Autres fonctions dont les fonctions affines et la proportionnalité des écarts

Denis Vekemans *

1 Les fonctions affines

Définition 1

Lorsque f est donnée par $f\ :\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}; x\rightarrow f(x)=a\times x+b$, où a et b sont des réels donnés, on dit que f est une fonction affine.

Une représentation graphique d'une fonction affine présente des points qui sont alignés selon une **droite**. Lorsque $b=0$, la fonction affine est aussi une fonction linéaire et est représentée par une droite qui passe par l'origine ; lorsque $b\neq 0$ la fonction affine est représentée par une droite qui ne passe pas par l'origine.

Théorème 1.1

Lorsque f est donnée par $f\ :\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}; x\rightarrow f(x)=a\times x+b$, où a et b sont des réels donnés,

1. $f(0)=b$;
2. $f(x-y)=a\times(x-y)$ *(propriété de proportionnalité des écarts).*

Exercice 1 Chez A, l'abonnement au vidéo-club est de 10 Euros par mois, et la location d'une cassette vidéo coûte 2 Euro. Au distributeur B, on ne paye pas d'abonnement, mais on paye $3,50$ Euros la location d'une cassette vidéo. Représenter graphiquement les prix en Euros chez A et B en fonction du nombre de cassettes vidéos louées par mois.

À partir de combien de cassettes vidéos par mois le vidéo-club est-il moins cher que le distributeur ?

Solution 1 Cet exercice est conçu pour présenter plusieurs solutions !

1. Solution algébrique.

   Soit x le nombre de cassettes vidéo louées par mois. Soit $p_A(x)$ le prix (en euros) de ces x cassettes vidéo louées au vidéo-club et $p_B(x)$ le prix (en euros) de ces x cassettes vidéo louées au distributeur. [définition des inconnues]

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

On a $p_A(x) = 10 + 2 \times x$ et $p_B(x) = 3,5 \times x$. On cherche x tel que $p_A(x) < p_B(x)$. [contrainte sur les inconnues]

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_A(x) < p_B(x) &\iff 10 + 2 \times x < 3,5 \times x \\ &\iff 10 + 2 \times x < 3,5 \times x - 2 \times x \\ &\iff \frac{10}{1,5} < x \\ &\iff x \geq 7 \text{ car } x \text{ est entier naturel} \end{aligned}$$

[résolution]

Conclusion : à partir de 7 cassettes vidéos par mois, il est plus avantageux de les louer au vidéo-club.

2. Solution arithmétique.

   Au début, je paie 10 euros au vidéo-club. Mais, à chaque cassette video louée par mois au vidéo-club, je gagne en fait $3,50$ euros diminué de 2 euros par rapport à la location au distributeur, soit $1,50$ euros. Pour récupérer mon paiement initial, je dois donc louer au moins $\frac{10}{1,50} \approx 6,66$ cassettes par mois, c'est-à-dire au moins 7 cassettes vidéos par mois.

   Conclusion : à partir de 7 cassettes vidéos par mois, il est plus avantageux de les louer au vidéo-club.

3. Solution par tâtonnement. Soit x le nombre de cassettes vidéo louées par mois. Soit $p_A(x)$ le prix (en euros) de ces x cassettes vidéo louées au vidéo-club et $p_B(x)$ le prix (en euros) de ces x cassettes vidéo louées au distributeur.

   (a) Essais successifs.

x	$p_A(x)$	$p_B(x)$	conclusion
1	12	$3,50$	$p_A(x) > p_B(x)$
2	14	7	$p_A(x) > p_B(x)$
3	16	$10,50$	$p_A(x) > p_B(x)$
4	18	14	$p_A(x) > p_B(x)$
5	20	$17,50$	$p_A(x) > p_B(x)$
6	22	21	$p_A(x) > p_B(x)$
7	24	$24,50$	$p_A(x) < p_B(x)$ objectif atteint

   (b) Essais orientés.

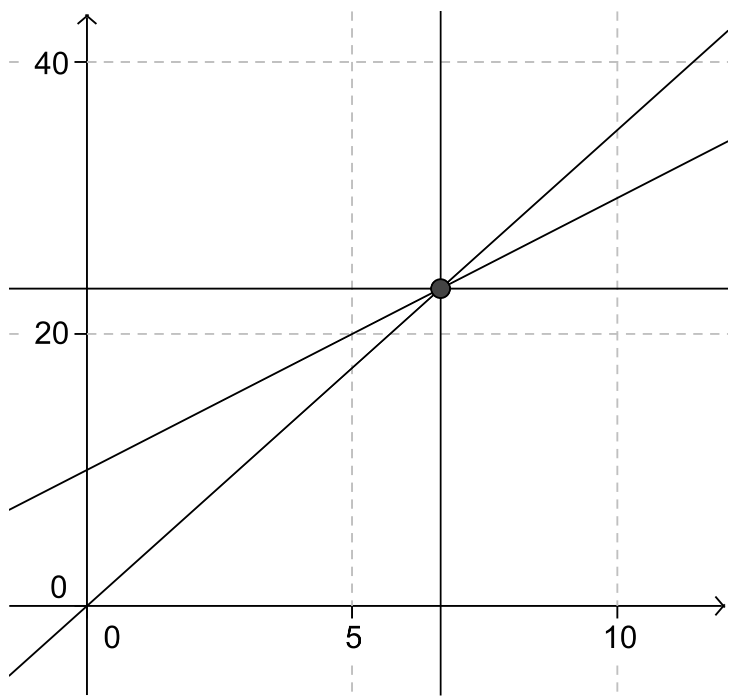
x	$p_A(x)$	$p_B(x)$	conclusion
10	30	35	$p_A(x) < p_B(x)$ trop
5	20	$17,50$	$p_A(x) > p_B(x)$ pas assez
7	24	$24,50$	$p_A(x) < p_B(x)$ trop
6	22	21	$p_A(x) > p_B(x)$ pas assez

(c) Méthode de la double fausse position.

x	$p_A(x)$	$p_B(x)$	$p_B(x) - p_A(x)$
10	30	35	5
5	20	$17,50$	$-2,5$
$\frac{20}{3} = \frac{2\times5+10}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{70}{3}$	$0 = 2 \times (-2,5) + 5$

Remarque : on a pris deux fausses positions (les essais avec $x = 10$ et $x = 5$) et on a observé que pour $x = 10$, la différence de prix valait 5 et que pour $x = 5$, la différence valait $-2,5$; on va donc atteindre un écart de 0 en comptabilisant 1 fois un écart de 5 additionné à 2 fois un écart de $-2,5$, ce qui correspond à $x = \dfrac{2 \times 5 + 10}{2+1}$.

4. Solution graphique.



Exercice 2 *Train*

Un parcours de A à B mesure 1 000 kilomètres

Un train de voyageurs TGV part de A pour aller vers B. Ce TGV part à 8 h à la vitesse constante de 250 kilomètres par heure.

De B part un train de marchandise pour aller vers A qui roule à 150 kilomètres par heure et qui est parti à 10 $h30$ min.

