Corrigé de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2020 – Groupement 5

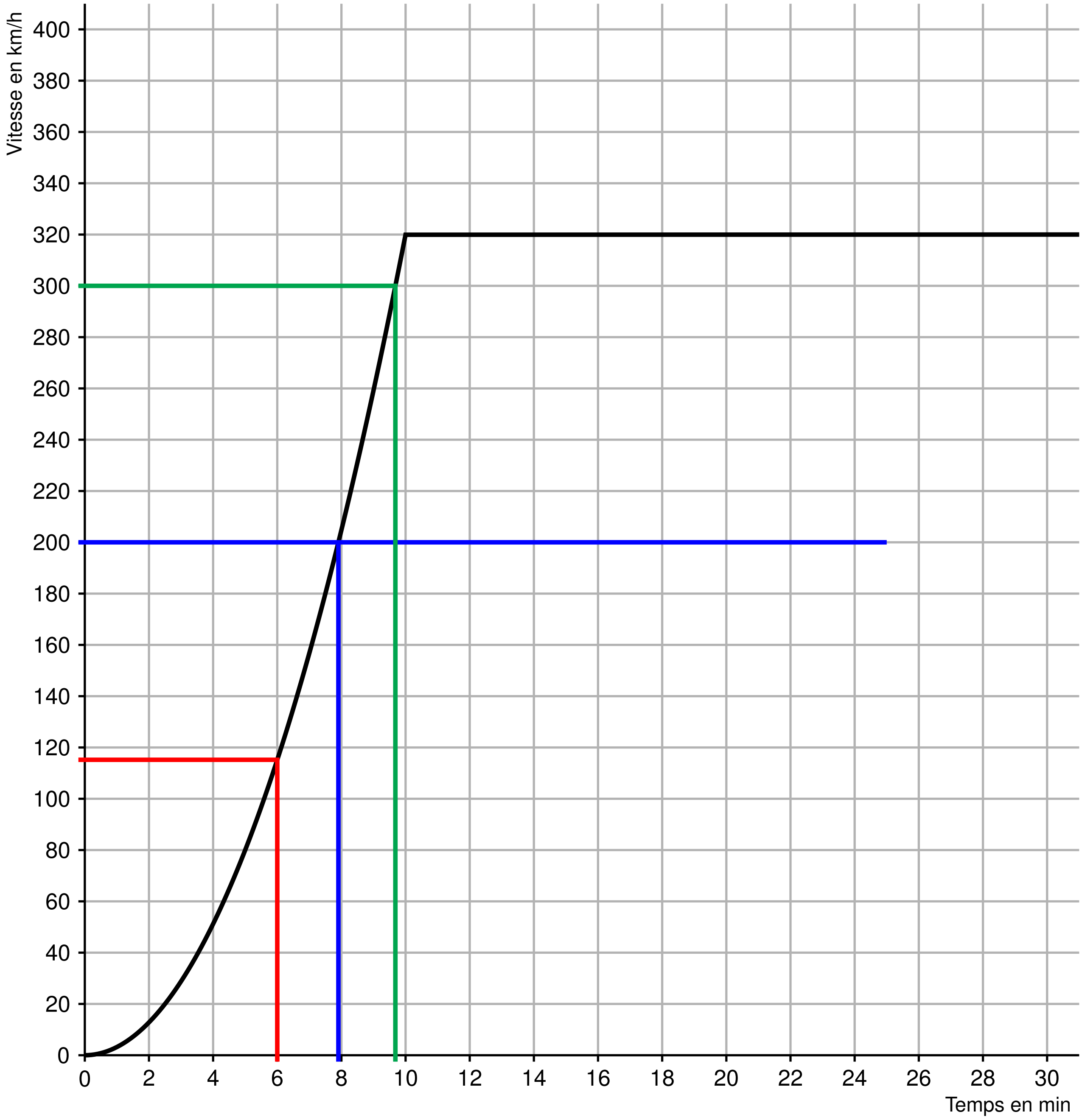
Bruno Loiseau

I.N.S.P.É. Lille - Hauts de France

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME

Partie A : Vitesse d'un train

1. Voici le graphique sur lequel nous nous baserons :



(a) La graduation sur l'axe des ordonnées étant de 20 km/h en 20 km/h, et sachant qu'on lit (en rouge) que la vitesse atteinte après 6 minutes est entre 100 km/h et 120 km/h, on peut affirmer qu'elle est égale à 110 km/h à 10 km/h près. Toutefois, il est manifeste que cette vitesse est plus proche de 120 km/h que de 100 et qu'il est donc raisonnable de répondre 120 km/h, même si l'on ne peut pas clairement voir si la réponse est plus proche de 110 que de 120.

(b) On lit (en bleu)que la seule valeur de t dans l'intervalle considéré qui est telle que $V(t) = 200$ est environ 8. Cela signifie qu'il faut environ 8 minutes pour atteindre la vitesse de 200 km/h.

(c) On lit (en vert) que la valeur de t pour laquelle la vitesse est 300 km/h est entre 8 et 10 minutes. Cependant, « on voit bien » que cette valeur est plus proche de 10 minutes que de 8, et est donc comprise entre 9 et 10 minutes.

