Probabilités

Denis Vekemans *

1 Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** vérifie trois conditions :

- elle est reproductible dans les mêmes conditions ;
- on connaît tous ces résultats possibles ;
- on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire lorsqu'on réalise l'expérience.

Chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé une **issue** de cette expérience. L'univers Ω d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues de cette expérience. Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω . Un événement A est **réalisé** par une expérience si celle-ci aboutit à une issue appartenant à A . Deux événements A et B sont **incompatibles** si ils ne peuvent pas être réalisés en même temps ce qui signifie que $A \cap B = \emptyset$. L'évènement **contraire** de A est noté $\bar{A}$ il vérifie $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (donc A et $\bar{A}$ sont incompatibles). Un événement qui ne comporte qu'une seule issue est un **événement élémentaire**. Des événements élémentaires distincts sont incompatibles.

2 Loi des grands nombres

Considérons une expérience aléatoire et A un événement relatif à cette expérience. Si on répète n fois cette expérience, l'évènement A sera réalisé un certain nombre de fois que l'on notera x_n . Lorsque n augmente, la fréquence $f_n = \frac{x_n}{n}$ tend à se stabiliser vers une valeur qui est la probabilité de l'évènement A et est notée $P(A)$.

3 Propriétés

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Si $P(A) = 1$, l'évènement A est appelé l'évènement certain et $A = \Omega$.
3. Si $P(A) = 0$, l'évènement A est appelé l'évènement impossible et $A = \emptyset$.
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

6. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
7. La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.

4 Situation d'équiprobabilité

Lorsque tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité on dit qu'ils sont équiprobables. Soit n le nombre d'éléments de Ω . Si tous les évènements élémentaires sont équiprobables alors la probabilité de chacun d'entre eux est $\frac{1}{n}$. Considérons un évènement A dans cette situation, alors $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{n}$ (le cardinal de A , noté $\text{card}(A)$, est le nombre d'éléments de A).

5 Exemples

1. Lancer un dé à 6 faces équilibrées et noter le nombre de points inscrits sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Notons A l'évènement "Obtenir un nombre pair", $A = \{2; 4; 6\}$.

Donc la probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Lancer deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Une des deux faces sera notée "p" (pour *pile*) et l'autre "f" (pour *face*). Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile" ?

$\Omega = \{(p; p); (p; f); (f; p); (f; f)\}$ et tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Notons A l'évènement "Obtenir au moins une fois *pile*", $A = \{(p; p); (p; f); (f; p)\}$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile" est de $\frac{3}{4}$.

3. Prendre au hasard et successivement sans remise deux boules dans une urne contenant 2 boules rouges et 2 boules vertes. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules identiques ? On note "r" la boule rouge et "v" la boule verte.

$\Omega = \{(r; r); (r; v); (v; r); (v; v)\}$ et tous les évènements élémentaires ne sont pas équiprobables. Soit A l'évènement "Obtenir deux boules identiques", $A = \{(r; r); (v; v)\}$.

La probabilité d'obtenir deux boules identiques est de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

6 Exercices non corrigés

Exercice 1 Un sac opaque contient des bonbons bleus, rouges ou verts, tous indiscernables au toucher. Quand on tire un bonbon au hasard, on a deux chances sur cinq de prendre un bonbon rouge, et trois chances sur dix de prendre un bonbon bleu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un bonbon rouge ou un bonbon bleu ?
2. En déduire la probabilité d'obtenir un bonbon vert.

Exercice 2 Dans un sac on a placé trois jetons numérotés 3; 4 et 5. On tire au hasard, successivement et sans les remettre dans le sac, tous les jetons du sac. On écrit le nombre qui a comme chiffre des centaines, le premier nombre tiré, comme chiffre des dizaines le deuxième nombre tiré, et comme chiffre des unités le troisième nombre tiré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 453 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 453 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de 3 ?