Quelle heure sera-t-il lorsqu'ils vont se croiser ?

Solution 2

1. Solution algébrique.

Dans les deux cas, on exprime la distance du train (TGV ou train de marchandise) en fonction du temps par rapport à A : $d_A(t)$ est la distance (en km) du TGV au point A en fonction du temps et $d_B(t)$ est la distance (en km) du train de marchandise au point A en fonction du temps.

Pour rappel, la vitesse moyenne v en kilomètres par heure s'obtient par $v = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue en kilomètres et t le temps de parcours en heures.

Ainsi, on a $250\ km/h = \frac{d_A(t)}{t - 8\ h}$ pour $t \geq 8\ h$ et $150\ km/h = \frac{1000\ km - d_B(t)}{t - 10,5\ h}$ pour $t \geq 10,5\ h$.

Ceci donne $d_A(t) = 250\ km/h \times t - 2\ 000\ km$ et $150\ km/h \times t - 1\ 575\ km = 1\ 000\ km - d_B(t)$ ou encore $d_B(t) = -150\ km/h \times t + 2\ 575\ km$.

Les deux trains vont se croiser lorsqu'ils sont à même distance par rapport à A, c'est-à-dire lorsque $d_A(t) = d_B(t)$ ou $250\ km/h \times t - 2\ 000\ km = -150\ km/h \times t + 2\ 575\ km$, ce qui donne $t = \frac{4\ 575\ km}{400\ km/h} = 11,4375\ h = 11\ h26,25\ min = 11\ h26\ min15\ s$.

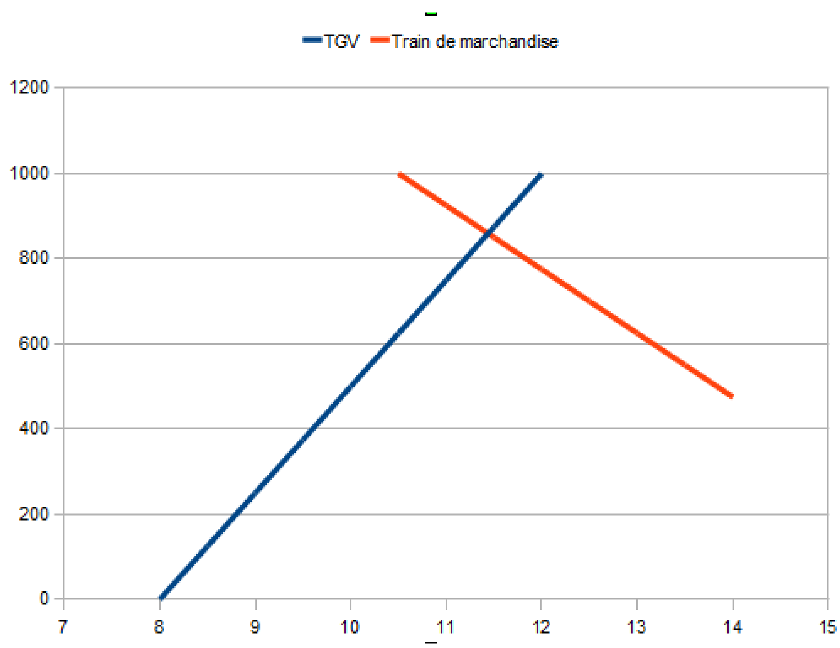
2. Solution arithmétique.

   Lorsque le train de marchandise part de B, le TGV a déjà roulé pendant $10\ h30\ min - 8\ h = 2\ h30\ min = 2,5\ h$ et a donc parcouru la distance de $2,5\ h \times 250\ km/h = 625\ km$. Ainsi, les deux trains sont distants de $1\ 000\ km - 625\ km = 375\ km$ à $10\ h30\ min$.

   Cependant, à partir de $10\ h30\ min$, les trains se rapprochent à la vitesse de $250\ km/h + 150\ km/h = 400\ km/h$. Ils vont donc se croiser $\frac{375\ km}{400\ km/h} = 0,9375\ h = 56,25\ min = 56\ min15\ s$ après $10\ h30\ min$.

   Il sera alors $10\ h30\ min + 56\ min15\ s = 11\ h26\ min15\ s$.

3. Solution graphique.



   Ils se croisent approximativement à $11\ h30\ min$.

Exercice 3 F désigne Fahrenheit et $°C$ désigne degrés celsius.

☐ 32 F correspondent à $0°C$;

☐ 212 F correspondent à $100°C$.

Ces échelles de mesures étant en relation affine.

Déduire à combien de Fahrenheit correspondent $40°C$ et à combien de degrés celcius correspondent 194 F.

Solution 3 Tableau de conversion.

$°C$	0	100	40	B
F	32	212	A	194

— Solution par l'utilisation de la proportionnalité des écarts.

Une augmentation de $100°C$ (car $100 = 100 - 0$) correspond à une augmentation de 180 F ($180 = 212 - 32$).

Un retour à l'unité sur les écarts permet de conclure qu'une augmentation de $1°C$ correspond à une augmentation de $1,8F$.

☐ De $0°C$ à $40°C$, on augmente de $40°C$, ce qui correspond à une augmentation de $40 \times 1,8\ F = 72\ F$. $0°C$ qui correspond à 32 F augmenté de $40°C$ ou de 72 F donne $(0+40)°C = 40°C$ qui correspond à $(32+72)\ F = 104\ F$. Conclusion : $A = 104$.

☐ De 212_F à 194 F, on diminue de 18 F, ce qui correspond à une diminution de $\frac{18}{1,8}°C = 10°C$. 212 F qui correspond à $100°C$ diminué de 18 F ou de $10°C$ donne $(212 - 18)\ F = 194\ F$ qui correspond à $(100-10)°C = 90°C$. Conclusion : $B = 90$.

— Solution par l'utilisation de fonctions.

Soit x une température exprimée en nombre de $°C$ et $f(x)$ cette même température en nombre de F.

Comme ces échelles de mesure sont en relation affine, on sait que $f(x) = a \times x + b$ où a et b sont des réels à déterminer d'après $f(0) = 32$ et $f(100) = 212$.

$$\begin{cases} 32 = 0 \times a + b \\ 212 = 100 \times a + b \end{cases} \iff \begin{cases} b = 32 \\ 212 = 100 \times a + 32 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 32 \\ a = \frac{212-32}{100} = 1,8 \end{cases}$$

Ainsi, $f(x) = 1,8 \times x + 32$.

☐ $f(40) = 1,8 \times 40 + 32 = 104$. Conclusion : $40°C$ correspond à 104 F.