2. Nous ne pouvons que déplorer l'ambiguïté de l'expression « entre la quinzième minute et la vingtième minute », mais nous supposons que cela signifie « entre le début de la quinzième minute et le début de la vingtième », soit sur une durée de 5 minutes[1]. On lit sur le graphique que la vitesse est constante pendant toute cette durée, soit 320 km/h. Étant donné que 5 minutes, c'est un douzième d'heure, la distance parcourue est douze fois plus petite que la distance parcourue en une heure, soit 320 km : 12 $\approx$ 26,7 km, soit, arrondi au kilomètre, 27 km.

3. (a) Puisque la vitesse est 259,2 km/h à l'instant $t = 9$ et 320 km/h à l'instant $t = 10$, on déduit que l'instant où elle vaut 300 km/h est bien entre ces deux instants.

   (b) Puisque la vitesse est 294,91 km/h à l'instant $t = 9,6$ et 301,09 km/h à l'instant t=9,7, on déduit que l'instant où elle vaut 300 km/h est bien entre ces deux instants. Ce qui fournit bien un intervalle d'amplitude 0,1.

4. (a) $v(6) = 2,3 \times 6^2 = 3,2 \times 36 = 115,2$

   (b) `=3,2*B1*B1` ou `=3,2*B1^2` , ou les mêmes avec `B$1` .

   (c) Il faut poser l'équation
$$3,2 \times t_0^2 = 300$$
soit
$$t_0^2 = \frac{300}{3,2} = 93,75$$
donc, en valeur exacte,
$$t_0 = \sqrt{93,75}.$$
La calculatrice fournit la valeur 9,6825… approximativement. On demande d'arrondir à la seconde près, ce qui nécessite de convertir en minutes et secondes. En exprimant la partie décimale de cette durée en minute, on trouve $0,6825\ldots \text{min} = 0,6825 \times 60 \text{ s} = 40,95\ldots$ s. En arrondissant à la seconde : 9 minutes 41 secondes.

5. (a) Si on entre la valeur 6, le programme constatera que $6 < 10$ et fournira la réponse 320.

   (b) Si on entre la valeur 15, le programme constatera que $15 \not< 10$, calculera $3,2 \times 15 \times 15 = 720$ et fournira cette réponse 720.

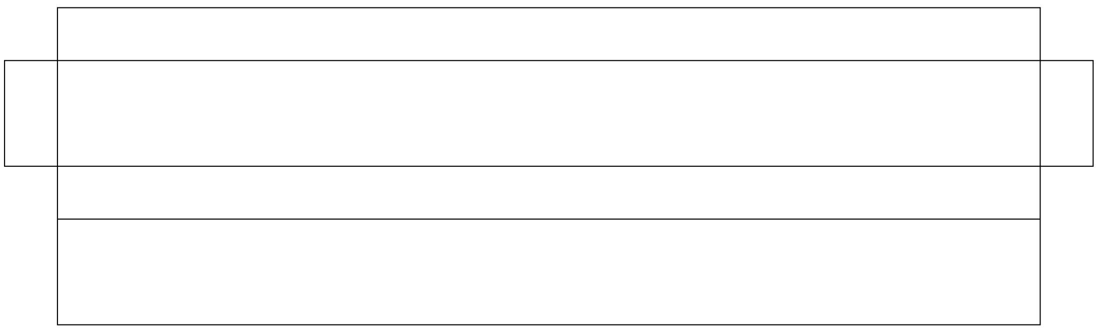
   (c) L'élève s'est trompé : c'est lorsque $t \geqslant 10$ que la vitesse est 320 km/h et lorsque $t \leqslant 10$ qu'elle vaut $3,2 \times t^2$ (nous écrivons $\geqslant$ et $\leqslant$ parce que les deux formules donnent le même résultat lorsque $t = 10$).

   (d) L'élève doit donc corriger la condition `t < 10` en `t > 10` ou inverser les instructions de la boucle « Si… Alors… Sinon…

PARTIE B : Traverses de chemin de fer

1. 4 pieds et 8,5 pouces équivalent à $4 \times 12 + 8,5$ pouces, soit 56,5 pouces. Puisqu'un pouce équivaut à 2,54 centimètres, 56,5 pouces équivalent à $56,5 \times 2,54$ cm $= 143,51$ cm. On arrondira doncà 143,5 cm.

2. (a) La longueur sera représentée par un segment de 2,60 m : 20 = 0,13 m = 13 cm ; la largeur, par un segment de 28 cm : 20 = 1,4 cm ; et l'épaisseur par un segment de 14 cm : 20 = 0,7 cm. Voici un patron possible :



1. Il est probable que la plupart des candidats n'aient même pas tenté d'interpréter cette phrase et, y voyant une différence, ont soustrait 15 de 20. Toutefois certains pourraient avoir considéré que « entre la quinzième et la vingtième minute », c'est la seizième, la dix-septième, la dix-huitième et la dix-neuvième, soit 4 minutes, ou au contraire que ce sont toutes les minutes de la quinzième à la vingtième, soit 6 minutes. Toutes les interprétations nous semblent recevables. Cela ne change pour la suite que les résultats obtenus, le raisonnement ne changeant pas.

