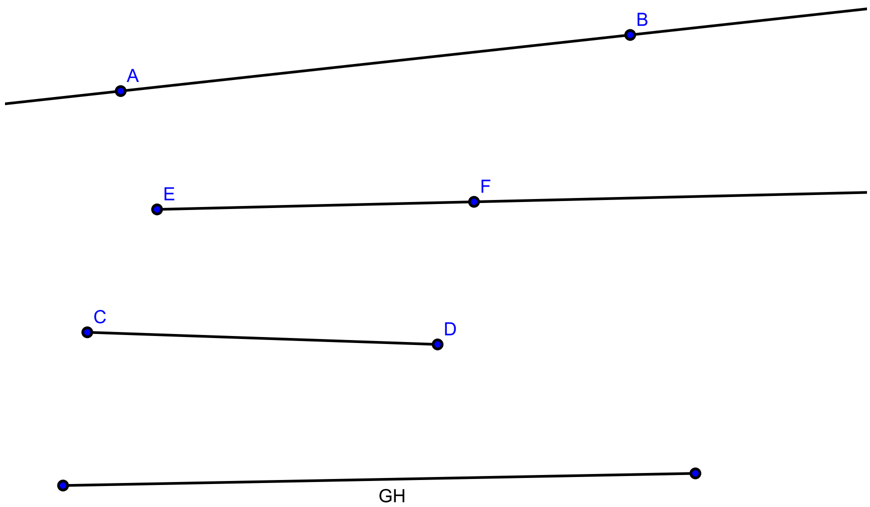
Géométrie plane, notions de base : points, droites, angles, cercles, polygones (triangles, quadrilatères, ...), polygones réguliers

Denis Vekemans *

1 Droites, demi-droites, segments (définitions)

Ces notions se passeront ici de définitions.

Notations.



— On note (AB) la **droite** passant par les points A et B.

— On note $[CD]$ le **segment** ayant pour extrémités C et D.

— On note $[EF)$ la **demi-droite** issue de E, passant par F.

— On note GH la **longueur** du segment $[GH]$.

Quand trois points sont sur la même droite, on les dit **alignés**.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Si $AB = AC$, a-t-on forcément $[AB] = [AC]$?

$\boxed{\textbf{Solution 1}}$ Non ! Pour s'en convaincre, il suffit de construire un triangle ABC isocèle en A avec B et C distincts. On a $AB = AC$ (parce que le triangle est isocèle), mais on n'a pas $[AB] = [AC]$ (car ces segments ne sont pas confondus, leur seule intersection étant le point A).

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Si les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont sans point commun, en est-il forcément de même pour les droites (AB) et (CD) ?

$\boxed{\textbf{Solution 2}}$ Non ! Pour s'en convaincre, il suffit de construire un triangle ACE (A, E et C distincts) avec B milieu de $[AE]$ et D milieu de $[CE]$. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont sans point commun, mais les droites (AB) et (CD) se coupent en E.

2 Droites perpendiculaires, droites parallèles

La notion de droites **perpendiculaires** n'est pas définie ici.

d est perpendiculaire à d' est noté $d \perp d'$.

Définition. Deux droites sont dites **parallèles** si elles n'ont aucun point commun ou sont confondues.

d est parallèle à d' est noté $d//d'$.

Définition. Deux droites sont dites **sécantes** si elles ont un point commun.

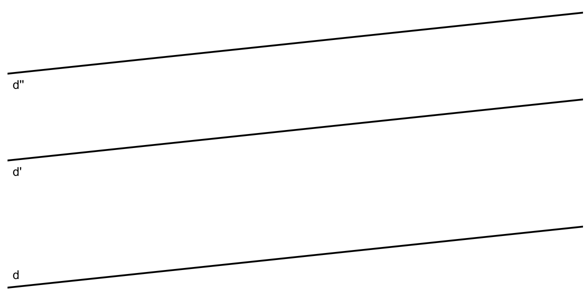
Théorème 2.1

Par un point donné,

1. *il passe une unique droite parallèle à une droite donnée,*
2. *il passe une unique droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Théorème 2.2

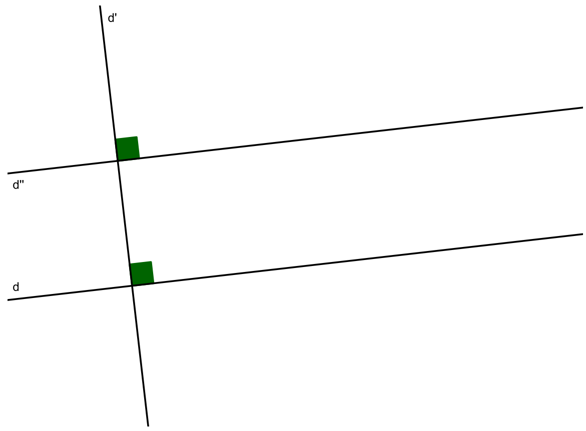
Transitivité du parallélisme



Si $d//d'$ et si $d'//d''$, alors $d//d''$.

Théorème 2.3

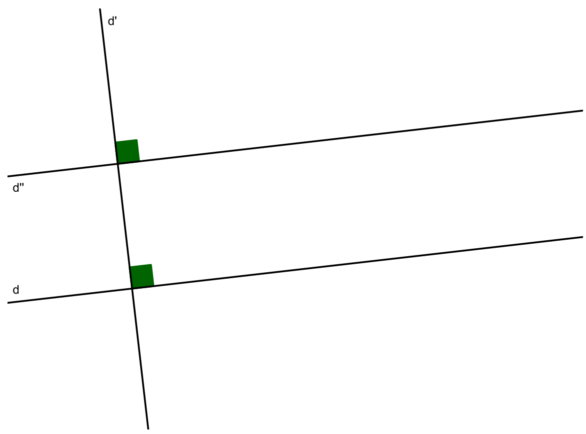
Composition de perpendicularité et de perpendicularité



Si $d \perp d'$ et si $d' \perp d''$, alors $d//d''$.

Théorème 2.4

Composition de parallélisme et de perpendicularité



Si $d//d''$ et si $d' \perp d$, alors $d' \perp d''$.

Théorème 2.5

Parallélisme et alignement.

Si $(AB)//(AC)$, alors A, B et C sont alignés.

Théorème 2.6

Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. *Si $AC = AB + BC$, alors A, B et C sont alignés et B appartient au segment $[AC]$.*

Réciproquement, si B appartient au segment $[AC]$, alors $AB + BC = AC$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit d une droite. Déterminer l'ensemble des points situés à moins de 2 cm de d.

$\boxed{\textbf{Solution 3}}$ On considère la droite d. Soit A un point de cette droite. On trace la perpendiculaire à la droite d passant par A. Sur cette perpendiculaire, on place deux points distincts B et C tels que $AB = 2\ cm$ et $AC = 2\ cm$. On trace la parallèle à d passant par B, notée d_1, et la parallèle à d passant par C, notée d_2. Le lieu recherché est la portion de plan comprise entre les deux droites d_1 et d_2.

3 Tracés à la règle et à l'équerre

Exercice 4 Tracés à la règle et à l'équerre ...

1. D'une droite perpendiculaire à (AB), passant par C.
2. D'une droite parallèle à (AB), passant par C.

Solution 4

1. On place la règle de manière à ce qu'elle porte la droite (AB), on pose l'équerre (sous-entendu l'angle droit de l'équerre) sur la règle et on fait glisser l'équerre jusqu'à ce qu'elle permette de tracer une droite contenant le point C, ce que l'on fait.
2. On place l'équerre de manière à ce que l'un des côtés de l'angle droit porte la droite (AB), on pose la règle sur l'autre côté de l'angle droit et on fait glisser l'équerre jusqu'à ce qu'elle permette de tracer une droite contenant le point C, ce que l'on fait.

Exercice 5 Donner des algorithmes de construction utilisant la règle graduée et l'équerre pour les deux figures suivantes :

1. $ABKC$ est un quadrilatère convexe ; ses diagonales se coupent en I ; $BI = AI = CI$; $IK = KC$; $(IK) \perp (KC)$.
2. CDE est un triangle ; A est le pied de la hauteur issue de D ; $CA = AD$; $CD = AE$; F est un point de (DE) ; $(CD)//(AF)$.

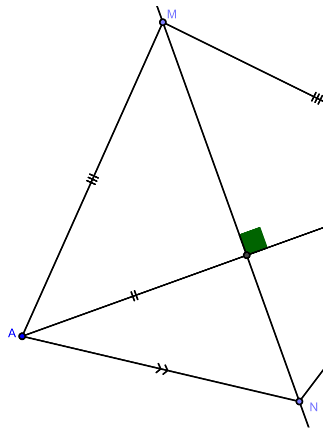
Solution 5

1. On trace un segment $[CK]$. On mène la perpendiculaire à la doite (KC) passant par K (utilisation de l'équerre). Sur cette perpendiculaire, on place le point I tel que $KI = KC$ (utilisation de la règle graduée). On trace la droite (CI). Sur la droite (CI), on place le point B tel que $CI = IB$ (utilisation de la règle graduée) et que B et C soient de part et d'autre de I. On trace la droite (CI). Sur la droite (KI), on place le point A tel que $AI = IC$ (utilisation de la règle graduée) et que A et K soient de part et d'autre de I. On trace enfin les segments $[KB]$, $[BA]$ et $[AC]$.
2. On trace un segment $[CA]$. On mène la perpendiculaire à la doite (CA) passant par A (utilisation de l'équerre). Sur cette perpendiculaire, on place le point D tel que $CA = AD$ (utilisation de la

règle graduée). On trace le segment $[CD]$. Sur la droite (CA), on place le point E tel que $AE = CD$ (utilisation de la règle graduée) et que C et E soient de part et d'autre de A. On trace la droite (ED). On trace la parallèle à la droite (CD) passant par le point A (utilisation de la règle et de l'équerre). On appelle F le point de concours de la droite (ED) et de la parallèle à la droite (CD) passant par A.

4 Médiatrices

Définition. L'ensemble des points équidistants de A et B est appelée **la médiatrice** du segment $[AB]$.



Théorème 4.1
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Réciproquement, si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors, il est équidistant des extrémités de ce segment.

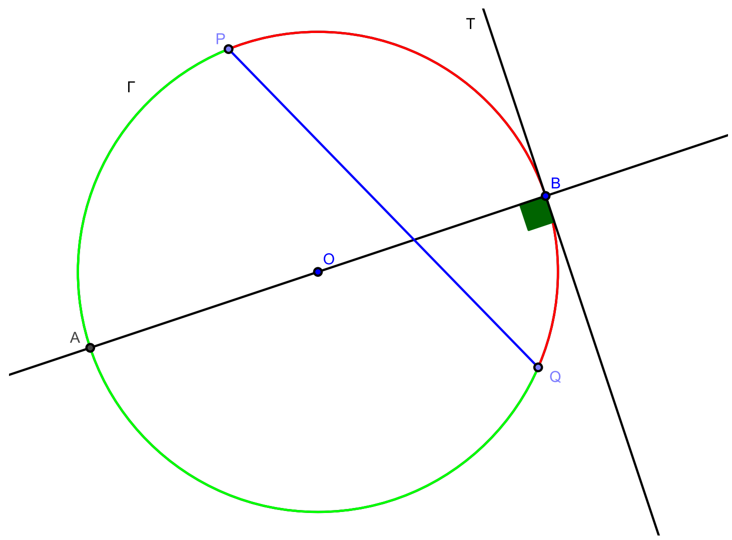
Théorème 4.2
Si une droite passe par deux points équidistants de A et de B, alors c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème 4.3
Si d est médiatrice du segment $[AB]$, alors, d est une droite telle que $d \perp (AB)$ et d passe par le milieu de $[AB]$. Réciproquement, si une droite d passe par le milieu de $[AB]$ et si cette droite est perpendiculaire à la droite (AB), alors d est médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème 4.4
Si une droite passe par un point équidistant de A et de B et est perpendiculaire à la droite (AB), alors c'est la médiatrice de $[AB]$.