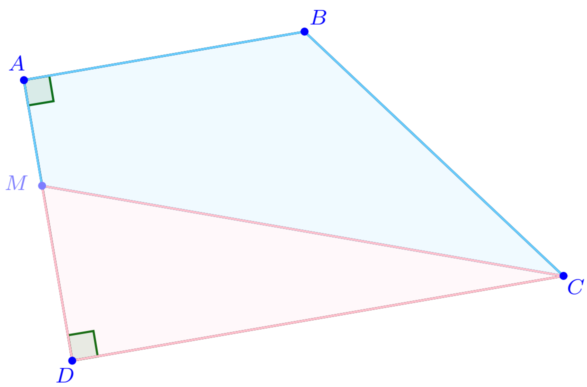
☐ Si $f(x) = 1,8 \times x + 32 = 194$, alors $x = \dfrac{194 - 32}{1,8} = 90$. Conclusion : 194 F correspond à $90°C$.

Exercice 4 [Lille (1999)] Soit $ABCD$ un trapèze rectangle de hauteur $AD = 4\ cm$, de base $AB = 4\ cm$ et $CD = 7\ cm$ et soit M un point du segment $[AD]$. On pose $DM = x\ cm$.

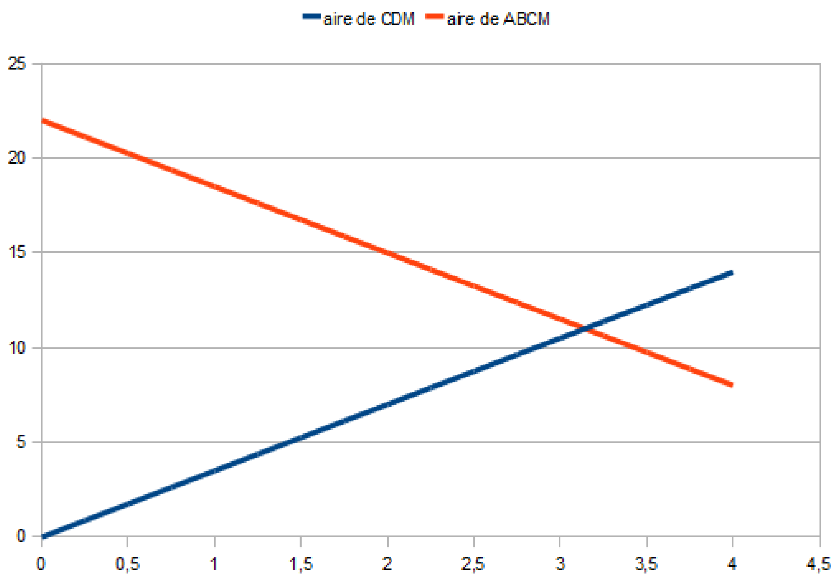
1. Évaluer en fonction de x les mesures a_1 et a_2 des aires du triangle CDM et du quadrilatère $ABCM$ (mesures exprimées en centimètres carrés).
2. Représenter la variation de ces deux aires quand M varie sur le segment $[AD]$. On utilisera la feuille de papier millimétré et on prendra comme unités :
   — 4 cm sur l'axe des abscisses (longueurs en centimètres),
   — 1 cm sur l'axe des ordonnées (aires en centimètres carrés).
3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer M pour que $a_1 = a_2$.

Solution 4

1. — Le triangle CDM est rectangle en D, donc $a_1 = \mathcal{A}(CDM) = \dfrac{CD \times DM}{2} = \dfrac{7 \times x}{2}\ cm^2$.
   — Le trapèze $ABCD$ admet $[CD]$ comme hauteur, donc $a_2 = \mathcal{A}(ABCM) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(CDM) = \dfrac{AD \times (AB + CD)}{2} - \dfrac{CD \times DM}{2} = \left(\dfrac{4 \times (4+7)}{2} - \dfrac{7 \times x}{2}\right) cm^2 = \left(22 - \dfrac{7 \times x}{2}\right) cm^2$.



2. Représentation graphique des fonctions a_1 et a_2.



a_1 est une fonction linéaire et a_2 est une fonction affine. Ces deux fonctions sont restreintes au segment $[0, 4\ cm]$ car M appartient au segment $[AD]$ et car $AD = 4\ cm$.

3. — Graphiquement, on relève l'abscisse du point de concours des deux segments (qui représentent les fonctions a_1 et a_2). On trouve $a_1 = a_2$ lorsque x est voisin de $3,1\ cm$ (la précision du graphique ne permet pas de trouver une valeur exacte de x).
   — Par le calcul, $a_1 = a_2$ s'écrit $\dfrac{7 \times x}{2} = 22 - \dfrac{7 \times x}{2}$. La résolution de cette équation donne $x = \frac{22}{7}\ cm$.

2 Autres fonctions

Exercice 5 [Orléans (1999)] Soit x un nombre réel vérifiant $0 \leq x \leq 3$. Soit $ABCD$ un carré de côté 8. Soit I le point du côté $[AB]$ tel que $AI = x$. Soit L le milieu du segment $[AB]$. M est le point du segment $[LD]$ qui admet le point I comme projection orthogonale sur le segment $[AB]$ et le point K comme projection orthogonale sur le segment $[AD]$. On se propose d'étudier l'aire du triangle AKI.

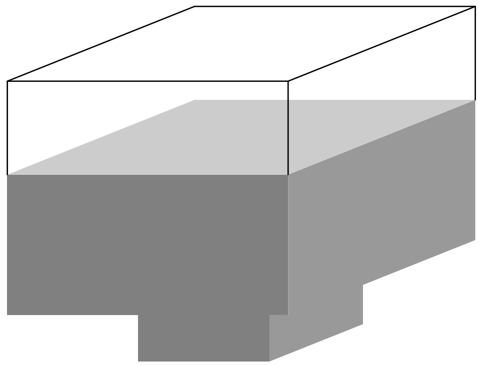
1. Démontrer que $AK = 8 - 2x$.
2. En déduire l'aire $\vartheta(x)$ du triangle AKI en fonction de x et démontrer que $\vartheta(x) = 4 - (x - 2)^2$.
3. Quelle est la plus grande valeur de cette aire ? Justifier la réponse.
4. Calculer les aires $\vartheta(0)$ et $\vartheta(3)$ du triangle AKI associées aux valeurs extrêmes correspondant à $x = 0$ et à $x = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux *Si* $0 \leq x \leq 3$, *alors,* $\vartheta(0) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(3)$? Justifier la réponse.

Solution 5

1. Le théorème de Thalès appliqué aux sécantes (LA) et (LD) et aux parallèles (IM) et (AD) (toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) par propriété du projeté orthogonal, d'une part, et du carré, d'autre part) donne $\dfrac{IM}{AD} = \dfrac{LI}{LA} \left(= \dfrac{LM}{MD}\right)$, puis $IM = \dfrac{8 \times (4 - x)}{4} = 8 - 2 \times x$.
   Le quadrilatère $IAKM$ possède trois angles droits et est, par conséquent, un rectangle. Ensuite, $AK = IM = 8 - 2 \times x$, par propriété du rectangle (car ses côtés opposés sont de même longueur).
2. $\vartheta(x) = \dfrac{AI \times AK}{2}$ car le triangle IAK est rectangle en A.
   Ensuite $\vartheta(x) = \dfrac{x \times (8 - 2 \times x}{2} = 4 \times x - x^2$.
   D'un autre côté, $4 - (x - 2)^2 = 4 - (x^2 - 4 \times x + 4) = 4 - x^2 + 4 \times x - 4 = 4 \times x - x^2$.
   Donc $\vartheta(x) = 4 - (x - 2)^2$.
3. On sait que $\vartheta(x) = 4 - (x - 2)^2$. De plus, un carré est toujours positif ou nul, ce qui induit que $\vartheta(x)$ est toujours inférieur ou égal à 4. Or, $\vartheta(2) = 4$ et donc la valeur maximale de $\vartheta(x)$ est 4 (le maximum est atteint lorsque x vaut 2).

