation d'angle 180 degrés, indifféremment dans le sens des aiguilles d'une montre ou le sens inverse ; nous pensons toutefois que le mot *symétrie* était le mot attendu.
- c. Une translation transformant C en D (on dit aussi « de vecteur $\overrightarrow{CD}$ », mais ce terme n'est pas appris au collège et n'était donc pas attendu).

TROISIÈME PARTIE : PARTIE DIDACTIQUE

SITUATION 1

1. L'élève :
 — doit comprendre ce que signifie « décorer son train de la même façon que le train modèle », c'est-à-dire qu'il doit placer les mêmes décorations dans les cases qui se correspondent par la correspondance terme à terme évoquée dans le sujet,

- et il doit être capable de le réaliser, ce qui implique être capable de réaliser cette correspondance terme à terme et reconnaître et discriminer les images.
- 2. Les procédures utilisables pour décorer le train 1 restent valables pour décorer le train 2, mais elles nécessitent de maîtriser de plus grands nombres. Par exemple, un élève maîtrisant bien les nombres jusqu'à quatre mais pas (ou moins bien) au delà pourra réussir le premier train en comptant 4 cases à partir de la gauche pour le carré, puis 3 cases à partir de cette case pour l'astérisque, puis 3 à partir de la droite pour le disque. En revanche, sans connaissance de nombres plus grands, il ne pourra pas utiliser cette procédure pour le train 2, et devra par exemple décomposer quatre, quatre et encore un pour placer le carré.
- 3. Nous n'avons pas la moindre idée de ce que l'auteur du sujet attend. On pourrait interpréter cela comme la demande d'une procédure possible, mais le mot « doit » semble indiquer que tous les élèves devraient passer par ces mêmes étapes, qu'est-ce à dire ?
- 4. (a) Sacha peut placer le disque en comptant sur le modèle qu'il est dans la 7ème case à partir de la droite, en retenant ce nombre, et en cherchant cette case sur son train. Il ne peut pas procéder exactement de même (à partir de la gauche, et encore moins à partir de la droite) pour le carré et l'astérisque, situés respectivement à la 9ème et la 14ème place, puisqu'il ne sait compter que jusqu'à 8. Pour le carré, il peut compter jusqu'à 8 à partir de la gauche et constater que le carré est à la case suivante. Il peut alors retenir que c'est la case après la 8. Une fois qu'il a posé le carré, il peut voir que l'astérisque est 5 cases après le carré et ainsi la reproduire à la bonne place.
- (b) Pour autant que le maître l'autorise à déplacer son train quand il a fini, il peut venir le placer sous le modèle comme dans la phase 1, et ainsi vérifier si les bonnes images sont en correspondance.

SITUATION 2

1. (a) Le point commun est l'utilisation d'un dessin qui a permis aux élèves de fournir une réponse. Il y a cependant de nombreuses différences.
 - Malyan a dessiné les 18 gâteaux (ce qui était inutile, peut-être était-ce nécessaire pour lui permettre de se représenter le problème) et ensuite a dessiné les bonbons par paquets de quatre, puisque chacun des 18 élèves a reçu 4 biscuits. Il³ les a comptés et a fait une erreur de comptage.
 - Maëlys, elle, a représenté quatre rangées de 18 bonbons. Elle a compris qu'au lieu de 18 paquets de 4, elle pouvait représenter 4 rangées de 18, représentant la distribution : un premier à chacun, soit 18 bonbons distribués, un deuxième, soit 18 autres, etc. D'une certaine façon, c'est une « preuve » en image de la commutativité de la multiplication des entiers. Et surtout, elle s'en est servi en tentant le calcul $18 + 18 = 26 + 26 = 52$, que l'on peut interpréter comme : $18 + 18$ cela fait 2 rangées soit au total 26 (au lieu de 36 : l'élève semble avoir oublié la retenue dans un calcul peut-être réalisé mentalement), puis $26 + 26$ correspond à 2 rangées + 2 rangées, donc le tout. L'ordre dans lequel cela apparaît sur la feuille permet de penser qu'elle s'est d'abord lancée dans le calcul (donc en comprenant qu'elle pouvait faire 18 multiplié par 4 au lieu de 4 multiplié par 18) et qu'elle a ensuite fait le dessin pour vérifier. Le dessin est en outre mieux organisé que celui de Malyan, et en numérotant tous les bonbons elle a évité de faire une erreur.
- (b) Le point commun est qu'ils ont tous deux calculé 4×18 . La différence est que Bérénice l'a calculé comme une addition itérée $18 + 18 + 18 + 18$, tandis que Mila a effectué un calcul multiplicatif en ligne, en décomposant 18 en $10 + 8$ et donc 18×4 en $10 \times 4 + 8 \times 4$, parce qu'elle sait utiliser la distributivité et sait utiliser ses tables et multiplier un nombre à un chiffre par 10 (ou sait multiplier 10 par un nombre à un chiffre).
 On peut ajouter que Bérénice a estimé devoir justifier le nombre de gâteaux par le calcul 18×1 , ce qui n'est pas le cas de Mila.
Remarque : vous avez peut-être été surpris par le calcul de $16 + 16$ dans la copie de Bérénice. Il semble s'expliquer par le fait que pour calculer $8 + 8 + 8 + 8$, elle a fait $8 + 8 = 16$, puis $16 + 16 = 32$.
2. Si le nombre d'élèves passe de 18 à 32, le dessin utilisé par Martin pour soutenir ses calculs, et ses calculs eux-mêmes, deviendront plus lourds. Cela devrait le pousser
 - soit à améliorer sa technique : il regroupe en quelque sorte les élèves par 2, il pourrait les grouper par 4 et additionner ainsi de 16 en 16
 - soit, ce qu'espère sans doute plutôt le maître, renoncer à ce schéma et adopter celui de Maëlys, ou encore voir qu'il peut faire $32 + 32 + 32 + 32$.
3. La représentation de Maëlys est clairement une illustration des calculs de Bérénice : elle permet de voir que le nombre de bonbons est 18 multiplié par 4, c'est-à-dire $18 + 18 + 18 + 18$. On *peut* y voir (mais c'est probablement involontaire de la part de Maëlys) une illustration des calculs de Martin (4 multiplié par 18) si on y voit 18 colonnes de 4 bonbons. Cela illustre la commutativité de la multiplication⁴.