5 Cercles (définitions)

Définitions.



1. **Le cercle** Γ de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance r de O.
2. **Le disque plein** Ω de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance inférieure ou égale à r de O.
3. L'intérieur strict du disque plein Ω' de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance strictement inférieure à r de O.
4. Soit $[AB]$ un segment. Soit O le milieu du segment $[AB]$. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon r. Soient P et Q des points du cercle. Soit T la droite passant par A, perpendiculaire à (AB).
   (a) On dit que les segments $[OA]$, $[OB]$, $[OP]$ et $[OQ]$ sont des **rayons** du cercle Γ.
   (b) On dit que le segment $[AB]$ est un **diamètre** du cercle Γ.
   (c) On dit que le segment $[PQ]$ est une **corde**.
   (d) On définit aussi un **arc de cercle** $\overset{\frown}{PQ}$ comme l'ensemble des points du cercle situés entre P et Q (petit arc $\overset{\frown}{PQ}$, grand arc $\overset{\smile}{PQ}$).
   (e) On dit que T est la **tangente au cercle** Γ en A.

<u>Positions relatives d'une droite et un cercle</u>.

1. Deux points d'intersection. La droite et le cercle sont **sécants**.
2. Une seule intersection. La droite et le cercle sont **tangents**.
3. Sans intersection. La droite et le cercle sont **disjoints**.

<u>Positions relatives de deux cercles</u>.

1. Une infinité d'intersections. Les cercles sont **confondus**.
2. Deux intersections uniquement. Les cercles sont **sécants**.
3. Une seule intersection. Les cercles sont **tangents**.

4. Sans intersection. Les cercles sont **disjoints**.
5. Lorsque deux cercles ont même centre, on dit qu'ils sont **concentriques**.

Exercice 6

1. Soient A et B fixés tels que $AB = 6\ cm$. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de 3 cm de A et à moins de 5 cm de B.
2. Soient C et D fixés tels que $CD = 4$. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de 2 de C et à plus de 3 de D.

Solution 6

1. On trace le segment $[AB]$ de 6 centimètres. On trace le cercle C_1 de centre A et de rayon 3 centimètres, puis le cercle C_2 de centre B et de rayon 5 centimètres. La zone cherchée est celle à l'intersection des deux disques de bords C_1 et C_2.
2. On trace le segment $[CD]$ de 4 unités. On trace le cercle C_1 de centre C et de rayon 2 unités, puis le cercle de centre D et de rayon 3 unités. La zone cherchée est le disque de bord C_1 privé du disque de bord C_2.

6 Angles (définitions)

Définitions. On appelle **angle** toute portion du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

On note $\widehat{AOB}$ pour l'angle **saillant** formé à l'aide des demi droites $[OA)$ et $[OB)$. L'autre angle formé par ces deux demi-droites est appelé angle **rentrant**.

On peut mesurer un angle sur une échelle allant de 0 à 360°. On se sert pour ce faire d'un rapporteur.

Un peu de vocabulaire lié aux mesures.

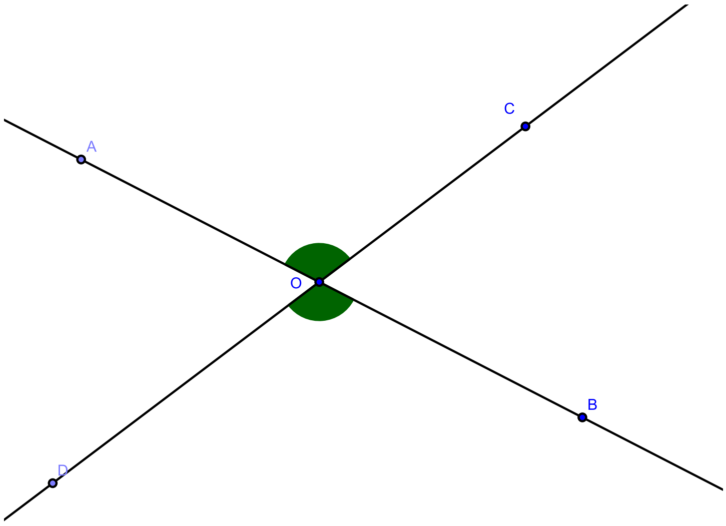
Nom de l'angle	Mesure en °
Angle saillant	entre 0 et 180
Angle rentrant	entre 180 et 360
Angle aigu	entre 0 et 90
Angle obtus	entre 90 et 180
Angle droit	90
Angle plat	180
Angle plein	360

Deux angles sont dit **supplémentaires** si la somme de leurs mesures fait 180°.

Deux angles sont dit **complémentaires** si la somme de leurs mesures fait 90°.

7 Angles et droites

Soient deux segments $[AB]$ et $[CD]$ sécants en O distinct à la fois de A, B, C et D.

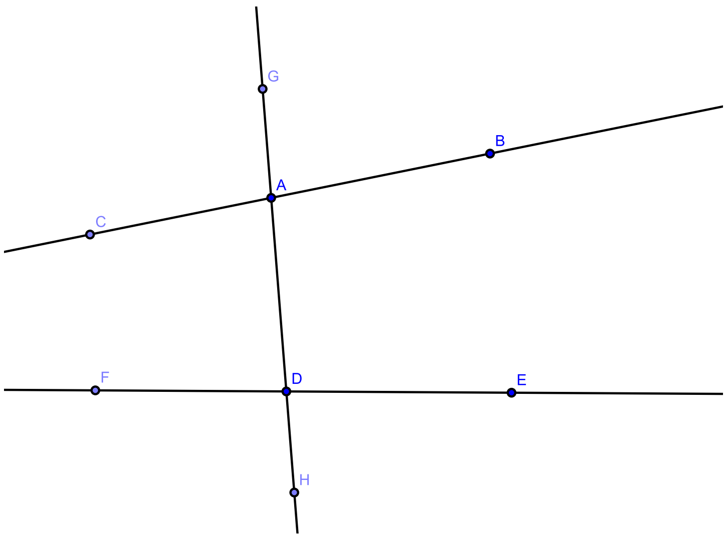


Les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ sont dits opposés par le sommet. C'est aussi le cas des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$.

Théorème 7.1

Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils sont égaux en mesure.

Soient deux segments $[BC]$ contenant un point A distinct à la fois de B et de C et $[EF]$ contenant un point D distinct à la fois de E et de F tels que A soit distinct de D, ce qui permet de définir la droite $(AB$, puis que B et E soient du même côté de cette droite (AB). Ensuite, soient G et H sur la droite (AD) tels que les quatre points G, A, D et H soient distincts et lus dans cet ordre.

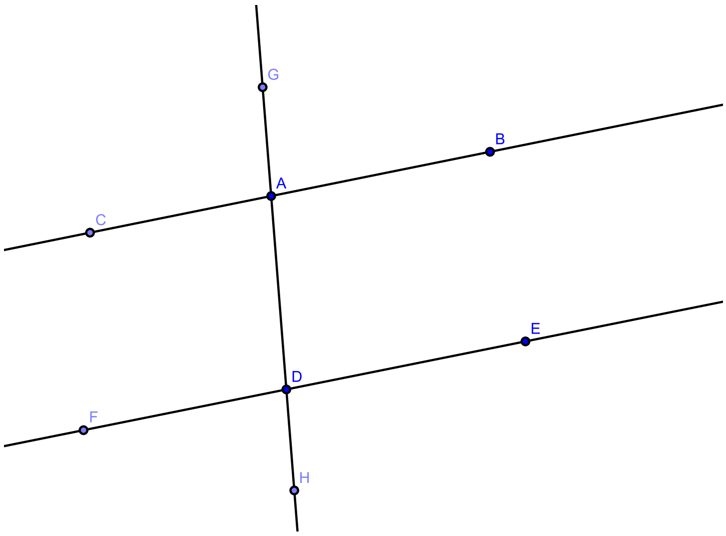


Les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{GDE}$ sont dits **alternes internes**. C'est aussi le cas des angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{GDF}$.

Les angles $\widehat{CAG}$ et $\widehat{EDH}$ sont dits **alternes externes**. C'est aussi le cas des angles $\widehat{BAG}$ et $\widehat{FDH}$.

Les angles $\widehat{CAG}$ et $\widehat{FDG}$ sont dits **correspondants**. C'est aussi le cas des angles $\widehat{BAG}$ et $\widehat{EDG}$; des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{FDH}$; des angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{EDH}$.

Théorème 7.2
Soient deux segments $[BC]$ contenant un point A distinct à la fois de B et de C et $[EF]$ contenant un point D distinct à la fois de E et de F tels que A soit distinct de D, ce qui permet de définir la droite $(AB$, puis que B et E soient du même côté de cette droite (AB). Ensuite, soient G et H sur la droite (AD) tels que les quatre points G, A, D et H soient distincts et lus dans cet ordre.



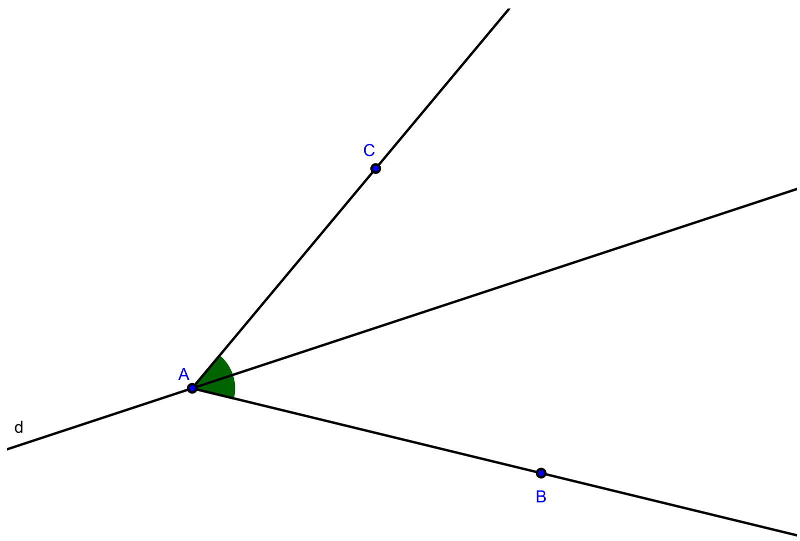
Si les droites (BC) et (EF) sont parallèles, alors
— $\widehat{CAH} = \widehat{GDE}$ *et* $\widehat{BAH} = \widehat{GDF}$ *i.e. les angles alternes internes sont de même mesure ;*
— $\widehat{CAG} = \widehat{EDH}$ *et* $\widehat{BAG} = \widehat{FDH}$ *i.e. les angles alternes externes sont de même mesure ;*
— *et* $\widehat{CAG} = \widehat{FDG}$, $\widehat{BAG} = \widehat{EDG}$, $\widehat{CAH} = \widehat{FDH}$ *et* $\widehat{BAH} = \widehat{EDH}$ *i.e. les angles correspondants sont de même mesure.*

Réciproquement,
— *si deux angles alternes internes*
— *ou si deux angles alternes externes*
— *ou encore si deux angles correspondants sont de même mesure,*
alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Autrement dit, quand deux droites ont la même inclinaison par rapport à une droite donnée, elles sont parallèles.