4. Le calcul donne $\vartheta(0) = 0$ et $\vartheta(3) = 3$. L'énoncé "Si $0 \leq x \leq 3$, alors, $\vartheta(0) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(3)$" est faux car $\vartheta(2) = 4$ (et $4 = \vartheta(2) > \vartheta(3) = 3$).

Exercice 6 [Limoges (1999)] Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent entre eux. L'arête du cube supérieur (le grand cube) mesure 90 centimètres. L'arête du cube inférieur (le petit cube) mesure 50 centimètres. Cette cuve contient un liquide. On note x la hauteur de liquide dans la cuve.



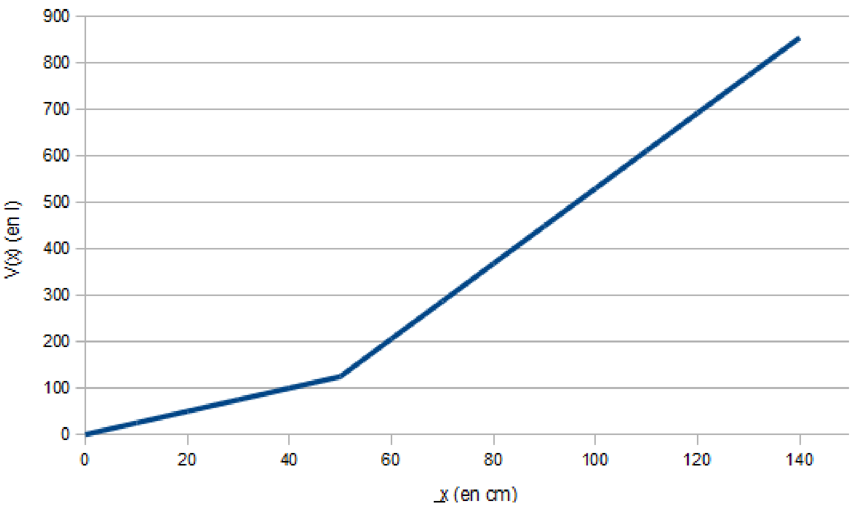
On note $V(x)$ le volume en litres du liquide dans la cuve lorsque la hauteur de liquide dans la cuve est x (x étant exprimé en centimètres).

1. Calculer $V(30)$, $V(51)$, $V(90)$.
2. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.
3. Construire sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $V(x)$.
4. Sur un segment $[AB]$, on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle 1 : 10.

Solution 6

1. — $V(30) = (30 \times 50 \times 50)\ cm^3 = 75\ 000\ cm^3 = 75\ell$ (formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle).
   — $V(51) = (50 \times 50 \times 50 + 1 \times 90 \times 90)\ cm^3 = 133\ 100 cm^3 = 133,1\ell$ (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).
   — $V(90) = (50 \times 50 \times 50 + 40 \times 90 \times 90)\ cm^3 = 449\ 000 cm^3 = 449\ell$ (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).
2. — Si x est compris entre 0 cm et 50 cm, $V(x) = (x \times 50 \times 50)\ cm^3 = x \times 2\ 500 cm^3 = x \times 2,5\ell$ (formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle).
   — Si x est compris entre 50 cm et 140 cm ($140 = 50 + 90$), $V(x) = (50 \times 50 \times 50 + (x - 50) \times 90 \times 90)\ cm^3 = (x \times 8\ 100 - 280\ 000)\ cm^3 = (x \times 8,1 - 280)\ell$ (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).

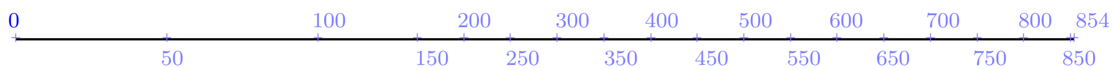
3. Construire sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $V(x)$.



Le tracé de la fonction vient immédiatement ... Il s'agit d'une fonction qui est définie sur l'intervalle $[0; 140\ cm]$: linéaire sur l'intervalle $[0; 50\ cm]$ et affine sur $[50\ cm; 140\ cm]$.

4. On utilise
— pour $V(x)$ compris entre 0 et 125 ℓ, $x = \frac{V(x)}{2{,}5}\ cm$,
— pour $V(x)$ compris entre 125 ℓ et 854 ℓ, $x = \frac{V(x)+280}{8{,}1}\ cm$.
Ceci fournit un tableau de valeurs en graduant tous les 50 litres ... (c'est un choix qui permet d'obtenir une graduation riche sans surcharger le graphique).

$V(x)$ en ℓ	x en cm	$V(x)$ en ℓ	x en cm	$V(x)$ en ℓ	x en cm
0	$0,0$	350	$77,8$	700	$121,0$
50	$20,0$	400	$84,0$	750	$127,2$
100	$40,0$	450	$90,1$	800	$133,3$
150	$53,1$	500	$96,3$	850	$139,5$
200	$59,3$	550	$102,5$	854	$140,0$
250	$65,4$	600	$108,6$		
300	$71,6$	650	$114,8$		



Remarque. La graduation régulière n'est pas imposée et on aurait pu probablement se contenter de représenter $V(0)$, $V(50)$ et $V(140)$.

Exercice 7 *Volume*

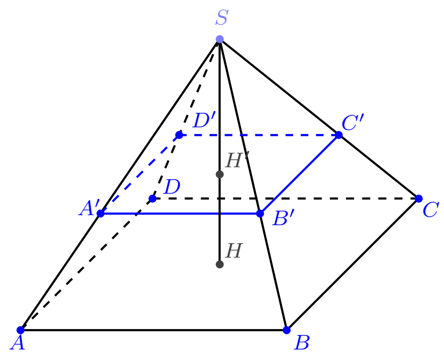
Soit $ABCDS$ une pyramide (à base carrée $ABCD$) dont tous les côtés mesurent 20 centimètres. Cette pyramide est posée sur sa face carrée $ABCD$ sur une table horizontale. Soit $[SH]$ la hauteur de cette pyramide issue de S.

1. Que vaut SH ?
2. Quel est le volume total de la pyramide $ABCDS$, en litres (résultat arrondi par troncature au dixième de litre) ?
3. On remplit la pyramide d'un liquide. Soit x la hauteur de liquide dans la pyramide $ABCDS$. Exprimer le volume exact de liquide en fonction de x, en litres.

Solution 7

1. Par définition de pyramide régulière, la hauteur $[SH]$ relative à la base $ABCD$ coupe le carré $ABCD$ de telle manière que H soit le centre du carré $ABCD$.