(b) Note préliminaire : il y a une erreur de vocabulaire dans l'énoncé, ce qui est donné est la masse volumique du chêne sec, et non sa densité. Cette erreur ne devrait pas trop troubler les candidats, l'expression « 690 kg/m^3 » parlant d'elle-même.
Puisque la masse volumique est donnée en kg par m^3 et puisque la masse est demandée en kg, il est naturel d'exprimer le volume en m^3, donc de convertir en mètres les dimensions de la traverse qui sont exprimées en cm. Ainsi, le volume de la traverse est

$$2,6 \times 0,28 \times 0,14 \text{ m}^3 = 0,10192 \text{ m}^3$$

et sa masse est donc

$$0,10192 \text{ m}^3 \times 690 \text{ kg/ m}^3 = 70,3248 \text{ kg}.$$

Cette masse arrondie au kg est donc égale à 70 kg.

3. (a) Pour répondre à cette question, il faut comprendre que pour qu'il y ait le même nombre de traverses par kilomètre, ici 1520, quel que soit le point de départ de ce kilomètre, il faut aussi qu'il y ait ce même nombre d'écarts entre traverses sur ce même kilomètre, ce qui implique

$$1520 \times (0,28 + d) = 1000$$

d'où

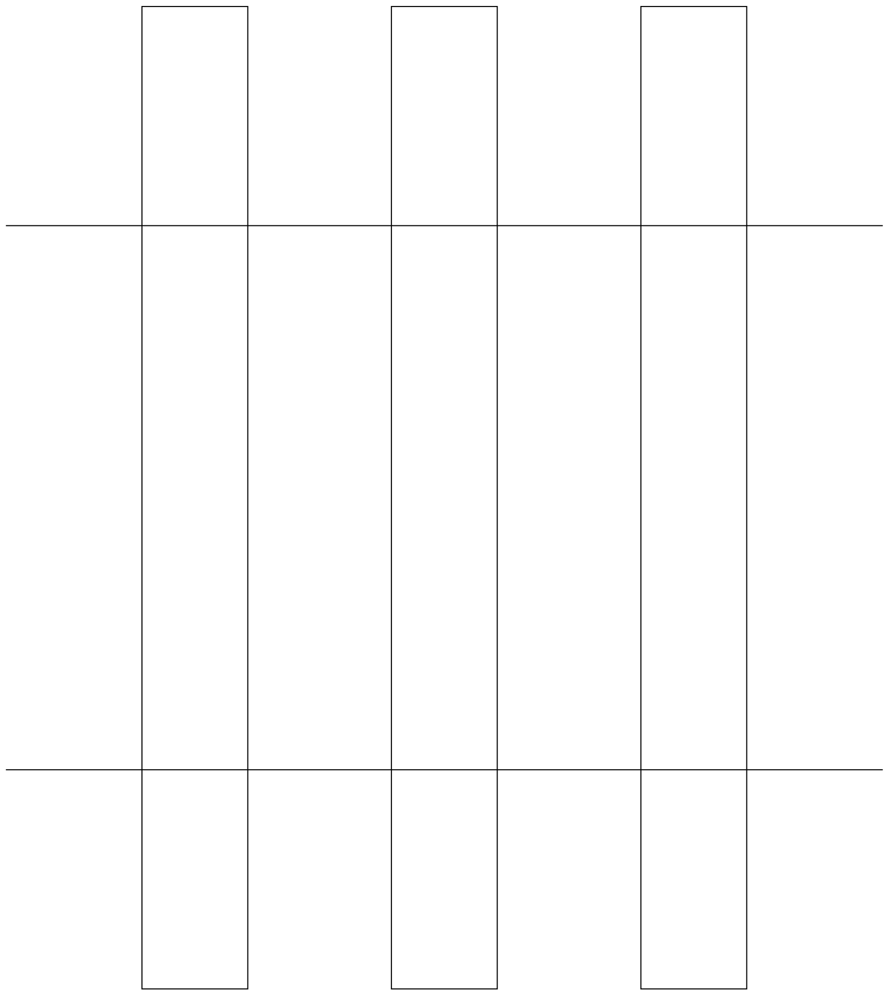
$$1520 \times d = 1000 - 1520 \times 0,28 = 574,4$$

donc

$$d = \frac{574,4}{1520} = 0,37789\ldots$$

La valeur de d, en mètre, arrondie au centimètre, est donc 0,38.

(b) Nous avons déjà les mesures des traverses sur la figure : 13 cm et 1,4 cm. L'écart entre traverses sera représenté par 0,38 m : 20 = 0,019 m = 1,9 cm. L'écart entre les rails, calculé plus haut est 143,5 cm. Il sera donc représenté par 143,5 cm : 20 = 7,175 cm, qu'on arrondira à 7,2 cm. On a donc la figure suivante (la longueur des rails n'a pas d'importance)