8 Bissectrices

<u>Définition</u>. La **bissectrice** d'un angle est la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui partage l'angle (saillant ou rentrant) en deux angles égaux en mesure.



$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Quel est l'ensemble des points équidistants des deux droites (OA) et (OB) ?

$\boxed{\textbf{Solution 7}}$ C'est la réunion de la bissectrice d de l'angle $\widehat{AOB}$ et de la perpendiculaire à d passant par O.

9 Angles et cercles

Définition. Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soient M et N deux points du cercle en dehors de ce petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

On dit que

— $\widehat{AOB}$ est **angle au centre**

— et que $\widehat{AMB}$ est **angle inscrit**,

interceptant tous deux l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Théorème 9.1

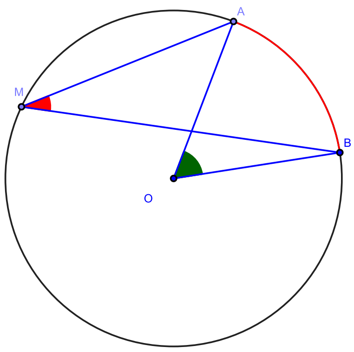
Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle.

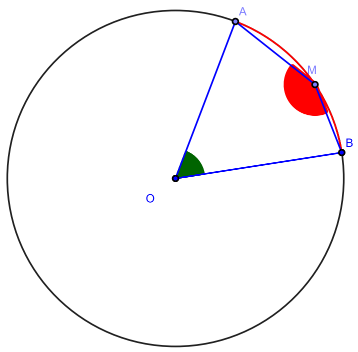
1. *Si M un point du cercle Γ sur le grand arc $\overset{\smile}{AB}$, alors*

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}.$$

2. *Si M un point du cercle Γ sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$, alors*

$$\widehat{AOB} = 360° - 2 \times \widehat{AMB}.$$





Théorème 9.2

Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle.

1. *Si M et N deux points du cercle appartenant tous deux au petit arc $\overset{\frown}{AB}$, alors*

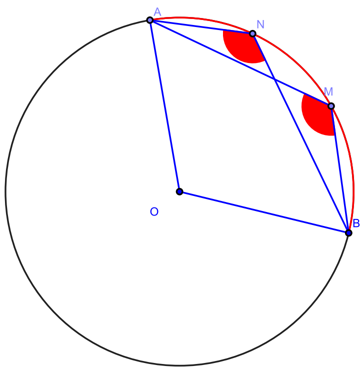
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

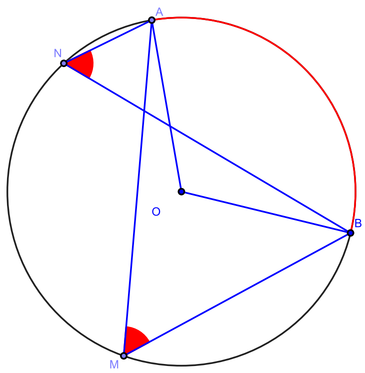
2. *Si M et N deux points du cercle appartenant tous deux au grand arc $\overset{\smile}{AB}$, alors*

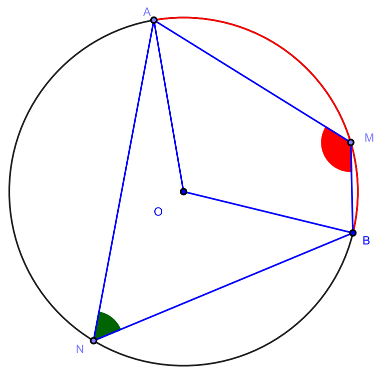
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

3. *Si M et N deux points du cercle appartenant l'un au petit arc $\overset{\frown}{AB}$ et l'autre au grand arc $\overset{\smile}{AB}$, alors*

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180°$$

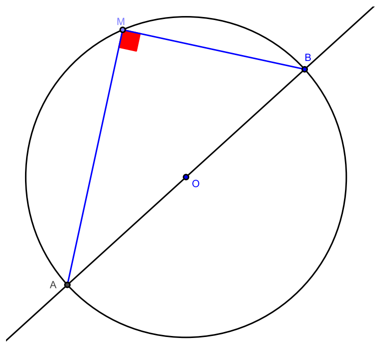






Théorème 9.3

Si $[AB]$ est un diamètre, et si M est un point de ce cercle distinct de A et de B, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.



10 Tracés à la règle et au compas

Exercice 8 Tracés à la règle et au compas ...

1. De la médiatrice d'un segment $[AB]$.
2. D'une droite perpendiculaires à (AB), passant par C.
3. Du milieu d'un segment $[AB]$.
4. De la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C.
5. De la parallèle à la droite (AB) passant par C.
6. Du centre d'un cercle.
7. De la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Solution 8

1. Le segment $[AB]$ est supposé donné. On trace le cercle C_1 de centre A et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à $AB/2$), puis le cercle C_2 de centre B et de rayon r (de même rayon que l'autre). Les deux cercles se coupent en deux points M et N (qui sont équidistants de A et de B) et la droite (MN) définit la médiatrice du segment $[AB]$.
2. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés. On trace le cercle Γ de centre C et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à la distance entre C et la droite (AB)). Le cercle Γ coupe la droite (AB) en deux points M et N (C est équidistant de M et de N donc sur la médiatrice du segment $[MN]$). Enfin, on trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut) qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par C.
3. Le segment $[AB]$ est supposé donné. On trace la médiatrice du segment $[AB]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice coupe le segment $[AB]$ en son milieu.
4. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés. On trace le cercle Γ de centre C et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à la distance entre C et la droite (AB)). Le cercle Γ coupe la droite (AB) en deux points M et N (C est équidistant de M et de N donc sur la médiatrice

du segment $[MN]$). Enfin, on trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut) qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par C.

5. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés.

   <u>1ère méthode</u> ! On trace la perpendiculaire (d) à la droite (AB) et qui passe par le point C (technique vue ci-haut). On trace ensuite la perpendiculaire (δ) à la droite (d) qui passe par le point C (technique vue ci-haut). La droite (δ) est alors parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur l'anti-transitivité du parallélisme).

   <u>2ème méthode</u> ! On place I le milieu du segment $[AC]$ (technique vue ci-haut). On trace la droite (BI) et on trace le cercle Γ de centre I et de rayon IB. Le cercle Γ coupe la droite (BI) en deux points distincts D et B tels que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme. La droite (CD) est alors parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur la caractérisation d'un parallélogramme par ses diagonales et sur la propriété de parallélisme de deux côtés opposés d'un parallélogramme.

   <u>3ème méthode</u> ! On trace le cercle C_1 de centre B et de rayon AC. On trace le cercle C_2 de centre C et de rayon AB. Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points dont l'un, D, tel que le quadrilatère $ABDC$ ne soit pas croisé. Le quadrilatère $ABDC$ est alors un parallélogramme et la droite (CD) est parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur l'égalité des longueurs des côtés opposés d'un parallélogramme et sur la propriété de parallélisme de deux côtés opposés d'un parallélogramme.

6. Le cercle C est supposé donné. On place deux points M et N sur le cercle C. On trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice coupe le cercle C en deux points A et B (le segment $[AB]$ est un diamètre). On place le milieu O du segment $[AB]$ (technique vue ci-haut). Le point O est le centre du cercle C.

7. L'angle $\widehat{AOB}$ est supposé donné. On trace un cercle de centre O. Ce cercle coupe la demi-droite $[OA)$ en M et la demi-droite $[OB)$ en N. Le triangle MNO est par conséquent isocèle en O. On trace alors la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice est également bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Cette technique est basée sur le fait que dans un triangle isocèle, la médiatrice issue du sommet principal est aussi bissectrice.

Exercice 9 Donner un algorithme de construction utilisant la règle et le compas pour la figure suivante : Γ est un cercle de centre J ; M, N, E et P sont des points de Γ ; $[ME]$ et $[NP]$ sont des diamètres de Γ ; $EL = EJ$; (EL) est la tangente au cercle en E ; L, P et J sont alignés.

Solution 9 On trace un cercle Γ de centre J. On trace un droite qui coupe le cercle Γ en les deux point distincts M et E. On trace alors la perpendiculaire (d) à la droite (EM) passant par E (technique vue ci-haut). On trace le cerlce C_1 de centre E de rayon EJ. Le cercle C_1 coupe la droite (d) en un point L. On trace la droite (LJ) qui coupe le cercle Γ en deux point P et N tel que P est celui qui appartient au segment $[JL]$.

11 Polygones

Définitions. Un **polygone convexe** est une intersection finie de demi-plans (une figure géométrique du plan délimitée par des segments est un polygone). On définit ici un polygone convexe par son intérieur (il existe des définitions basées sur la frontière -i.e. le bord-).[1]

Un **polygone** est une réunion finie de polygones convexes.[2]

Un polygone possède un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Théorème 11.1
Soit P un polygone connexe et borné. Si on note S son nombre de sommets et A son nombre d'arêtes, on a $S = A$.

Un polygone qui n'est pas convexe est dit concave. Un cas particulier des polygones concaves est celui des polygones croisés où au moins deux côtés non consécutifs, considérés comme segments, se coupent.

Théorème 11.2
La somme des angles d'un polygone non croisé à n $(n > 2)$ côtés vaut $(n-2) \times 180°$.[3]

12 Polygones réguliers

Définitions. Un polygone est dit **régulier** s'il est convexe, inscriptible dans un cercle et si tous ses côtés, considérés comme segments, ont même longueur.

Théorème 12.1
Un polygone régulier a tous ses angles égaux en mesure.

Théorème 12.2
Un polygone régulier à n côtés a
- *un angle au centre de* $\dfrac{360°}{n}$,
- *un angle de côtés* $\dfrac{180° \times (n-2)}{n}$.

13 Triangles

Un **triangle** est un polygone à trois côtés.

1. On se limite dans la suite au cas des polygones bornés (i.e. qui peuvent être contenus dans un disque).
2. On se limite dans la suite au cas des polygones connexes (i.e. d'un seul tenant).
3. Dans le cas d'un polygone croisé, il est difficile de définir l'intérieur et l'extérieur de ce polygone et par conséquent les angles d'un polygone.

Exercice 10 Représenter de façon ensembliste les triangles scalènes, isocèles et équilatéraux. Ces *patates* classifient les triangles par les longueurs des côtés.

Solution 10

- Les triangles équilatéraux ont leurs trois côtés de même longueur ;
- les triangles isocèles ont au moins deux côtés de même longueur (les équilatéraux sont donc tous isocèles) ;
- les scalènes ont trois côtés de longueurs distinctes (dans la famille des triangles, ce sont donc ceux qui ne sont pas isocèles).