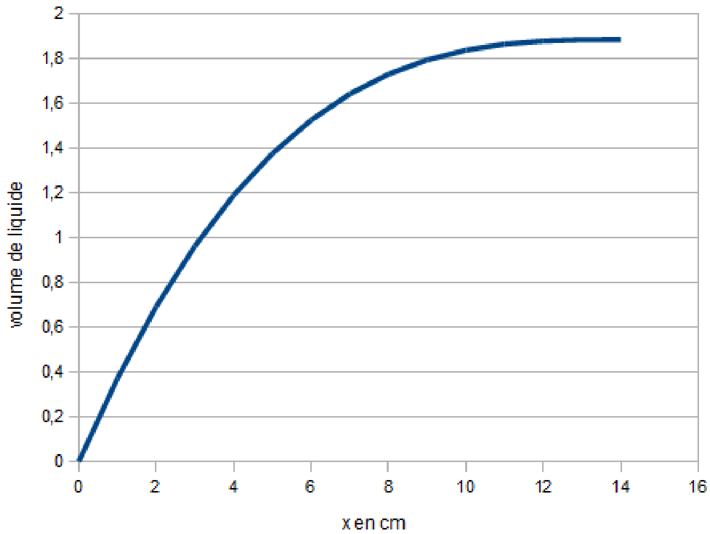
   D'un autre côté, par définition de la hauteur, la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC) et en particulier, (SH) est orthogonale à toute droite de (ABC), comme (SA). Il s'ensuit que le triangle SHA est rectangle en H. Et, le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle SHA donne alors $SH^2 + HA^2 = SA^2$. Or, par une application directe du théorème de Pythagore, on sait que $AC = 20 \times \sqrt{2}\ cm$. Puis, comme le centre d'un carré est au milieu de chacune de ses diagonales, $AH = \dfrac{AC}{2} = 10 \times \sqrt{2}\ cm$. Enfin, par un calcul simple, $SH = 10 \times \sqrt{2}\ cm$.
2. $\mathcal{A}(ABCD) = 400\ cm^2$. Ainsi, $\mathcal{V}(ABCDS) = \dfrac{\mathcal{A}(ABCD) \times SH}{3}$. Numériquement, ceci donne $\mathcal{V}(ABCDS) = \dfrac{4000 \times \sqrt{2}}{3}\ cm^3 = \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3}\ell = 1,8\ell$ à $0,1\ell$ par troncature.
3. On définit les points A', B', C', D' et H' de la façon suivante ... Soit h l'homothétie de centre S et de rapport $\dfrac{SH - x}{SH} = 1 - \dfrac{x}{SH}$, $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$, $D' = h(D)$ et $H' = h(H)$. $A'B'C'D'$ représente la surface de l'eau car $HH' = x$, et d'après le théorème de Thalès, cette surface est bien parallèle à la surface $ABCD$.



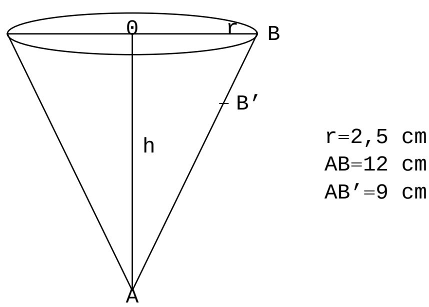
Or, une homothétie agit au simple sur les longueurs, au carré sur les aires et au cube sur les volumes, donc $\mathcal{V}(A'B'C'D'S) = \left(1 - \dfrac{x}{10 \times \sqrt{2}}\right)^3 \times \mathcal{V}(ABCDS) = \left(1 - \dfrac{x}{10 \times \sqrt{2}}\right)^3 \times \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3}\ell$.

Puis, $\mathcal{V}(ABCDA'B'C'D') = \mathcal{V}(ABCDS) - \mathcal{V}(A'B'C'D'S) = \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3} - \left(1 - \dfrac{x}{10 \times \sqrt{2}}\right)^3 \times \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3}\ell = \left(1 - \left(1 - \dfrac{x}{10 \times \sqrt{2}}\right)^3\right) \times \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3}\ell$.

Voici un graphique représentant le volume de liquide en litres en fonction de x en centimètres.



$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ [Grenoble (1998)] Soit le cône de révolution ci-dessous. Le rayon du cercle de base a une longueur de $2,5$ cm ; la génératrice $[AB]$ a une longueur de 12 cm ; le point B' sur la génératrice $[AB]$ est situé à une distance de 9 cm de A ; on désigne par h la hauteur de ce cône.



1. (a) Donner le meilleur encadrement possible de h en cm avec des décimaux ayant au plus un chiffre après la virgule.

   (b) En prenant $3,14 < \pi < 3,15$ et l'encadrement de h trouvé ci-haut, déduire le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des entiers, en cm^3. On rappelle que le volume du cône est le produit de l'aire de la base par la hauteur, divisé par trois.

(c) Pour cette question, si nécessaire, on utilisera les valeurs approchées par défaut que l'on peut déduire des deux questions précédentes. En disposant le cône pointe en bas et hauteur verticale, on le remplit de liquide jusqu'au point B'. Quel est le volume de ce liquide ? Exprimer ce volume en cm^3, puis en cl.

2. Un recouvrement de ce cône (rayon : $2,5\ cm$, génératrice : $12\ cm$) est constitué d'une disque et d'un secteur de disque.

   (a) Démontrer que l'angle de ce secteur de disque mesure 75 degrés.

   (b) Construire ce secteur en vraie grandeur avec règle graduée et compas (laisser apparents les traits de construction ; justifier cette construction).

   (c) Calculer l'aire de ce secteur.

3. Des cônes ayant tous un volume de $10c\ell$, mais étant plus ou moins évasés, ont pour hauteurs respectives : $5\ cm$, $10\ cm$, $15\ cm$, $20\ cm$ et $25\ cm$.

   (a) Calculer leurs aires de bases.

   (b) La suite des aires est-elle proportionnelle à la suite des hauteurs ? Justifier la réponse sans argument graphique.

   (c) Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal, les points dont l'abscisse est la hauteur et dont l'ordonnée est l'aire correspondante. En quoi cette représentation confirme-t-elle la réponse donnée dans la question précédente ?

Solution 8

1. On peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en O (la hauteur $[OA]$ est perpendiculaire au plan contenant le disque de base, par définition de la hauteur). Ainsi, $OA^2 + OB^2 = AB^2$, i.e. $h = \sqrt{12^2 - 2,5^2}\ cm = 11,73\ cm$ à $0,01\ cm$ près par défaut. Il s'ensuit l'encadrement $11,7\ cm < h < 11,8\ cm$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du disque de centre O et de rayon $[OA]$. On a $\mathcal{A} = \pi \times r^2$. Le volume $\mathcal{V}$ du cône est alors $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A} \times h}{3} = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$. Numériquement, ceci donne l'encadrement $\dfrac{3,14 \times 2,52 \times 11,7}{3}\ cm^3 < \mathcal{V} < \dfrac{3,15 \times 2,52 \times 11,8}{3}\ cm^3$. Il s'ensuit que le meilleur encadrement possible avec des entiers est $76cm^3 < \mathcal{V} < 78cm^3$.