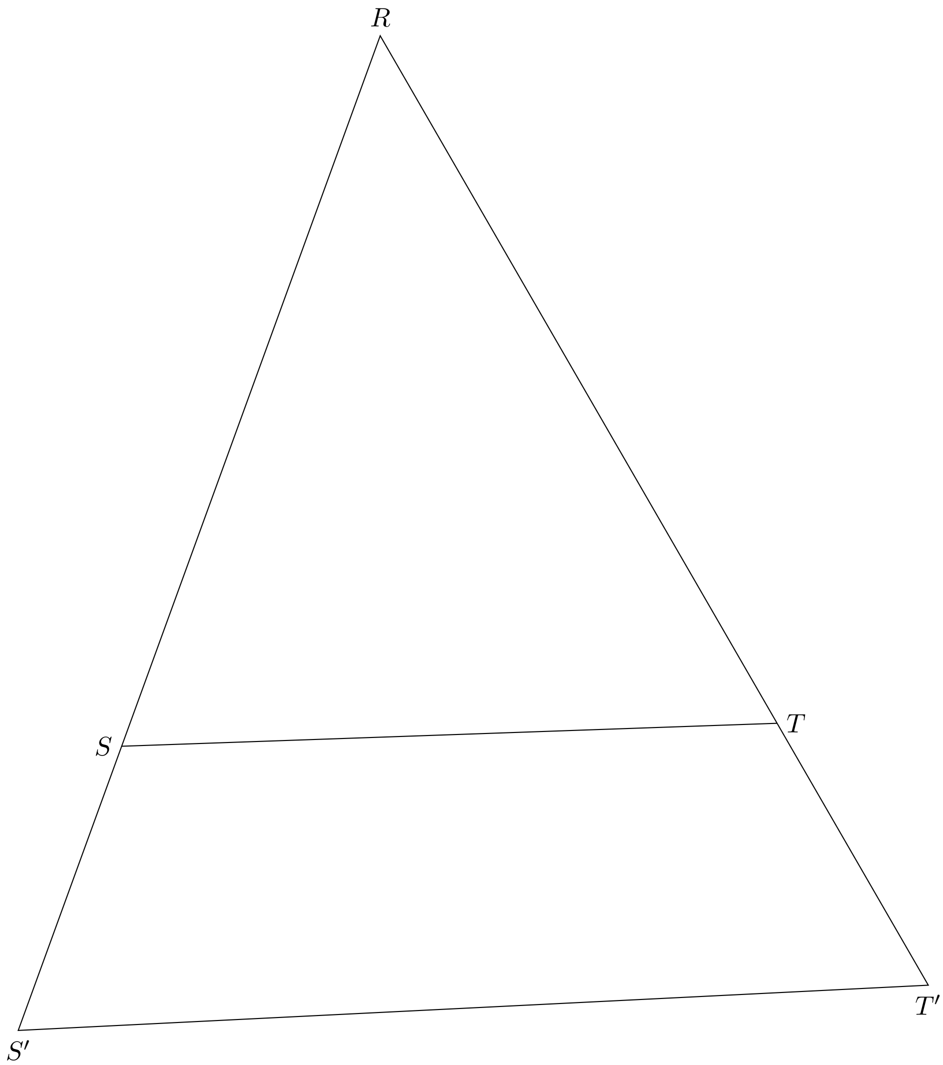
DEUXIÈME PARTIE : EXERCICES

EXERCICE 1

— Affirmation 1 : la fraction se simplifie en $\frac{3}{5} = 0,6$, c'est un nombre décimal. L'affirmation est vraie.
— Affirmation 2 : Affirmation fausse. En effet, en posant $a = 1$ et $b = 0,5$ on a $a : b = 2 > a$, alors que a et b sont bien des nombres décimaux positifs non nuls.
— Affirmation 3 : Affirmation vraie. Considérons trois nombres entiers consécutifs et appelons n le deuxième. Alors le premier est $n - 1$ et le troisième $n + 1$. La somme des trois sombres est $n - 1 + n + n + 1 = 3n$, c'est bien un multiple de 3 puisque cela s'écrit comme un entier multiplié par 3.
On serait arrivé à la même conclusion en appelant n le premier des trois nombres, mais la somme des trois aurait été $3 \times n + 3 = 3 \times (n + 1)$.
— Affirmation 4 : Affirmation fausse. Les diviseurs de 42 sont 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. On en compte 8.
Notons un autre argument. Lorsque l'on trouve un diviseur d d'un nombre n, le quotient n/d est lui aussi un diviseur, différent de d sauf si n est un carré parfait et si d en est la racine carrée. Ainsi, les diviseurs d'un nombre, autre qu'un carré parfait, vont toujours « par deux » : 42 n'étant pas un carré parfait, il a donc un nombre pair de diviseurs et ne peut en avoir 7 exactement.

EXERCICE 2 :

1. Notons préalablement que vu l'énoncé de la question 2, on peut supposer que la réponse à la question 1 est négative. Une difficulté propre à cet exercice est que si, pour en avoir une idée, on fait une figure, cela donne bien l'impression d'être parallèle. Mais il est difficile de savoir : on ne peut jamais avoir la certitude que des droites sont parallèles par un simple dessin. D'où la difficulté : faut-il chercher à prouver que les droites sont parallèles ou non ?



Nous allons essayer de prouver que les droites ne sont **pas** parallèles. Rappelons deux manières de démontrer qu'une affirmation A est fausse.

— **Le raisonnement par l'absurde :** on suppose que A est vrai et on regarde si on peut en déduire une contradiction, ou à quelque chose de faux. Si c'est le cas, on conclut que A ne peut être vrai, donc est faux.
— **Le raisonnement par contraposition :** on cherche un théorème dont l'hypothèse est A (donc un théorème de la forme « Si A est vrai, alors B est vrai ». On sait en effet qu'un tel énoncé est équivalent à sa contraposée : « Si B est faux, alors A est faux ». On va donc chercher à démontrer que B est faux, et on en déduira que A est faux.