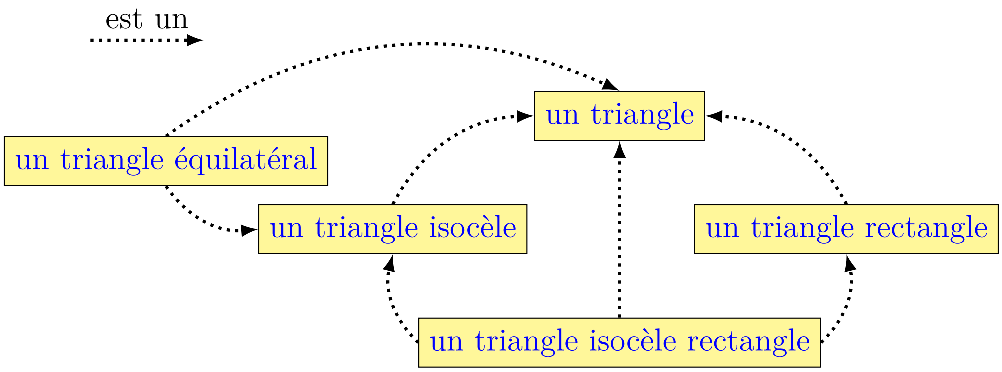
Exercice 11 Représenter de façon ensembliste les triangles acutangles, obtusangles, rectangles, isocèles et équilatéraux. Ces *patates* classifient les triangles par les angles.

Solution 11

- Les triangles équilatéraux ont leurs trois angles de même mesure ;
- les triangles isocèles ont au moins deux angles de même mesure (les équilatéraux sont donc tous isocèles) ;
- les triangles rectangles ont un angle droit (ils ne peuvent être équilatéraux, ils peuvent être isocèles, mais ils peuvent ne pas être isocèles ;
- les triangles obtusangles possèdent exactement un angle obtus (supérieur strictement à 90° en mesure) (ils ne peuvent être équilatéraux, ils peuvent être isocèles, ils ne peuvent pas être rectangles mais ils peuvent ne pas être isocèles) ;
- les triangles acutangles possèdent trois angles aigus (inférieurs strictement à 90° en mesure) (ce sont tous ceux qui ne sont ni rectangles, ni obtusangles).

Exercice 12 Parmi les triangles équilatéraux, les les triangles isocèles, les triangles rectangles, les triangles isocèles rectangles et les triangles, donner le graphe de la relation "*est un*".

Solution 12



Droites particulières dans le triangle ABC :

1. La **hauteur** issue de A est la droite passant par A qui est perpendiculaire à la droite (BC). Le pied de la hauteur issue de A est le point de concours de la hauteur issue de A et de la droite (BC). Par extension, le mot hauteur désigne aussi la distance entre A et le pied relatif à sa hauteur.
2. La **médiane** issue de A est le segment dont les extrémités sont A et le milieu du segment $[BC]$. La médiane est également, par abus de langage, la droite passant par A et par le milieu du segment $[BC]$. Par extension, le mot médiane désigne aussi la distance entre A et le milieu du segment $[BC]$.
3. La **médiatrice** du segment $[BC]$ est déjà définie. C'est la médiatrice relative au segment $[BC]$ du triangle ABC.
4. La **bissectrice** de l'angle $\widehat{BAC}$ est déjà définie. C'est la bissectrice issue de A du triangle ABC. Le pied de la bissectrice issue de A est le point de concours de la bissectrice issue de A et de la droite (BC). Par extension, le mot bissectrice désigne aussi la distance entre A et le pied relatif à sa bissectrice.

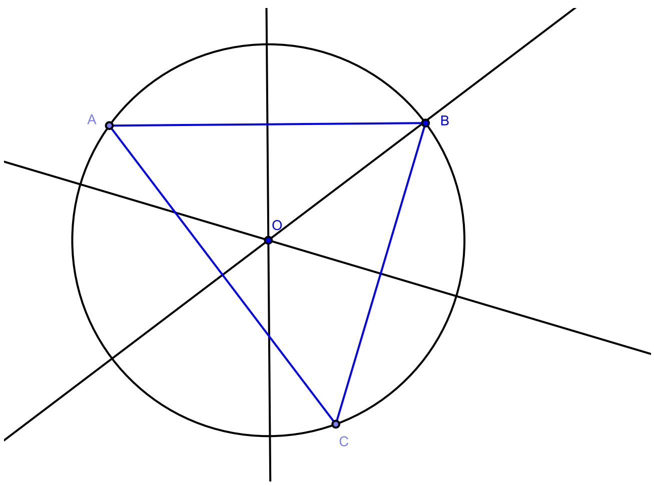
Théorème 13.1

Les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices d'un triangle sont concourantes.

*On appelle respectivement les points de concours l'**orthocentre**, le **centre de gravité**, le **centre du cercle circonscrit** et le **centre du cercle inscrit** du triangle.*

Théorème 13.2

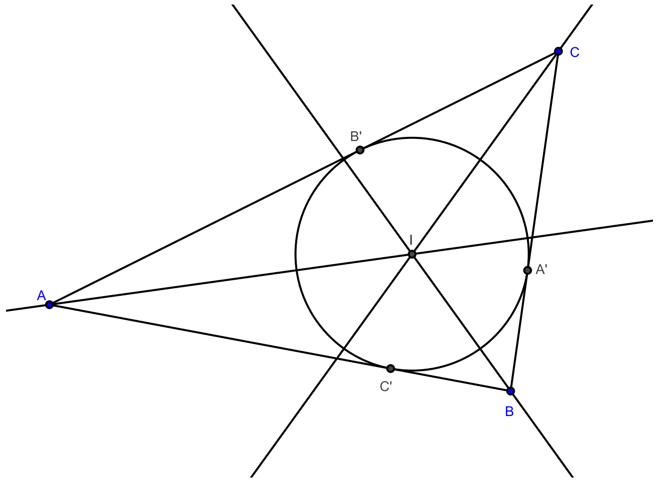
Dans un triangle ABC, le centre du cercle circonscrit O est, comme son nom l'indique, le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est par conséquent équidistant des trois sommets de ce triangle : $OA = OB = OC$.



Théorème 13.3

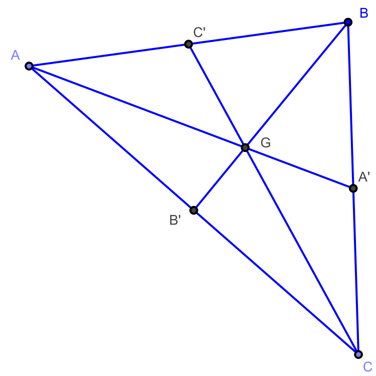
Dans un triangle ABC, le centre du cercle inscrit est, comme son nom l'indique, le centre du cercle inscrit dans le triangle. Il est par conséquent tangent en A' au côté $[BC]$, tangent en B' au côté $[AC]$ et tangent en C' au côté $[AB]$.

De plus, on a : $AB' = AC'$, $BA' = BC'$ et $CA' = CB'$.



Théorème 13.4

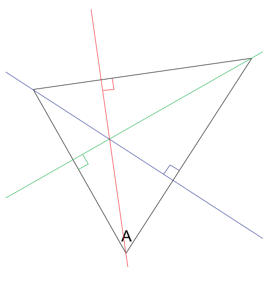
Dans un triangle ABC, si A' est milieu de $[BC]$, B' est milieu de $[AC]$ et C' est milieu de $[AB]$, alors le centre de gravité G du triangle esttel que $AG = 2 \times GA'$, $BG = 2 \times GB'$ et $CG = 2 \times GC'$.



Théorème 13.5

Utilisation de différents points de concours du triangle

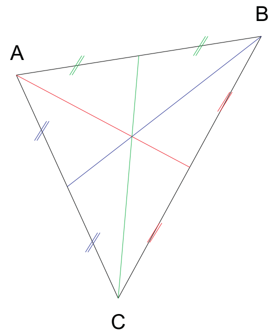
1. *De l'orthocentre ...*



   (a) *Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des hauteurs de ce triangle, alors c'est une hauteur de ce triangle.*

(b) Si une droite est perpendiculaire à un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des hauteurs de ce triangle, alors c'est une hauteur de ce triangle.

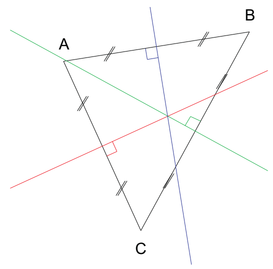
2. Du centre de gravité...



(a) Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médianes de ce triangle, alors c'est une médiane de ce triangle.

(b) Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médianes de ce triangle, alors c'est une médiane de ce triangle.

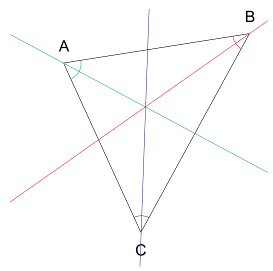
3. Du centre du cercle circonscrit ...



(a) Si une droite est perpendiculaire à un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médiatrices de ce triangle, alors c'est une médiatrice de ce triangle.

(b) Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médiatrices de ce triangle, alors c'est une médiatrice de ce triangle.

4. Du centre du cercle inscrit ... Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point



d'intersection de deux des bissectrices de ce triangle, alors c'est une bissectrice de ce triangle.

Théorème 13.6

Propriétés du triangle rectangle.

1. *Si un triangle ABC est rectangle en A, alors la médiane issue de A mesure la moitié de l'hypoténuse $[BC]$.*

   Réciproquement, si dans un triangle ABC, la médiane issue de A mesure la moitié du segment $[BC]$, alors ce triangle est rectangle en A et le côté $[BC]$ en est l'hypoténuse.

2. *Si un triangle ABC est rectangle en A, alors l'hypoténuse $[BC]$ est diamètre du cercle circonscrit.*

   Réciproquement, si un triangle ABC a un côté $[BC]$ qui est diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle en A et le diamètre $[BC]$ en est l'hypoténuse.

3. *Soit un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A, alors $AH^2 = BH \times HC$.*

   Réciproquement, soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A tel que $AH^2 = BH \times HC$ et que H appartienne au segment $[BC]$, alors ce triangle est rectangle en A.

Théorème 13.7

Propriétés du triangle équilatéral.

1. *Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux en mesure (60°).*

   Réciproquement, si dans un triangle, les trois angles sont égaux en mesure (60°), alors ce triangle est équilatéral.

2. *Dans un triangle équilatéral, les côtés sont de même longueur.*

   Réciproquement, si dans un triangle, les trois côtés sont de même longueur, alors ce triangle est équilatéral.

3. *Un triangle équilatéral possède trois différents axes de symétries orthogonales et un centre de rotations de 120° et de 240°.*

   Réciproquement, si un triangle possède deux axes de symétries orthogonales, il est équilatéral.

4. *Dans un triangle équilatéral, les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices (issues d'un même sommet) sont confondues.*

5. *Éléments pour une réciproque :*

   (a) *dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et médiane est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*

   (b) *dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*

   (c) *dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*

   (d) *dans un triangle, une droite à la fois médiane et hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*

(e) dans un triangle, une droite à la fois médiane et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

(f) dans un triangle, une droite à la fois hauteur et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle.

Théorème 13.8

Propriétés du triangle isocèle.

1. *Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux en mesure.*

   Réciproquement, si dans un triangle, deux angles sont égaux en mesure, alors ce triangle est isocèle.

2. *Dans un triangle isocèle, deux côtés sont de même longueur.*

   Réciproquement, si dans un triangle, deux côtés sont de même longueur, alors ce triangle est isocèle.

3. *Un triangle isocèle possède un axe de symétrie orthogonale.*

   Réciproquement, si un triangle possède un axe de symétrie orthogonale, il est isocèle.

4. *Dans un triangle isocèle, quatre droites particulières (la hauteur issue du sommet principal, la médiane issue du sommet principal, la médiatrice de la base principale et la bissectrice issue du sommet principal) sont confondues.*

5. *Eléments pour une réciproque :*

   (a) dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et médiane est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

   (b) dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

   (c) dans un triangle, une droite à la fois médiatrice et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

   (d) dans un triangle, une droite à la fois médiane et hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

   (e) dans un triangle, une droite à la fois médiane et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;

   (f) dans un triangle, une droite à la fois hauteur et bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle.