3. r est le rayon du disque de base du cône lorsque celui-ci est rempli jusqu'au point B d'une hauteur $AO = h$ de liquide.

   On nomme alors r' le rayon du disque de base du cône lorsque celui-ci est rempli jusqu'au point B' d'une hauteur $AO' = h'$ de liquide.

   D'après le théorème de Thalès appliqué en utilisant les parallèles (OB) et $(O'B')$ et les sécantes (AO) et (AB), on déduit $\dfrac{AO}{AO'} = \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{OB}{O'B'}$. Or $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$, donc $r' = \frac{3}{4} \times r$ et $h' = \frac{3}{4} \times h$.

Par suite, le volume $\mathcal{V}'$ de liquide dans le cône est

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}' &= \frac{p \times r'^2 \times h'}{3} \\
&= \frac{\pi \times (\frac{4}{3} \times 2,5)^2 \times (\frac{4}{3} \times \sqrt{12^2 - 2,5^2})}{3}\ cm^3 \\
&= \frac{\pi \times 225 \times \sqrt{551}}{512}\ cm^3 \\
&= \frac{\pi \times 45 \times \sqrt{551}}{1024}\ c\ell
\end{aligned}$$

(car $1\ cm^3 = 0,001\ dm3 = 0,001\ \ell = 0,1\ c\ell$).

4. (a) Depuis ce recouvrement du cône, on sait que le périmètre du petit disque est égal au périmètre de l'arc du secteur angulaire d'angle α.

   Pour un secteur de disque, la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle, et donc le tableau suivant est de proportionnalité.

	Disque plein	Secteur
Mesure de l'angle en degrés	360	α
Longueur de l'arc en cm	$2 \times \pi \times 12$	$2 \times \pi \times 2,5$

   Ainsi, par on obtient $\alpha = \dfrac{2,5 \times 360°}{12} = 75°$.

   (b) La difficulté de cette question est juste la construction d'un angle de 75°.

   — Je trace un cercle C_1 de centre A et de rayon 12 cm.

   — Je place un point V sur ce cercle C_1.

   — Je trace la perpendiculaire d à la droite (AV) passant par A : je trace le cercle C_2 de centre A et de rayon ρ qui coupe la droite (AV) en deux points X et Y distincts ; je trace le cerlce C_3 de centre X et de rayon XY et le cerlce C_4 de centre Y et de rayon XY ; les cercles C_3 et C_4 se coupent en deux points distincts Z et Z' ; je nomme d la droite (ZZ').

   — Je nomme W une des deux intersections de $C1$ et de d.

   — Je trace le cercle C_5 de centre V et de rayon 12 cm.

   — Les cercles C_1 et C_5 se coupent en deux points distincts dont l'un, L, tel que $AVLW$ soit un quadrilatère convexe.

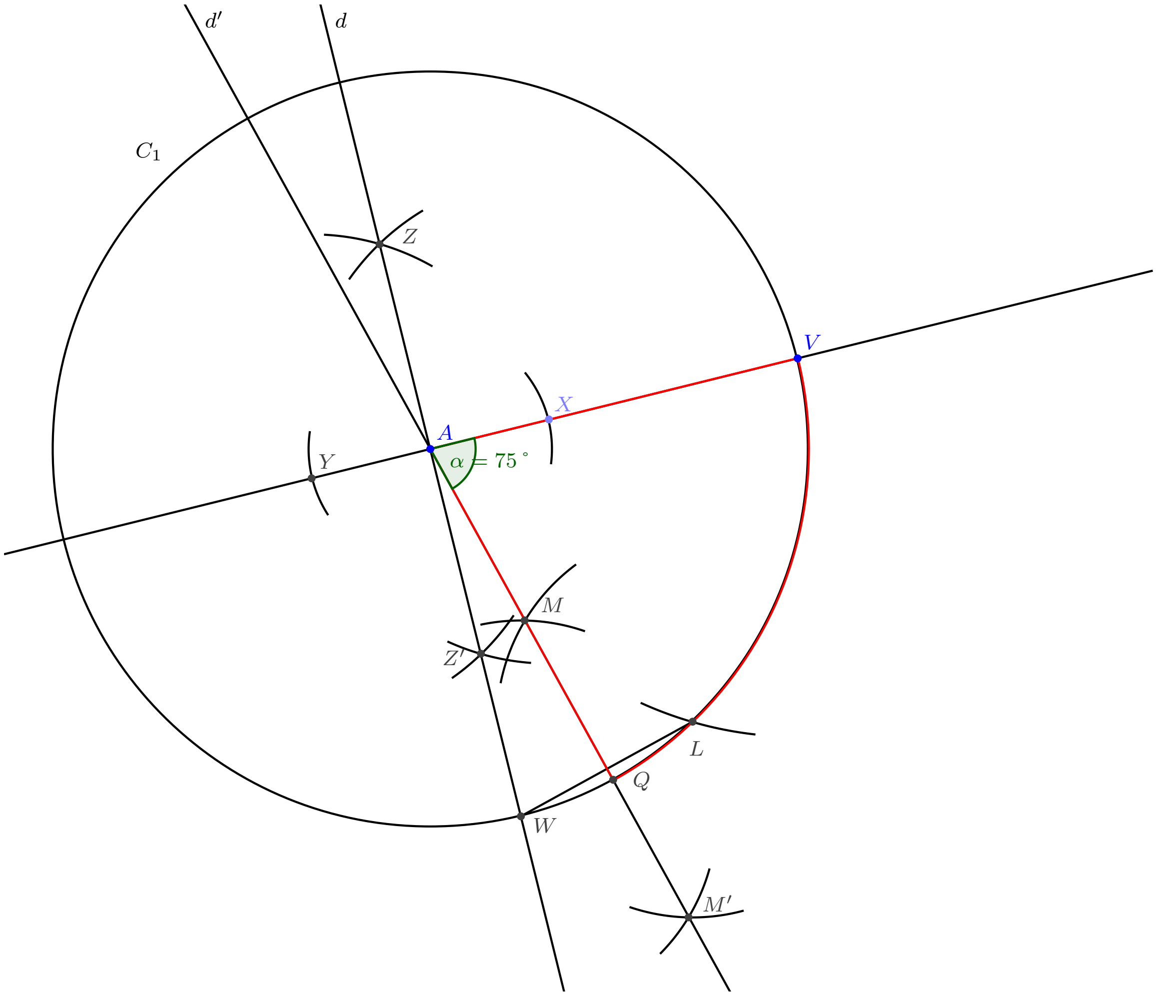
   — Je trace la médiatrice d' du segment $[LW]$: je trace le cercle C_6 de centre L et de rayon LW et un cercle C_7 de centre L et de même rayon LW ; les cercles C_6 et C_7 se coupent en deux points distincts M et M' ; je nomme d' la droite (MM').