Nous proposons ici les deux types de raisonnement.

— **Raisonnement par l'absurde :**Si les droites (ST) et $(S'T')$ étaient parallèles, les triangles RST et $RS'T'$ seraient dans une position de Thalès et seraient donc semblables (leurs côtés seraient proportionnels). On aurait donc en particulier

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'}$$

soit

$$\frac{10}{14} = \frac{10,5}{14,5}$$

ce qui est faux (on obtient approximativement 0,714 et 0,724 respectivement). Donc il n'est pas possible que ces droites soient parallèles.

— **Raisonnement par contraposition :** On cherche donc un théorème qui aurait la forme : « Si les droites sont parallèles, alors... ». On peut tout de suite penser au théorème de Thalès : « Si $(ST) /\!\!/ (S'T')$, alors

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'} = \frac{ST}{S'T'}$$

La forme contraposée de ce théorème est : S'il est faux que

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'} = \frac{ST}{S'T'}$$

alors il est faux que $(ST) /\!\!/ (S'T')$. Nous allons donc chercher à montrer qu'il est faux que

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'} = \frac{ST}{S'T'}$$

et en appliquant la contraposée de l'énoncé du Théorème de Thalès, on en déduira qu'il est faux que $(ST) /\!\!/ (S'T')$. On pourrait penser qu'il y a un souci, parce qu'on ne sait rien sur ST et sur $S'T'$. Mais cela n'a pas d'importance ! En effet, dire qu'il est faux que

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'} = \frac{ST}{S'T'}$$

revient à die que parmi ces trois rapports, il y en a au moins deux différents. Calculons les deux rapports que l'on peut calculer :

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{10}{14} \approx 0{,}714$$
$$\frac{RT}{RT'} = \frac{10,5}{14,5} \approx 0{,}724$$

Ainsi, ces deux rapports sont différents, donc il est faux que

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'} = \frac{ST}{S'T'}$$

donc il est faux que $(ST) /\!\!/ (S'T')$.

2. Par exemple par produit en croix, et en utilisant l'égalité entre le premier et le troisième rapport dans la remarque précédente :

$$TT' = \frac{SS' \times RT}{RS} = \frac{4 \times 10,5}{10} \text{ cm} = 4,2 \text{ cm}.$$

Si on ne connaissait pas cette propriété, il fallait d'abord calculer RT', par exemple par produit en croix :

$$RT' = \frac{RS' \times RT}{RS} = \frac{14 \times 10,5}{10} \text{ cm} = 14,7 \text{ cm}.$$

et en déduire $TT' = RT' - RT = 14,7$ cm $- 10,5$ cm $= 4,2$ cm.

Remarque : Comme nous l'avons rédigé, le fait que $TT' = 4,2$ cm n'apparaît que comme une condition nécessaire pour que les droites soient parallèles (le raisonnement a été, finalement : si les droites sont parallèles, alors on a une série de rapports égaux qui permettent d'affirmer que $TT' = 4,2$ cm). Cela nous semble être une réponse satisfaisante à la question posée, parce qu'on demandait la longueur que DOIT avoir le segment $[TT']$ pour que les segments en question soient parallèles ; on ne demandait pas de démontrer que le fait que si $[TT']$ ait cette longueur garantit qu'effectivement ils sont parallèles (condition suffisante). Pour le montrer, il faudrait remonter le fil en montrant qu'en posant $TT' = 4,2$ cm, on a l'égalité de rapports

$$\frac{RS}{RT} = \frac{RS'}{RT'}$$

et en déduire par la réciproque du théorème de Thalès que les droites (ST) et $(S'T')$ sont parallèles.

EXERCICE 3

Rappelons que dire qu'un nombre est divisible par un second revient à dire que le second est multiple du premier. Il est parfois plus commode, dans la suite de ce raisonnement, de parler en termes de multiples.

1. (a) Si N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ avec a, b, c entiers compris entre 0 et 9, alors le nombre M formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est $10 \times b + c$; en d'autres termes, $N = 100 \times a + M$. Or 100 est multiple de 4 ($100 = 25 \times 4$, donc $a \times 100$ en est un aussi. Dès lors, si le nombre M est lui aussi un multiple de 4, le nombre N en est un, comme somme de deux multiples de 4.
   Pour aller plus loin. . .
   Dans cet exercice, on parle de nombre à trois chiffres, et a est le chiffre des centaines. De manière générale, si N est un nombre quelconque, si b et c sont respectivement son chiffre des dizaines et son chiffre des unités, et si a est son **nombre** de centaines, alors, de même, N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ et le raisonnement ci-dessus s'applique également.

   (b) C'est faux. Le nombre formé par les deux derniers chiffres du nombre 100 (ou du nombre 108, ou du nombre 116, mais un exemple suffit) est divisible par 8 (ce sont respectivement 0, 8 et 16). Pourtant, aucun de ces trois nombres n'est divisible par 8 : par exemple, $100 = 8 \times 12,5$.