Théorème 13.9

Soient trois points A, B, et C. On a l'inégalité triangulaire $AB + AC \geq BC$.

De plus, lorsque $AB + AC = BC$, alors A appartient au segment $[BC]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ [Guadeloupe, Guyane (2000)] Soit ABC un triangle. Les médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en G. Montrer que les triangles $BA'G$, $CA'G$, $AB'G$, $CB'G$, $AC'G$ et $BC'G$ ont même aire.

$\boxed{\textbf{Solution 13}}$ $\mathcal{A}(AB'G) = \mathcal{A}(CB'G)$ car les deux triangles $AB'G$ et $CB'G$ ont même hauteur issue de G et même longueur de base car $AB' = B'C$.

De même, $\mathcal{A}(CA'G) = \mathcal{A}(BA'G)$, et, $\mathcal{A}(BC'G) = \mathcal{A}(AC'G)$.

$\mathcal{A}(ABG) = 2 \times \mathcal{A}(BA'G)$ car les deux triangles ABG et $BA'G$ ont même hauteur issue de B et, et $AG = 2 \times A'G$.

De même, $\mathcal{A}(ACG) = 2\times\mathcal{A}(CA'G)$, $\mathcal{A}(BAG) = 2\times\mathcal{A}(AB'G)$, $\mathcal{A}(BCG) = 2\times\mathcal{A}(CB'G)$, $\mathcal{A}(CAG) = 2 \times \mathcal{A}(AC'G)$, et $\mathcal{A}(CBG) = 2 \times \mathcal{A}(BC'G)$.

Puis, de $\mathcal{A}(ABG) = 2 \times \mathcal{A}(BA'G)$, on obtient $\mathcal{A}(AC'G) + \mathcal{A}(BC'G) = 2 \times \mathcal{A}(BA'G)$, et comme $\mathcal{A}(BC'G) = \mathcal{A}(AC'G)$, on déduit $\mathcal{A}(BC'G) = \mathcal{A}(AC'G) = \mathcal{A}(BA'G)$.

De même, $\mathcal{A}(BA'G) = \mathcal{A}(CA'G) = \mathcal{A}(CB'G)$ et $\mathcal{A}(CB'G) = \mathcal{A}(AB'G) = \mathcal{A}(AC'G)$.

En conclusion :

$$\mathcal{A}(BC'G) = \mathcal{A}(AC'G) = \mathcal{A}(BA'G) = \mathcal{A}(CA'G) = \mathcal{A}(CB'G) = \mathcal{A}(AB'G).$$

14 Quadrilatères

Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés. Celui-ci peut être convexe (cas où les diagonales en tant que segments sont sécantes) ou non, et puis, être croisé (cas où deux côtés opposés en tant que segments sont sécants) ou non.

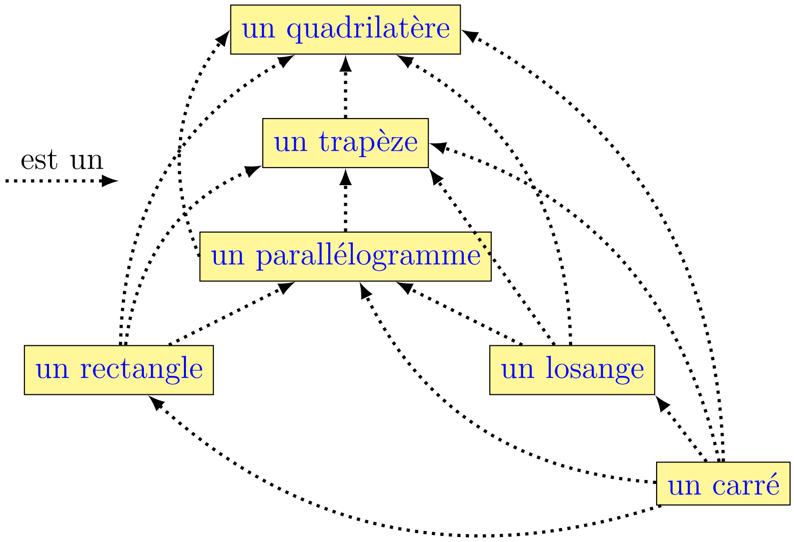
$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Représenter de façon ensembliste carrés, les rectangles, les losanges, les parallélogrammes, les trapèzes et les quadrilatères.

$\boxed{\textbf{Solution 14}}$

— Les ensembles de rectangles et de losanges ont pour intersection l'ensemble des carrés,
— l'ensemble des parallélogrammes contient tout l'ensemble des rectangles et tout l'ensemble des losanges,
— l'ensemble des trapèzes contient tout l'ensemble des parallélogrammes,
— et l'ensemble des quadrilatères contient tout l'ensemble des trapèzes.

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Parmi les carrés, les rectangles, les losanges, les parallélogrammes, les trapèzes et les quadrilatères, donner le graphe de la relation "*est un*".

$\boxed{\textbf{Solution 15}}$



Théorème 14.1

*Caractérisations du **parallélogramme***

1. (a) *Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles est un **parallélogramme** (définition du parallélogramme).*

2. (a) *Un quadrilatère convexe ayant ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur.*

3. (a) *Un quadrilatère convexe ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur.*

4. (a) *Un quadrilatère ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.*

5. (a) *Un quadrilatère convexe ayant ses angles opposés égaux en mesure est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses angles opposés égaux en mesure.*

Théorème 14.2

*Caractérisations du **losange***

1. (a) *Un losange est un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère convexe ayant quatre côtés de même longueur est un **losange** (définition du losange).*

2. (a) *Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.*
   (b) *Réciproquement, un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.*
3. (a) *Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.*
   (b) *Réciproquement, un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.*

Remarque : Tout losange est un parallélogramme. La réciproque est fausse.

Théorème 14.3

Caractérisations du ***rectangle***

1. (a) *Un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle.*
   (b) *Réciproquement, un rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.*
2. (a) *Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.*
   (b) *Réciproquement, un quadrilatère ayant trois angles droits est un* ***rectangle*** *(définition du rectangle).*
3. (a) *Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle.*
   (b) *Réciproquement, un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.*

Remarque : Tout rectangle est un parallélogramme. La réciproque est fausse.

Théorème 14.4

Caractérisations du ***carré***

1. (a) *Un rectangle qui possède deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.*
   (b) *Réciproquement, un carré est un rectangle qui possède deux côtés consécutifs de même longueur.*
2. (a) *Un losange qui possède ses diagonales de même longueur est un carré.*
   (b) *Réciproquement, un carré est un losange qui possède ses diagonales de même longueur.*
3. (a) *Un rectangle qui possède ses diagonales perpendiculaires est un carré.*
   (b) *Réciproquement, un carré est un rectangle qui possède ses diagonales perpendiculaires.*
4. (a) *Un losange qui possède un angle droit est un carré.*
   (b) *Réciproquement, un carré est un losange qui possède un angle droit.*
5. (a) *Tout carré est à la fois rectangle et losange.*
   (b) *Réciproquement, un quadrilatère qui est à la fois rectangle et losange est un* ***carré*** *(définition du carré).*

Remarques :

— *Tout carré est un losange. La réciproque est fausse.*

— *Tout carré est un rectangle. La réciproque est fausse.*

Théorème 14.5

Caractérisations par les isométries du parallélogramme, du losange, du rectangle et du carré

1. (a) *Un parallélogramme possède un centre de symétrie.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère convexe admet un centre de symétrie, c'est un parallélogramme.*

2. (a) *Un losange possède deux axes de symétries (orthogonales) perpendiculaires entre eux (qui sont ses diagonales) et un centre de symétrie.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère convexe possède deux axes de symétries (orthogonales), c'est un losange lorsque ces axes de symétrie sont ses diagonales.*

3. (a) *Un rectangle possède deux axes de symétries (orthogonales) perpendiculaires entre eux (qui ne sont pas ses diagonales) et un centre de symétrie.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère convexe possède deux axes de symétries (orthogonales), c'est un rectangle lorsque ces axes de symétrie ne sont pas ses diagonales.*

4. (a) *Un carré possède quatre axes de symétrie (les diagonales et les médianes), un centre (l'intersection des axes de symétries) qui est centre de rotation de* $90°$, *de* $180°$ *(i.e. un centre de symétrie) et de* $270°$.

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère possède trois axes de symétries (orthogonales), c'est un carré.*

Théorème 14.6

Caractérisations du ***trapèze***

1. (a) *Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, c'est un* ***trapèze*** *(définition du trapèze).*

2. (a) *Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède au moins un angle droit.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze qui possède au moins un angle droit, est un* ***trapèze rectangle*** *(définition du trapèze rectangle).*

3. (a) *Un trapèze rectangle est un quadrilatère qui possède deux angles droits consécutifs.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère qui possède deux angles droits consécutifs est un trapèze rectangle.*

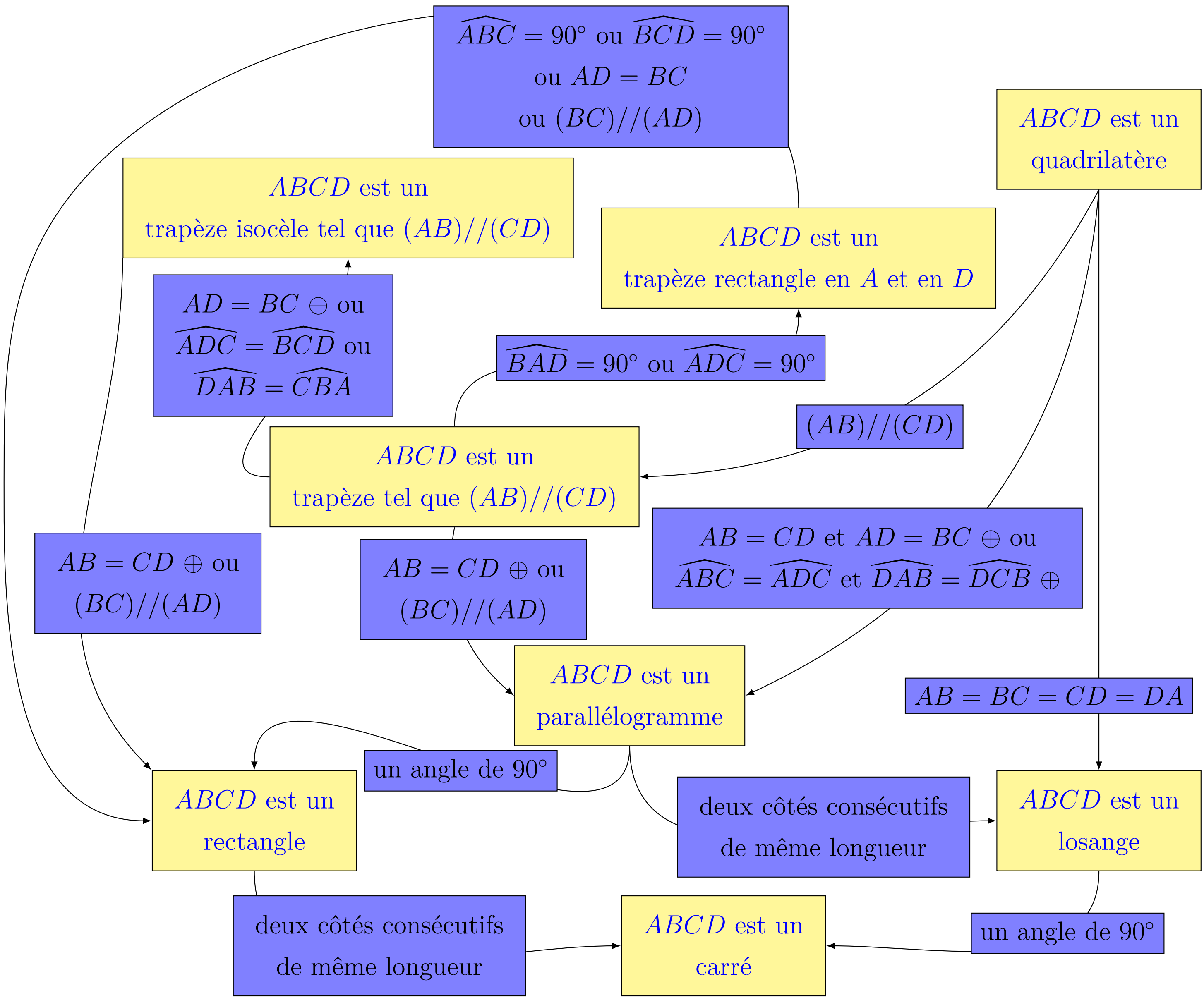
4. (a) *Un trapèze isocèle est soit un rectangle, soit un trapèze qui a deux côtés opposés non parallèles et de même longueur.*