   — Le cercle C_1 et la droite d' se coupent en deux points distincts dont l'un, Q, tel que $ALQW$ soit un quadrilatère convexe.

   — Le secteur angulaire cherché est composé des segments $[AV]$ et $[AQ]$ et du petit-arc de cercle sur C_1 délimité par V et Q.

   Explications :

— la droite (AV) est perpendiculaire à la droite (AW) donc l'angle $\widehat{VAW}$ mesure $90°$;
— le triangle AVL est équilatéral, donc l'angle $\widehat{VAL}$ mesure $60°$;
— le triangle ALW est isocèle en A et donc la médiatrice du segment $[LW]$ est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{LAW}$, puis l'angle $\widehat{VAQ}$ mesure $60° + \frac{90°-60°}{2} = 75°$.



(c) Pour un secteur de disque, l'aire est proportionnelle à l'angle, et donc le tableau suivant est de proportionnalité.

	Disque plein	Secteur
Mesure de l'angle en degrés	360	75
Aire en cm^2	$\pi \times 12^2$	$\mathcal{A}''$

On déduit que $\mathcal{A}'' = \dfrac{75}{360} \times \pi \times 12^2\ cm^2 = 30 \times \pi\ cm^2$.

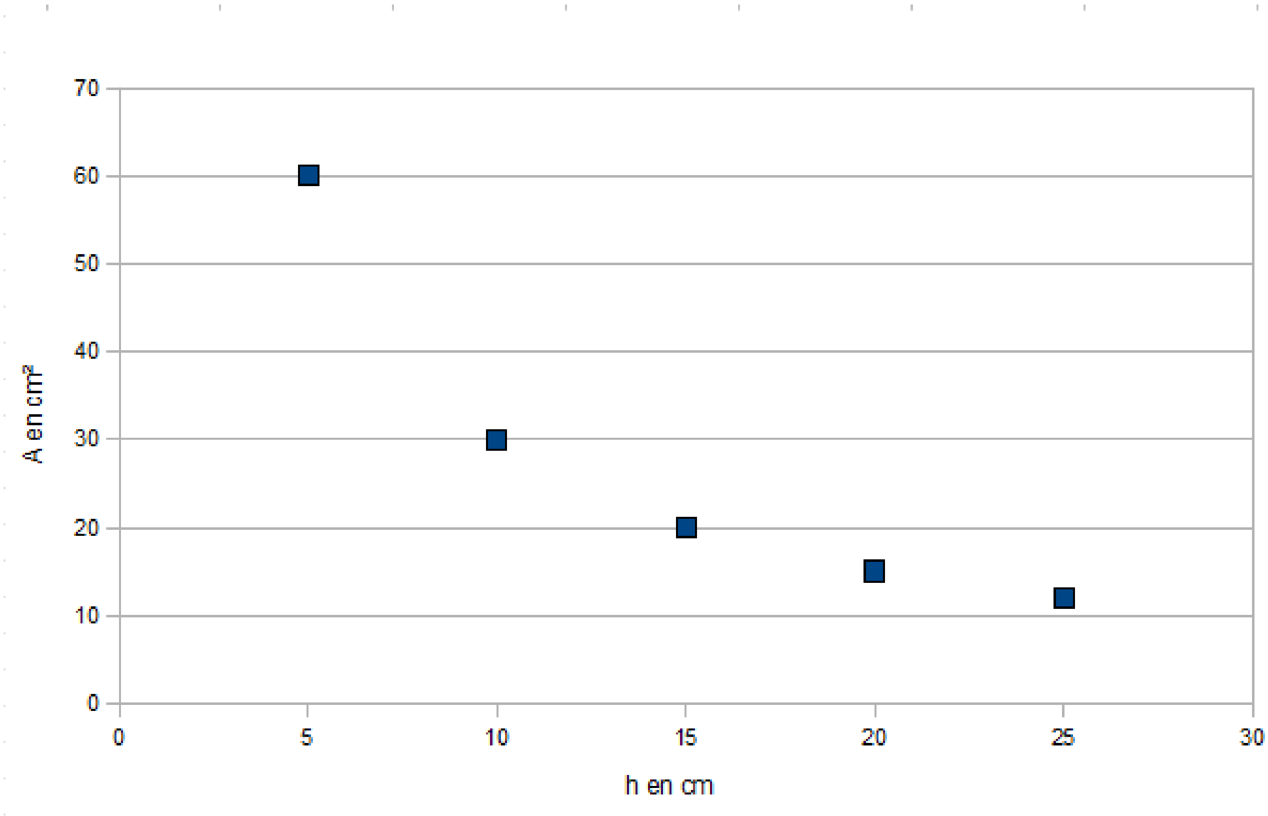
5. (a) $10\ c\ell = 0,1\ \ell = 0,1\ dm^3 = 100\ cm^3$.

Si le cône a pour hauteur h (en cm) et pour aire du disque de base A (en cm^2), alors $100\ cm^3 = \dfrac{A \times h}{3}$ ou encore $A = \dfrac{300\ cm^3}{h}$. À l'aide de cette formule, on peut remplir le tableau de valeurs suivant

h en cm	5	10	15	20	25
A en cm^2	60	30	20	15	12

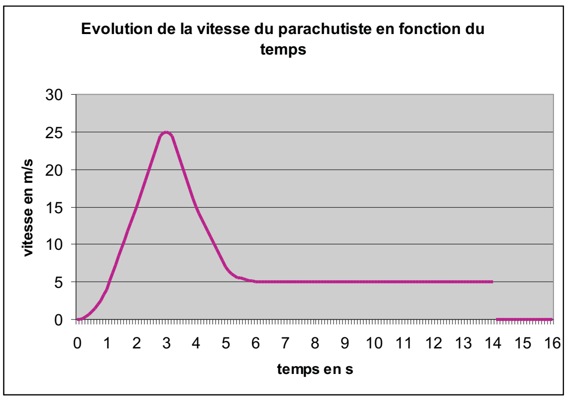
(b) La suite des hauteurs n'est évidemment pas proportionnelle à la suite des aires. Pour le justifier, on peut dénoncer, par exemple, le fait que lorsque la hauteur double, ce n'est pas le cas de l'aire.

(c) Voici un nuage de points représentant les deux séries de nombres ... Ce nuage de points ne



présente pas des points alignés sur une droite passant par l'origine, ce qui serait le cas si les séries étaient proportionnelles (propriété de la fonction linéaire).

Exercice 9 [Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse (2004)] Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.



1. Pendant la chute, sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?

2. Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?
3. Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses 3 s et 6 s.
4. Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?
5. Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de 115 m, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

Solution 9 Dans tout cet exercice, on supposera qu'il est permis d'appuyer un raisonnement sur une perception graphique.

1. On cherche donc le lieu où la courbe représentative est réduite à un segment "parallèle" à l'axe des abscisses.

   Entre les points d'abscisses 6 s et 14 s, on peut considérer que la vitesse du parachutiste est constante et vaut 5 m/s.
2. On cherche donc le lieu à partir duquel la vitesse va commencer à diminuer (à supposer que l'ouverture du parachute ait un effet immédiat).