2. On a :

$$\begin{aligned} N - (a + b + c) &= a \times 100 + b \times 10 + c - (a + b + c) \\ &= a \times 100 + b \times 10 + c - a - b - c \\ &= a \times 100 - a + b \times 10 - b + c - c \\ &= a \times 99 + b \times 9 \\ &= 9 \times (a \times 11 + b) \end{aligned}$$

   Le calcul précédent montre que $N - (a + b + c)$ est toujours un multiple de 9 (ou divisible par 9), puisqu'il a la forme 9 multiplié par un nombre entier. Si en outre $a + b + c$ est lui aussi divisible par 9, alors, comme $N = (N - (a + b + c)) + (a + b + c)$, N s'écrit comme somme de deux multiples de 9, et est donc un multiple de 9, donc divisible par 9.

EXERCICE 4

Pour faire cet exercice, il est utile de réaliser un tableau à double entrée reprenant le résultat de l'expérience (c'est-à-dire la valeur du plus grand nombre sur les faces supérieures des deux dés) en fonction des résultats des deux dés :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les dés étant supposés équilibrés, chacune de ces 36 cas a la mêmeme probabilité (une chance sur 36) de se produire. Donc :

1. La probabilité que le résultat de l'expérience soit 2 est $\frac{1}{12}$, puisque ce résultat se produit dans 3 cas sur 36, donc avec une probabilité $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
2. On observe dans le tableau 11 cas dans lesquels le résultat est 6. La probabilité demandée est donc $\frac{11}{36}$.

3. On observe dans le tableau 9 cas dans lesquels le résultat est 3.La probabilité demandée est donc $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
4. Le résultat est inférieur ou égal à un nombre n chaque fois que chacun des résultats des deux dés est inférieur ou égal au nombre n, donc dans n^2 cas. La probabilité demandée est donc bien $\frac{n}{36}$.
5. Dire que le résultat est exactement égal au nombre n revient à dire qu'il est inférieur ou égal à n, mais pas à $n-1$. En utilisant la propriété qui dit que si un événement A est inclus à un événement B alors la probabilité que B arrive sans que A arrive, est égale à la différence entre la probabilité de B et la probabilité de A, **propriété qui n'apparaît ni dans les programmes du collège, ni dans le document d'accompagnement**, on en déduit que pour obtenir la probabilité que le résultat soit exactement égal à n il suffit de retrancher de la probabilité qu'il soit inférieur ou égal à n la probabilité qu'il soit égal à $n-1$, soit :

$$\begin{aligned} \text{P(le résultat est } n) &= \frac{n^2}{36} - \frac{(n-1)^2}{36} \\ &= \frac{n^2-(n-1)^2}{36} \\ &= \frac{n^2-n^2+2n-1}{36} \\ &= \frac{2n-1}{36} \end{aligned}$$

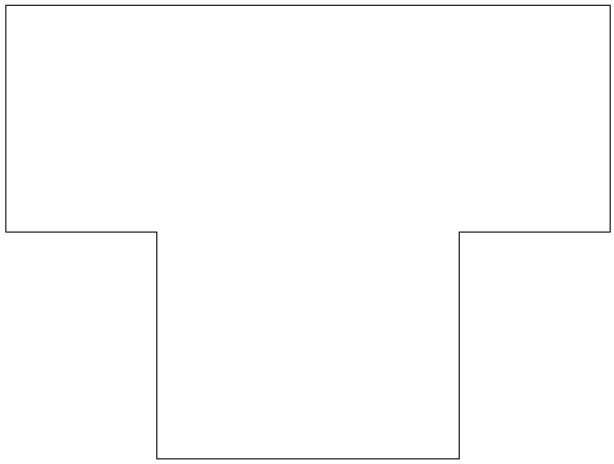
Remarque : Il était possible de déterminer cette probabilité sans faire cette gymnastique. Les cas dans lesquels le résultat est n sont :
— Les cas dans lesquels le dé 1 vaut n et le dé 2 vaut une valeur inférieure ou égale à n : il y en a n ;
— et les cas, différents des précédents, dans lesquels le dé 1 vaut strictement moins que n, et le dé 2 vaut n : il y en a $n-1$.
Il y a donc au total $2n-1$ tels cas.
Étant donné qu'il était demandé de *déduire* le résultat demandé du résultat précédent, il est probable que le jury ait refusé cet argument… à moins que l'un de ses membres, connaissant les programmes du collège, ait réalisé que la réponse attendue dépassait le cadre de ces programmes, et ait intercédé en faveur des candidats qui auraient répondu d'une telle manière.

TROISIÈME PARTIE : PARTIE DIDACTIQUE

SITUATION 1

1. Nous supposons que la réponse attendue à cette question est : « Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits » et « Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur ». Une troisième propriété possible est : « le rectangle est un quadrilatère ». Nous ne savons pas quelles justifications étaient attendues. Peut-être, tout simplement, « parce qu'on ne voit pas bien quelle construction on pourrait imaginer qui n'utilise pas ces deux propriétés ». Précisons :
   — L'élève va devoir tracer au moins deux angles droits. Pour cela, il a besoin de savoir qu'il y a un angle droit en tous les sommets du rectangle.
   — L'élève va devoir tracer un côté de 3 cm. Pour cela il a besoin de savoir que ce côté ne peut être opposé au côté de 5 cm et doit donc lui être adjacent.
   — L'élève va devoir tracer une figure avec 4 sommets !
   Voir le commentaire que nous faisons à la fin du corrigé de cette partie d'épreuve.