   (b) *Réciproquement, un rectangle est un* ***trapèze isocèle*** *; et un trapèze ayant deux côtés opposés non parallèles et de même longueur est aussi un* ***trapèze isocèle*** *(définition du trapèze isocèle).*

5. (a) *Un trapèze isocèle est un trapèze qui possède un axe de symétrie.*

(b) *Réciproquement, un trapèze qui possède un axe de symétrie est un trapèze isocèle.*

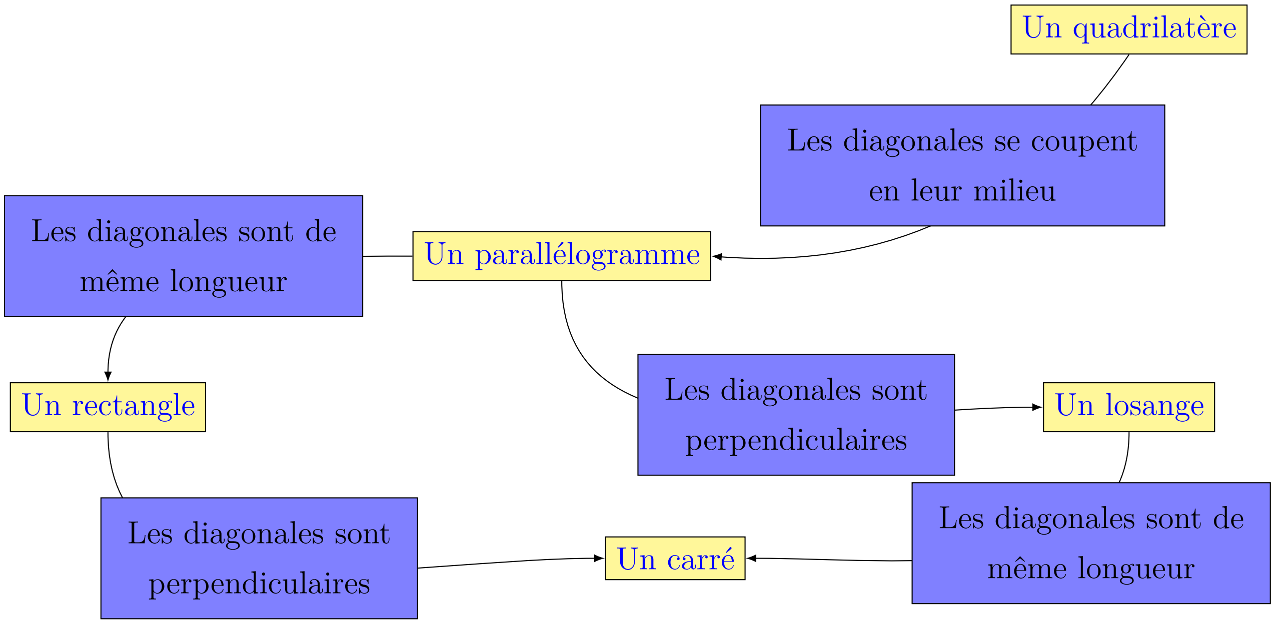
Schématisation des propriétés des quadrilatères sur les **côtés** (longueurs, parallélisme, perpendicularité, angles).



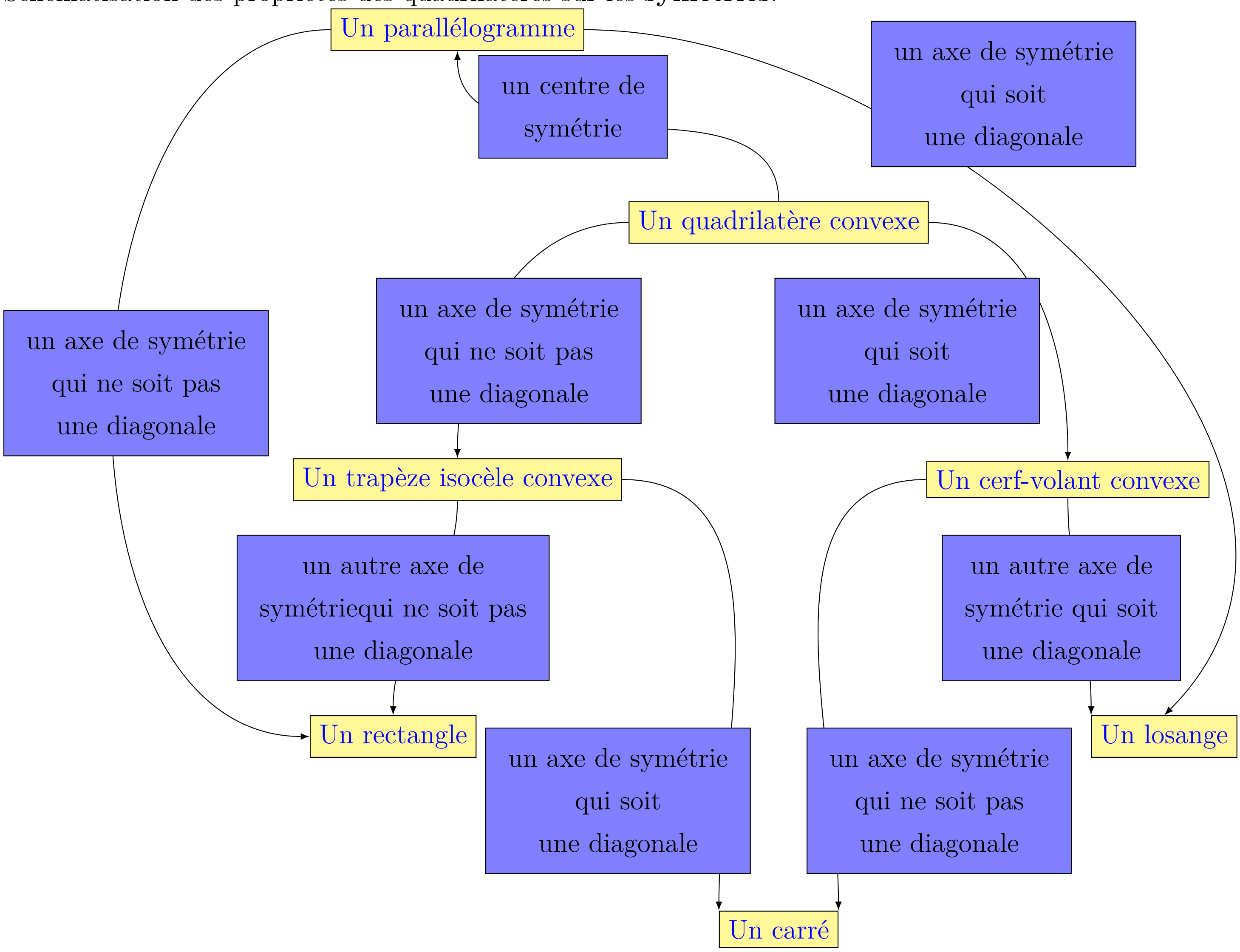
⊕ : en supposant que $ABCD$ est convexe

⊖ : en supposant que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme

Schématisation des propriétés des quadrilatères sur les **diagonales**.

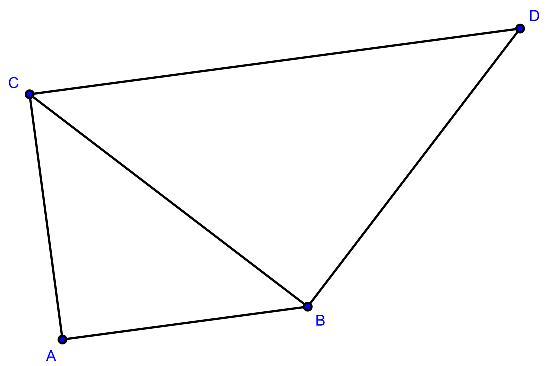


Schématisation des propriétés des quadrilatères sur les **symétries**.



Exercice 16 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Soit BCD un triangle isocèle rectangle en B. A et D sont de part et d'autre de la droite (BC). Montrer que $ABDC$ est un trapèze.

Solution 16 La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AC) car le triangle ABC est rectangle en A.



De plus, comme le triangle ABC est isocèle rectangle en A, l'angle $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ mesure $\frac{180°-90°}{2} = 45°$ car la somme des mesures des angles d'un triangle est de 180° et car les angles à la base dans un triangle isocèle sont de même mesure.

De la même manière, l'angle $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$ mesure $\frac{180°-90°}{2} = 45°$ car le triangle BCD est isocèle rectangle en B.

Je déduis que l'angle $\widehat{ACD}$ est droit car $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = (45+45)° = 90°$.

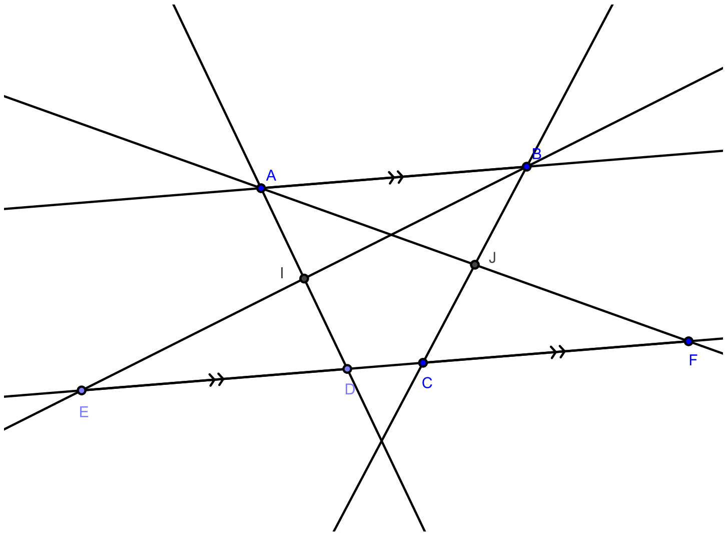
Enfin, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (CD).

En résumé, la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AC) et la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (CD), donc la droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.

Exercice 17 Soient deux droites parallèles (AB) et (CD) (le quadrilatère $ABCD$ est convexe). Soient E et F tels que E, D, C et F sont alignés dans cet ordre et $AB = ED = CF$. Les droites (AD) et (EB) se coupent en I. Les droites (BC) et (AF) se coupent en J. Montrer que I est milieu du segment $[AD]$ ou que J est milieu du segment $[BC]$.