Exercice 3 On dispose de deux sacs identiques contenant des boules numérotés de 1 à 5. On tire au hasard une boule dans chaque sac et on additionne les numéros figurant sur chaque boule.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 3 ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une somme supérieure ou égale à 4 ?

Exercice 4 On dispose d'une roue de loterie et d'un sac qui contient deux boules blanches et trois boules noires. Si la roue de loterie tombe sur un nombre pair alors on tire une boule dans le sac. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 5 Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une fois le côté "pile" en lançant trois fois une pièce de monnaie équilibrée ?

Exercice 6 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants : A : "On obtient un roi" , B : "On obtient un as" , C : "On obtient un trèfle"

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Et les événements B et C ? Justifie tes réponses.
2. Décrire par une phrase sans négation l'événement contraire de l'événement C.
3. Proposer un événement D incompatible avec l'événement C.
4. Déterminer les probabilités des événements A, B et C.
5. Quelle est la probabilité de l'événement contraire de l'événement C ?
6. Donner la probabilité de l'événement proposé à la question c.

Exercice 7 Une roue de loterie est partagée en six secteurs identiques : un à zéro point, deux à 50 points et trois à 10 points. Un joueur fait tourner la roue et gagne le montant indiqué par l'aiguille.

1. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2. Quelle est la probabilité de gagner au moins 10 euros ?

Exercice 8 Une urne opaque contient 3 boules bleues (B), 2 boules vertes (V). On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule au hasard.

1. Dessiner l'arbre des probabilités pondéré par les probabilités sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité de tirer 2 boules bleues.
3. Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur.

Exercice 9 On considère deux dés cubiques, l'un rouge et l'autre vert. Chaque face de chaque dé est numérotée de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés.

1. Élaborer un tableau indiquant tous les couples qu'il est possible d'obtenir lors d'un lancer. Combien en existe-t-il ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un couple composé des mêmes chiffres ?
3. On s'intéresse maintenant à la somme des chiffres apparue lors d'un lancer.
 - (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 2 ?
 - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
 - (c) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 11 ?
 - (d) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme au moins égale à 3 ?

Exercice 10 À la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de 3ème de 25 élèves. 48% des élèves ont 14 ans, $\frac{1}{5}$ ont 16 ans, les autres ont 15 ans.

1. On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande son âge. Dessiner l'arbre des possibles, pondéré par les probabilités.
2. Lors de cette enquête, on leur a demandé s'ils utilisaient un sac à dos ou un sac en bandoulière.
 - (a) $\frac{1}{6}$ des élèves de 14 ans ont un sac à dos.
 - (b) $\frac{3}{8}$ des élèves de 15 ans ont un sac en bandoulière.
 - (c) 60% des élèves de 16 ans ont un sac à dos.

On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande le type de sac qu'il utilise.

- (a) Dessiner l'arbre des possible pondéré par les probabilités en complétant celui de la question 1.
- (b) Calculer la probabilité de chacun des évènements :
 - i. A : "L'élève a 14 ans et un sac à dos" ;
 - ii. B : "L'élève a 15 ans et un sac à dos" ;
 - iii. C : "L'élève a 16 ans et un sac à dos".
- (c) En déduire la possibilité que l'élève ait un sac à dos.

Exercice 11 On considère l'expérience suivante, qui se déroule en 2 étapes : d'abord on tire 1 boule dans une urne contenant 3 boules blanches (B) et 1 boule noire (N). Ensuite on tire 1 boule dans une autre urne contenant 2 boules numérotées 1, 3 boules numérotées 2 et 2 boules numérotées 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Si on tire une boule blanche, puis une boule numérotée 1, on note $(B, 1)$ le résultat obtenu, etc.

1. Dessine l'arbre des possibles pondéré par les probabilités et note chaque issue possible.
2. Imaginons que l'on reproduise 120 000 fois cette expérience à 2 épreuves. Quelle proportion de ces 120 000 expériences conduisent alors au résultat $(B, 1)$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir $(N, 2)$? Et $(B, 3)$?