2. Nous proposons quelques erreurs :
   — Tracer le ou les angles droits perceptivement, sans utiliser l'équerre.
   — Avoir une conception erronée de la perpendiculaire, et la confondre avec une verticale, erreur d'autant plus envisageable que le segment auquel il faut construire une perpendiculaire est proche de l'horizontale. L'élève trace un segment vertical (ou qu'il espère être vertical, puisqu'il le fait vraisemblablement sans instrument adapté autre que la règle) au lieu d'un segment perpendiculaire au segment initialement tracé.
   — Tracer un segment de 2 cm au lieu d'un segment de 3 cm, parce que l'on place l'origine du segment sur le 1 et non sur le 0. Cette difficulté devrait être réglée avant l'arrivée au cycle 3, mais pourquoi pas ?
3. (a) — Élève 1 : sa définition ne convient pas puisqu'elle est vérifiée par n'importe quel parallélogramme.
   — Élève 2 : sa définition ne convient pas car le carré est effectivement un rectangle.
   — Élève 3 : sa définition ne convient pas, car il oublie de préciser qu'il s'agit d'un quadrilatère. Par exemple, le polygone suivant vérifie cette définition :



(b) Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Remarque :

Nous avons été étonné *a priori* par la première question. Parce qu'il y est écrit **vont devoir** (et non **vont pouvoir**), elle implique qu'il existe deux propriétés du rectangle que l'élève doit nécessairement utiliser, quelle que soit sa procédure. Nous nous sommes dès lors demandé si le jury attendait seulement l'énoncé des deux propriétés, s'il attendait une justification, et laquelle. Celle que nous avons formulée plus haut nous semble raisonnable.
Nous développons ici une argumentation beaucoup plus complète.
Nous avons estimé utile de regarder préalablement quelques constructions envisageables pour un élève de CM. Comme nous allons le montrer, il existe bien deux propriétés du rectangle que toutes ces procédures mobilisent (plus le fait que c'est un quadrilatère).Il se fait que toutes les procédures « raisonnables » auxquelles nous avons pensé commencent par tracer une perpendiculaire à $[AB]$ passant par A ou par B (pour fixer les choses, disons A) et y placer un point D à 3 cm de A. Ensuite :

— Procédure 1 : Tracer une perpendiculaire à (AD) passant par D et une perpendiculaire à (AB) passant par B. Nommer C leur intersection. Le quadrilatère $ABCD$ est bien un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

— Procédure 2 : Tracer une perpendiculaire à (AD) passant par D et y placer un point C à 5 cm de D, du même côté de (AD) que le point B. Tracer $[CB]$. Le quadrilatère $ABCD$ est bien un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

— Procédure 3 : Tracer une perpendiculaire à (AD) passant par D et y placer un point C à une distance 3 cm de B, du même côté de (AB) que D. Tracer $[DC]$. Le quadrilatère $ABCD$ est bien un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

— Procédure 4 : Tracer un (arc de) cercle centré en D et de rayon 5 cm et un (arc de) cercle centré en B et de rayon 3 cm. Leur intersection [2] fournit le point C. Tracer $[DC]$ et $[BC]$. Le quadrilatère $ABCD$ est bien un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

Toutes ces procédures commençant par les deux mêmes étapes, elles mobilisent forcément au moins toutes les propriétés que mobilisent ces deux étapes :

— Pour la première étape : Un rectangle a quatre angles droits (en effet, et même si, *in fine*, la procédure n'utilise qu'une fois ou deux la présence d'un angle droit, il faut, pour savoir qu'il est légitime de tracer un angle droit en A (par le biais d'une perpendiculaire à (AB), savoir que le rectangle a un angle droit à **chacun** de ses sommets, donc a quatre angles droits).

— Pour placer le point D : Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur, ou, ce qui revient logiquement au même : si deux côtés d'un rectangle ont des longueurs différentes, alors ces deux côtés sont consécutifs. Cette propriété est nécessaire pour savoir qu'il faut tracer D tel que $AD = 3$ cm. Notons qu'il ne fallait surtout pas écrire la propriété « deux côtés consécutifs d'un rectangle ont des longueurs différentes », qui n'est pas vérifiée par tous les rectangles.

SITUATION 2

1. Systématiquement, l'élève fournit une réponse de la forme

$$N + \frac{r}{d}$$

où

— d est le dénominateur de la fraction

2. En réalité, les cercles en question ont deux intersections. Mais l'une d'elles se trouve du même côté de la diagonale (DB) que le point A : il faut choisir l'autre. Dans la pratique, personne ne se pose la question, parce qu'on « vise » la bonne région du plan.

— r est le reste dans la division euclidiennedu numérateur par le dénominateur
— N est le plus grand nombre entier inférieur au numérateur, qui soit multiple du dénominateur,

alors que la réponse correcte est

$$q + \frac{r}{d}$$

où, en outre, q est le quotient dans la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
Étant donné que ce nombre N n'apparaît jamais lorsque l'on pose cette division, il est vraisemblable que l'élève n'ait pas utilisé la technique consistant à la poser et y reprendre les éléments nécessaires (technique relevant à notre avis plutôt du collège), mais a cherché (par tâtonnement ?) le plus grand multiple du dénominateur qui soit inférieur au numérateur. Il a oublié de le diviser par le dénominateur. En revanche, la partie fractionnaire est systématiquement correcte.