   Il s'agit du point d'abscisse 3 s et d'ordonnée 25 m/s.
3. On cherche à qualifier qualitativement et quantitativement l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses 3 s et 6 s.

   La vitesse du parachutiste décroît sur cet intervalle de temps : elle passe de 25 m/s à 5 m/s (diminution de 20 m/s).
4. Le parcours durant 14 s, il s'agit donc de calculer la distance parcourue pendant les 7 dernières secondes.

   La vitesse étant alors constante et égale à 5 m/s, la distance parcourue pendant les 7 dernières secondes peut donc être calculée par $7 \times 5\ m = 35\ m$.
5. Il s'agit ici d'utiliser la définition même de vitesse moyenne. Cependant, il faut aussi penser à convertir les données métriques en km et les données temporelles en h.

   $14\ s = \frac{14}{3\ 600}\ h$; et $115\ m = 0,115\ km$. La vitesse moyenne vaut donc exactement $\frac{0,115}{\frac{14}{3\ 600}}\ km/h$ et approximativement $29,571\ km/h$, que l'on peut arrondir à $29,57\ km/h$ au centième.

Exercice 10 *L'abreuvoir*

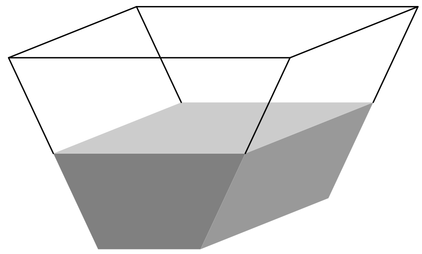
L'abreuvoir est un prisme droit à base trapézoïdale (et convexe) de hauteur (c'est-à-dire la distance séparant les faces parallèles superposables) mesurant 4 m.

Les trapèzes (convexes), superposables et sur des plans parallèles, ont tous deux

— une petite base mesurant 6 dm,

— une grande base mesurant 8 dm

— et une distance séparant les côtés parallèles du trapèze de 2 dm.



La figure n'est pas à l'échelle.

L'abreuvoir

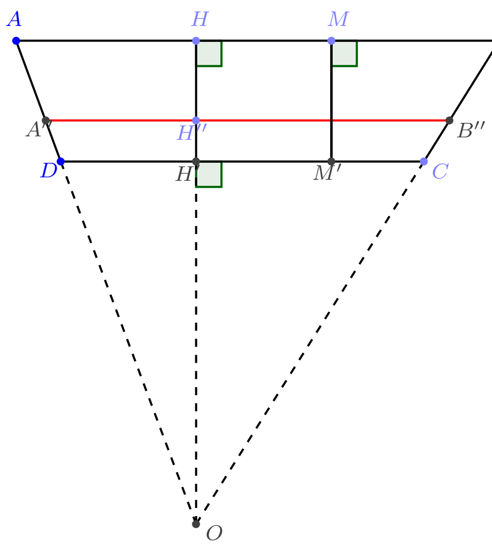
— est posé sur la face rectangulaire horizontale dont les dimensions sont 6 dm et 4 m,

— et présente une ouverture sur l'autre face rectangulaire horizontale dont les dimensions sont 6 dm et 4 m.

1. Exprimer le volume d'eau contenu dans l'abreuvoir en fonction de la hauteur d'eau dans cet abreuvoir.
2. Pour quelle hauteur d'eau, la cuve est-elle à moitié pleine ?

Solution 10 Toutes les longueurs sont exprimées en dm.

1. On définit les points de la figure :
   - $[AB]$ est un segment tel que $AB = 8\ dm$;
   - M est un point quelconque de (AB) ;
   - (d) est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par M ;
   - M' est un point de (d) tel que $MM' = 2\ dm$;
   - (δ') est la perpendiculaire à la droite (d) passant par M' ;
   - C est un point de (δ').
   - D est le point de (δ') tel que $CD = 6\ dm$ et tel que $ABCD$ soit un trapèze convexe ;
   - O est l'intersection des droites (AD) et (BC) ;
   - (Δ) est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par O ;
   - (Δ) coupe la droite (AB) en H et la droite (CD) en H' ;
   - H'' est le point du segment $[HH']$ tel que $H'H'' = h$;
   - (δ'') est la perpendiculaire à la droite (HH') passant par H''
   - (δ'') coupe la droite (AD) en A'' et la droite (BC) en B''.



D'après la construction, $(AB)//(CD) = (\delta')//(\delta'')$ et $(d)//(\Delta)$.

On exprime $A''B''$ en fonction de h.

Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (AH) et (DH') et aux sécantes (AD) et (HH') donne

$$\frac{AO}{DO} = \frac{HO}{H'O}\left(= \frac{HA}{H'D}\right).$$

Cependant, le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (AB) et (DC) et aux sécantes (AD) et (BC) donne

$$\frac{AO}{DO}\left(= \frac{BO}{CO}\right) = \frac{AB}{DC}.$$

Par suite,

$$\frac{HO}{H'O} = \frac{AB}{DC}.$$

Comme $OH = OH' + H'H$, on déduit

$$\frac{OH' + H'H}{H'O} = 1 + \frac{H'H}{H'O} = \frac{AB}{DC},$$

puis $H'O = 6\ dm$.

En réitérant la démarche précédente en remplaçant A par A'', B par B'' et H par H'', on trouve

$$\frac{H''O}{H'O} = \frac{A''B''}{DC},$$

puis

$$1 + \frac{H'H''}{H'O} = \frac{A''B''}{DC}.$$

Et, enfin,

$$A''B'' = 6 \times \left(1 + \frac{h}{6}\right)\ dm = (6 + h)\ dm.$$

Dès lors, $\mathcal{A}(A'B'CD) = h \times \dfrac{(6+h)+6}{2}\ dm^2 = \left(6 \times h + \dfrac{h^2}{2}\right)\ dm^2$ et le volume $V(h)$ d'eau dans l'abreuvoir est donné par $V(h) = 40 \times \left(6 \times h + \dfrac{h^2}{2}\right)\ dm^3 = \left(240 \times h + 20 \times h^2\right) dm^3$.

2. $V(2) = 560\ dm^3$ est le volume d'eau dans l'abreuvoir lorsque celui-ci est plein. On cherche à connaître la hauteur d'eau h_0 pour laquelle cet abreuvoir est à moitié plein, c'est-à-dire h_0 tel que $240 \times h_0\ dm^2 + 20 \times h_0^2\ dm = \dfrac{560}{2}\ dm^3 = 280\ dm^3$ ou tel que $12 \times h_0\ dm + h_0^2 = 14\ dm^2$ ou encore tel que $(h_0 + 6\ dm)^2 - 36\ dm^2 = 14\ dm^2$. En passant à la racine carrée, ceci donne $h_0 + 6\ dm = \sqrt{50}\ dm$ car $h_0 + 6$ est positif. Enfin, $h_0 = (\sqrt{50} - 6)\ dm \approx 1,071\ dm$.