Solution 17 On sait que (AB) est parallèle à (ED) et que $AB = ED$. À supposer que le quadrilatère $ABDE$ soit convexe (c'est la cas, car sinon le quadrilatère $ABED$ est un parallélogramme et les droites (AD) et (EB) sont parallèles et ne peuvent se couper en un point I), on déduit que ce quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme. Puis, ses diagonales $[AD]$ et $[EB]$ se coupent en leur milieu I et I est milieu du segment $[AD]$.

On sait que (AB) est parallèle à (CF) et que $AB = CF$. À supposer que le quadrilatère $ABFC$



soit convexe (c'est la cas, car sinon le quadrilatère $ABCF$ est un parallélogramme et les droites (AF) et (BC) sont parallèles et ne peuvent se couper en un point J), on déduit que ce quadrilatère $ABFC$ est un parallélogramme. Puis, ses diagonales $[AF]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu J et J est milieu du segment $[BC]$.

Exercice 18 Construire la figure suivante en utilisant uniquement règle non graduée et compas.

— le triangle ABC est isocèle en B ;
— le triangle BCD est isocèle en C ;
— la mesure de l'angle en B du triangle ABC est de 30° ;
— les points B, A et D sont alignés dans cet ordre.

On laissera apparents tous les traits de construction, mais la construction ne doit pas être justifiée.

Déterminer quelle aurait dû être la mesure de l'angle en B du triangle ABC pour que le triangle CDA soit isocèle en A.

Solution 18 Les étapes de la construction, très sommairement :

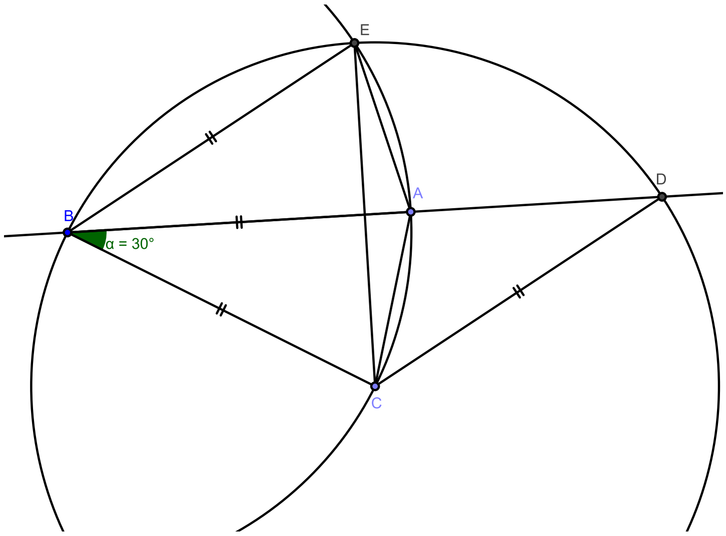
— construction de BCE équilatéral pour avoir un angle de 60°
— construction de la bissectrice de l'angle en B du triangle BCE pour avoir un angle de 30° et obtenir le point C ;
— construction de BCD isocèle en C.

On appelle α la mesure de l'angle en B et en D dans le triangle BCD, puis aussi en C ou en D dans le triangle ACD et β la mesure de l'angle en C ou en D dans le triangle ACD).

On a alors l'angle en A du triangle ACD qui mesure $180° - 2 \times \alpha$ (car la somme des angles d'un triangle mesure 180°).

Aussi, on a l'angle en A du triangle ACD qui mesure $180° - \beta$ (car les points B, A et D sont alignés dans cet ordre).

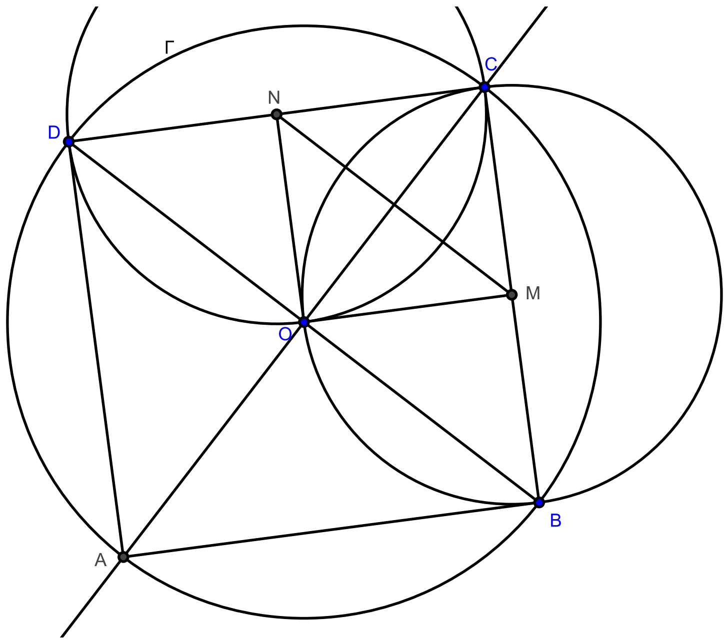
De ces deux propriétés, on déduit $2 \times \alpha = \beta$.



En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle mesure 180° pour le triangle ABC, on obtient $2 \times \beta + \alpha = 180°$. Puis, en utilisant $2 \times \alpha = \beta$, on obtient $5 \times \alpha = 180°$, puis $\alpha = 36°$.

Exercice 19 Soit BCD un triangle isocèle rectangle en C. Soit M le centre du cercle de diamètre $[BC]$. Soit N le centre du cercle de diamètre $[CD]$. Soit O le centre du cercle Γ circonscrit au triangle BCD. Le cercle Γ et la droite (OC) se coupent en deux points distincts A et C. Quelle est la nature de $ABCD$? de $BMND$? de $BMNO$?

Solution 19 Figure :



1. On montre que $ABCD$ est un **carré**.

   M est milieu du segment $[BC]$, car centre du cercle Γ de diamètre $[BC]$. De même, N est milieu du segment $[CD]$. Le triangle BCD est rectangle en B, donc le centre O du cercle circonscrit au triangle BCD est le milieu de l'hypoténuse $[BD]$.

Tout d'abord, $ABCD$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu : d'une part, $OC = OA$ (car A est sur le cercle Γ) et C, O et A sont alignés (car A est sur la droite (CO)), donc O est milieu du segment $[AC]$ (puisque A est distinct de C) ; et d'autre part, O est milieu du segment $[BD]$ (voir plus haut).

Le parallélogramme $ABCD$ est en fait un losange car il possède deux côtés consécutifs égaux : $BC = CD$ (car le triangle BCD est isocèle en C).

Le losange $ABCD$ est en fait un carré car ses diagonales sont de même longueur : $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres d'un même cercle Γ ($[AC]$ est un diamètre de Γ car c'est une corde de Γ qui contient le centre O de Γ) et sont par conséquent de même longueur.

2. On montre que $BMND$ est un **trapèze isocèle**.

   BCD un triangle isocèle rectangle en C, et donc l'angle mesure $\dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$ car la somme des mesures des angles d'un triangle est de 180° et car les angles à la base dans un triangle isocèle sont égaux. Immédiatement, on obtient que le triangle MCN est rectangle en C, et $CM = \dfrac{1}{2} \times CB = \dfrac{1}{2} \times CD = CN$ (car M est milieu du segment $[BC]$; car $CB = CD$ vu que le triangle BCD est isocèle en C ; et car N est milieu du segment $[CD]$). Il s'ensuit que le triangle MCN est isocèle rectangle en C. On déduit alors que $\widehat{CMN} = \widehat{CNM} = 45°$. Les angles $\widehat{CMN}$ et $\widehat{CBD}$ sont correspondants et égaux, donc les droites (BD) et (MN) sont parallèles.

   Remarque. Par le théorème des milieux que l'on verra plus tard, c'était immédiat.

   Puisque les droites (BD) et (MN) sont parallèles, le quadrilatère $BMND$ est un trapèze. Et, comme le triangle BCD est isocèle en C, il est alors immédiat que le trapèze $BMND$ est un trapèze isocèle.

3. Je vais montrer que BMNO est un **parallélogramme**.

   On vient de voir que les droites (BO) et (MN) étaient parallèles.

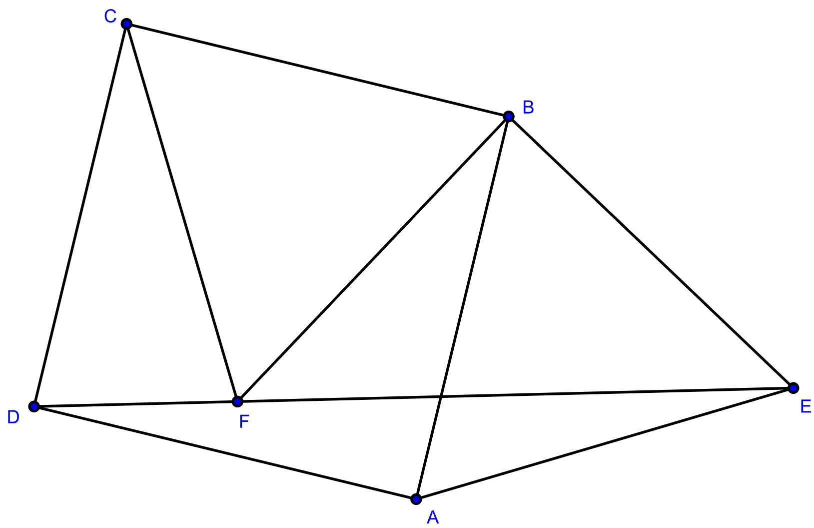
   On sait également que le triangle COD est isocèle en O (car C et D sont sur le cercle Γ) et donc, le milieu N du segment $[CD]$ est également le pied de la hauteur issue de O (car dans un triangle isocèle, la médiane est également hauteur). Par suite, la droite (NO) est perpendiculaire à la droite (CD) (par définition d'une hauteur). Mais la droite (BC) est également perpendiculaire à la droite (CD) (car le triangle BCD est rectangle en C), et donc les droites (NO) et (MB) sont parallèles (car deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles).

   Remarque. Par le théorème des milieux que l'on verra plus tard, c'était immédiat.

   En résumé, les droites (BO) et (MN) sont parallèles et les droites (NO) et (MB) aussi, donc le quadrilatère $BMNO$ est un parallélogramme.

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ Soit $ABCD$ un carré. Soit ABE un triangle équilatéral tel que E soit à l'intérieur du carré $ABCD$. Soit BCF un triangle équilatéral tel que F soit à l'extérieur du carré $ABCD$. Montrer que D, E et F sont alignés.

Solution 20 Figure :



— Le triangle ABE est équilatéral, donc $\widehat{ABE} = \widehat{BEA} = \widehat{EAB} = 60°$ et $AB = BE = EF$.

— Le triangle BCF est équilatéral, donc $\widehat{BCF} = \widehat{CFB} = \widehat{FBC} = 60°$ et $BC = CF = FB$.

— $ABCD$ est un carré, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = 90°$ et $AB = BC = CD = DA$.