2. On pourrait demander à l'élève de placer sur une demi-droite graduée aussi bien les fractions proposées que ses réponses (au moins quelques-unes d'entre elles, notamment celles dont le numérateur n'est pas très grand). Par exemple, pour $\frac{7}{3}$, il devrait compter $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,…, $\frac{7}{3}$ et positionner correctement cette fraction, et constater qu'elle n'est pas égale à $6 + \frac{1}{3}$.

SITUATION 3

1. — En comptant sur ses doigts : l'élève dénombre les poissons en levant un doigt à la fois. Lorsqu'il a terminé, il a donc levé 6 doigts et peut compter les doigts restants, ou reconnaître immédiatement qu'il en reste 6.
   — En jouant sur des décompositions. Les poissons sont configurés de manière à faire penser à une configuration 5 et 1 (les 5 étant dans une configuration proche de la configuration 5 d'un dé ordinaire). Il peut voir alors qu'il manque 4 pour faire un deuxième 5, donc pour faire 10.
2. Au vu et au su de l'élève, on place 10 jetons dans une boîte initialement vide, et opaque. On retire 6 jetons qu'on montre à l'élève, et on lui demande combien de jetons il reste dans laboîte. Après avoir fourni une réponse, l'élève peut la valider ou l'invalider en regardant combien de jetons il reste dans la boîte.
3. Cela est utile pour les additions et les soustractions lorsqu'il y a passage à une dizaine supérieure ou inférieure. Par exemple :
   — Addition : pour faire $6 + 8$, je fais $6 + 10 = 16$, puis, comme j'ai ajouté trop, je retranche le complément à 10 de 8, soit 2 : $16 - 2 = 14$ est on obtient le résultat. Autre proposition : pour faire $8 + 6$, je cherche le complément à 10 de 8, soit 2. Je fais $8 + 2 = 10$, il reste à ajouter 4 (ceci utilise donc aussi la décompositon $6 = 2 + 4$).
   — Soustraction : Pour faire $17-8$, je fais $17-10 = 7$, puis j'ajoute le complément à 10 de 8, soit 2, pour obtenir 9. Autre proposition, basée sur le sens « écart » ou « complément » de la soustraction : : Pour aller de 8 à 17, combien manque-t-il ? De 8 à 10, on trouve un écart de 2 (résultat mémorisé comme complément de 8 à 10) et de 10 à 17 on trouve un écart de 7 (par surcomptage, par exemple, voire par compétences en numération) ; ainsi, de 8 à 17, l'écart est de $2 + 7 = 9$.

SITUATION 4

1. — Élève A : Pour les deux premières séries, il comprend la règle utilisée (ajouter systématiquement 7 dans la première, le soustraire dans la seconde). Il ne commet qu'une faute de calcul : $42 + 7 = 48$ (au lieu de 49), ce qui explique le résultat incorrect suivant. Pour la troisième, il n'a pas trouvé de règle qui convenienne pour la suite proposée, à savoir alternativement ajouter 14 et retrancher 7. Il s'est basé sur le fait que le dernier nombre de la série était le double du précédent, et a continué en doublant à chaque fois. Tous ses calculs sont corrects.
   — Élève B : Il commet deux erreurs de calcul dans la deuxième série : ajouter 7 ne semble pas lui poser de difficulté, mais il commet des erreurs lorsqu'il s'agit de retrancher 7. Ces erreurs sont au nombre de deux : $70 - 7 = 64$ et $50 - 7 = 44$. Le fait que ces erreurs aient systématiquement lieu lorsque le premier nombre est un multiple de 10 (a une écriture décimale qui se termine par 0) est peut-être significatif d'une difficulté de conception du zéro, mais on manque d'éléments pour l'affirmer. À noter que cet élève a trouvé la règle sous-jacente à la série 3.
   — Élève C : comme l'élève 1, il a compris la règle utilisée pour les deux premières séries, et ne commet qu'une erreur de calcul, dans la soustraction $42 - 7 = 34$ (au lieu de 35). Pour la série 3, n'ayant pas trouvé de règle, il n'a pas répondu.

   Il est à noter que la séance a eu lieu peu de temps après l'introduction de la table de 7 : les élèves ne la connaissaient pas encore suffisamment pour réaliser que les nombres qu'il devaient obtenir figuraient dans cette table, ce qui aurait permis de repérer leurs erreurs.
2. Comme $10 = 7 + 3$, pour retrancher 7 on peut retrancher 10 puis ajouter 3 (parce qu'en retranchant 10 on a retranché 3 de trop). Donc :

- $84 - 7 = 77$, car $84 - 10 = 74$ et $74 + 3 = 77$;
- $77 - 7 = 70$, car $7 - 7 = 0$;
- $70 - 7 = 63$, car $70 - 10 = 60$ et $60 + 3 = 63$;
- $63 - 7 = 56$, car $63 - 10 = 53$ et $53 + 3 = 56$;
- $56 - 7 = 49$, car $56 - 10 = 46$ et $46 + 3 = 49$;
- $49 - 7 = 42$, car $9 - 7 = 2$;
- $42 - 7 = 35$, car $42 - 10 = 32$ et $32 + 3 = 35$;
- $35 - 7 = 28$, car $35 - 10 = 25$ et $25 + 3 = 28$.