3. Nous supposons qu'il s'agit d'un prénom masculin.

4. L'utilisation de grilles multiplicatives est en effet un moyen de montrer la commutativité de la multiplication. Mais il ne faudrait pas

SITUATION 3

1. (a) — Élève A : cette réponse ne peut être acceptée, pour deux raisons. La première est qu'elle peut renforcer l'idée qu'un nombre décimal est « un nombre à virgule », alors qu'un nombre décimal peut être écrit sans virgule, soit sous forme de fraction décimale ou d'entier accompagné d'une fraction décimale inférieure à l'unité, soit parce que c'est un entier. La seconde est que cela ne suffit pas à comprendre à quel place elle doit se trouver dans l'écriture du nombre.
 - Élève B : si l'on définit de manière scrupuleuse la notion de partie décimale, ainsi que ce que l'on entend par « séparer », cette proposition n'est pas incorrecte. Mais elle risque de renforcer chez de nombreux élèves la représentation incorrecte d'un décimal comme deux nombres entiers, la partie entière et la partie décimale, séparés par une virgule.
- (b) On peut par exemple proposer :

« Dans l'écriture « à virgule » d'un nombre décimal, la virgule sert à indiquer l'emplacement du chiffre des unités : on l'écrit juste après lui. Ainsi, le chiffre des unités dans 123,45 est 3, car la virgule est écrite juste après lui ; et le chiffre des unités dans 1234,5 est 4. »
2. (a) L'élève a bien compris que 2,5 est un recodage pour 2 et 5 dixièmes. Il additionne séparément les unités et les dixièmes, ce qui est correct en soi. Il commet une erreur dans l'addition des dixièmes : il aurait dû obtenir 47 dixièmes. D'ailleurs, le périmètre de la figure est bien de 9 unités et 47 dixièmes d'unité. Mais sa difficulté majeure réside dans la maîtrise du codage des fractions décimales par des écritures à virgule, et de l'importance que la fraction décimale soit ou non inférieure à l'unité : pour la fraction décimale $\frac{34}{10}$, il ne voit pas qu'on peut la décomposer en 3 et 4 dixièmes, et surtout, à la fin, il ne voit pas que 47 dixièmes peut se décomposer en 4 unités et 7 dixièmes. Il commet ensuite l'erreur de considérer que puisqu'il a un résultat sous la forme « un entier plus un certain nombre de dixièmes », il peut l'écrire « l'entier virgule ce nombre », sans réaliser que cela ne fonctionne que si le nombre de dixièmes est inférieur à dix.
- (b) Pour ce qui est de l'erreur d'addition, nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une étourderie (l'élève a pu, par exemple, oublier d'additionner le 5 final) et qu'il devrait suffire de la lui faire remarquer. Pour l'essentiel, on observe deux difficultés : comprendre qu'une fraction décimale dont le numérateur est supérieur au dénominateur peut se décomposer en une somme d'un entier et d'une fraction décimale dont le numérateur est inférieur au dénominateur ; en l'occurrence que $\frac{34}{10} = 3 + \frac{4}{10}$; et d'autre part qu'une écriture du type « un entier plus une fraction décimale » ne peut s'écrire « l'entier virgule le numérateur de la fraction » que si le numérateur est strictement inférieur au dénominateur, en l'occurrence $9 + \frac{42}{10} \neq 9,42$ car $42 \not< 10$.

Pour la première difficulté, on pourrait lui proposer de représenter sur une demi-droite graduée en dixièmes $\frac{34}{10}$ et $3 + \frac{4}{10}$.

Pour la deuxième difficulté, à supposer que la première a été levée. On peut lui demander si $\frac{47}{10}$ ne peut pas être décomposé en un entier et un certain nombre de dixièmes, pour qu'il trouve la décomposition 4 et 7 dixièmes.

que ce moyen fasse oublier qu'il y en a d'autres. Le raisonnement sous-jacent à la production de Maëlys, décrit plus haut, est également intéressant.