Ainsi,

$$AB = BC = CD = DA = BE = EF = CF = FB.$$

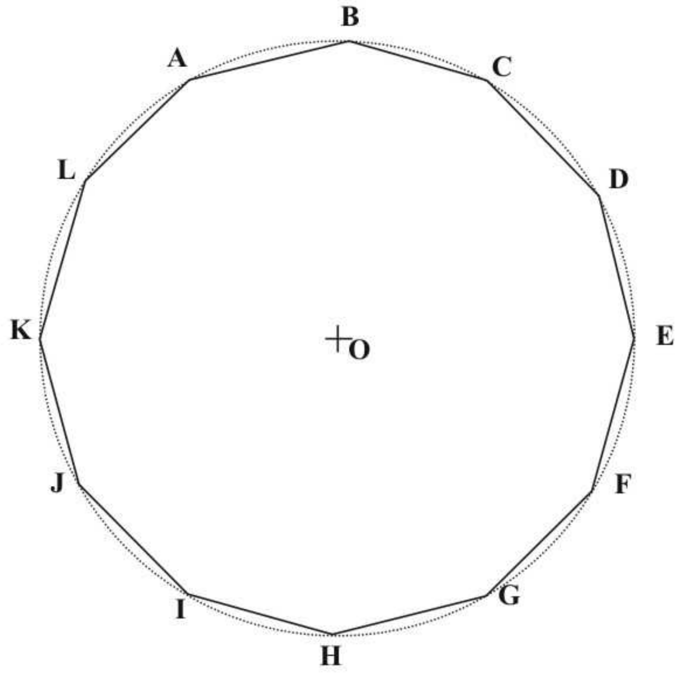
Le triangle BFE est isocèle en B donc les angles associés à la base principale sont de même mesure : $\widehat{BFE} = \widehat{BEF} = \dfrac{180° - \widehat{EBF}}{2} = \dfrac{180° - (\widehat{EBA} + \widehat{ABC} - \widehat{CBF})}{2} = \dfrac{180° - (60° + 90° - 60°)}{2} = 45°$.

Le triangle CDF est isocèle en C donc les angles associés à la base principale sont de même mesure : $\widehat{CDF} = \widehat{CFD} = \dfrac{180° - \widehat{DCF}}{2} = \dfrac{180° - (\widehat{DCB} - \widehat{BCF})}{2} = \dfrac{180° - (90° - 60°)}{2} = 75°$.

Ainsi, $\widehat{DFE} = \widehat{DFC} + \widehat{CFB} + \widehat{BFE} = 75° + 60° + 45° = 180°$, et donc D, E et F sont alignés.

Exercice 21 [Créteil, Paris, Versailles (2004)] On considère un dodécagone régulier $ABCDEFGHIJKL$ (convexe) inscrit dans un cercle de centre O et rayon R. Les côtés $[AB]$, $[BC]$, ..., $[KL]$ et $[LA]$ ont donc la même longueur et les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ..., $\widehat{KOL}$ et $\widehat{LOA}$ ont la même mesure.

1. Quelle est la nature du triangle ACO ?
2. Quelle est la nature du polygone $ACEGIK$?
3. La droite (AC) coupe la droite (BO) en M. Que représente la droite (AM) pour le triangle ABO ? Exprimer AM en fonction du rayon R du cercle circonscrit au dodécagone.



4. Exprimer l'aire du triangle ABO en fonction du rayon R du cercle. En déduire que l'aire d'un dodécagone régulier est donnée par la formule : $Aire = 3 \times R^2$ où R représente le rayon du cercle circonscrit au dodécagone.
5. Quelle est l'aire d'un dodécagone régulier inscrit dans un cercle de diamètre 18 cm ?
6. Tracer un dodécagone régulier $ABCDEFGHIJKL$ inscrit dans un cercle de centre O et rayon 6 cm. On utilisera la règle graduée et le compas et on laissera les traits de construction apparents.

Solution 21

1. Dans le cercle de centre O, les 12 triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOH, HOI, IOJ, JOK, KOL et LOA sont isocèles, superposables (les 3 côtés sont respectivement de même longueur), et donc $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOL} = \widehat{LOA} = \dfrac{360°}{12} = 30°$.

   Dans le triangle ACO, isocèle en O, on a $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 30° + 30° = 60°$. Le triangle ACO est isocèle avec un angle au sommet de 60°, il est donc équilatéral et la longueur de chaque côté est égal au rayon R du cercle.
2. $ABCDEFGHIJK$ est un dodécagone régulier : les triangles AOC, COE, EOG, GOI, IOK et KOA, sont équilatéraux (la longueur du côté est R - voir question 1.-).

   Ainsi, $AC = CE = EG = GI = IK = KA = R$ et $ACEGIK$ est un hexagone (convexe) inscrit dans un cercle et dont les côtés sont de même longueur : il est donc régulier.
3. O est équidistant de A et de C (car OAC est un triangle équilatéral) ; de même, B est équidistant

de A et de C (car le dodécagone est régulier), donc la droite (OB) est la médiatrice du segment $[AC]$, puis la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (OB).

La droite (AM) représente donc la hauteur issue de A du triangle AOB.

M est le milieu de $[AC]$ (car M appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ et à la droite (AC)), donc $AM = \frac{AC}{2} = \frac{R}{2}$.

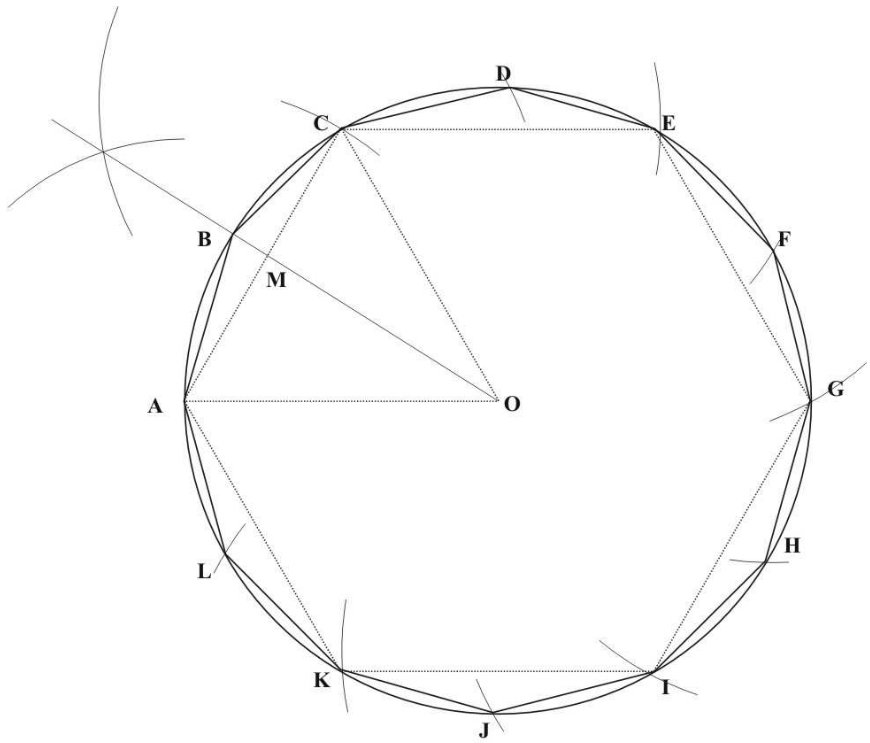
4. L'aire du dodécagone est donc égale à 12 fois l'aire du triangle AOB.

   L'aire du triangle AOB est $\dfrac{AM \times OB}{2} = \dfrac{\frac{R}{2} \times R}{2} = \dfrac{R^2}{4}$.

   L'aire du dodécagone est donc $12 \times \dfrac{R^2}{4} = 3 \times R^2$.

5. Quand le diamètre est de 18 cm, on a $R = 9$ cm, et l'aire du dodécagone est donc $3 \times 9^2\ cm^2 = 243\ cm^2$ pour le dodécagone régulier.

6. La figure n'est pas à l'échelle.



Exercice 22 [Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice (1999)] On appelle *amandin* un quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont droits.

1. Voici cinq affirmations. Répondez par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

   (a) Un rectangle est un *amandin*.

   (b) Tous les trapèzes rectangles sont des *amandins*.

   (c) Certains *amandins* sont des losanges.

   (d) Un *amandin* dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

(e) Un *amandin* dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.

2. On considère l'*amandin* $ABCD$ dont les angles droits sont en B et en D, tel que :
   — la diagonale $[AC]$ a une longueur de 6 cm.
   — la hauteur du triangle ABC issue de B mesure 2 cm.
   — le triangle ADC est isocèle.

   (a) Construire $ABCD$ en justifiant les tracés et les différentes étapes de la construction.

   (b) Déterminer l'aire de $ABCD$.

   (c) Déterminer AD au millimètre près.

Solution 22

1. (a) "*Un rectangle est un amandin*".

   Oui, c'est vrai ! Un rectangle est convexe. Un rectangle a également quatre angles droits, donc au moins deux de ses angles opposés sont droits et c'est un amandin.

   (b) "*Tous les trapèzes rectangles sont des amandins*".

   Non, c'est faux ! Il suffit de considérer un trapèze rectangle qui ne soit pas un rectangle. Le trapèze rectangle possède deux angles droits consécutifs et non deux angles droits opposés.

   Remarque : le trapèze rectangle peut même ne pas être convexe.

   (c) "*Certains amandins sont des losanges*".

   Oui, c'est vrai ! Le carré est un rectangle et donc un amandin. Le carré est également un losange.

   (d) "*Un amandin dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange*".

   Non, c'est faux ! Soit ABC un triangle rectangle (non isocèle !) en A. Soit D le symétrique orthogonal de A par rapport à la droite (BC). $ABDC$ est un amandin qui n'est pas un losange (car $BA \neq AC$) et qui a ses diagonales perpendiculaires.

   (e) "*Un amandin dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle*".

   Oui, c'est vrai ! Soit $ABCD$ un amandin avec les angles droits en A et en C. On déduit directement que le triangle ABD est rectangle en A et donc A, B et D sont sur le cercle de diamètre $[BD]$. De même, le triangle CBD est rectangle en C et donc C, B et D sont sur le cercle de diamètre $[BD]$. Comme A et C sont sur le cercle de diamètre $[BD]$ et que $AC = BD$ (par hypothèse), on obtient que O (centre du cercle) appartient au segment $[AC]$ (car A et C sont dans le disque de rayon OA, et d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire), puis que $[AC]$ est également un diamètre. Enfin, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu O et sont de même longueur, ce qui implique que $ABCD$ est un rectangle.

2. On considère l'amandin $ABCD$ dont les angles droits sont en B et en D, tel que :
   — la diagonale $[AC]$ a une longueur de 6 cm ;
   — la hauteur du triangle ABC issue de B mesure 2 cm ; le triangle ADC est isocèle.

(a) Analyse de la figure :

i. $ABCD$ un amandin avec les angles droits en B et en D. On déduit directement que le triangle ABC est rectangle en B et donc A, B et C sont sur le cercle de diamètre $[AC]$. De même, le triangle ADC est rectangle en D et donc A, D et C sont sur le cercle de diamètre $[AC]$. Finalement, $ABCD$ est inscriptible dans le cercle de diamètre $[AC]$.

ii. Dans un triangle isocèle, le sommet principal est sur la médiatrice de la base principale, et donc D est sur la médiatrice de $[AB]$.

iii. L'ensemble des points situés à une distance d d'une droite (δ) est situé sur une parallèle (δ') à la droite (δ) telle que si (Δ) est une perpendiculaire commune à (δ) (qu'elle coupe en le point A) et (δ') (qu'elle coupe en le point A') alors $AA' = d$.

Algorithme de construction à la règle graduée et au compas.

— Je trace un segment $[AC]$ qui mesure 6 cm.

— Je trace la médiatrice (d) du segment $[AC]$ qui coupe le segment $[AC]$ en son milieu O.

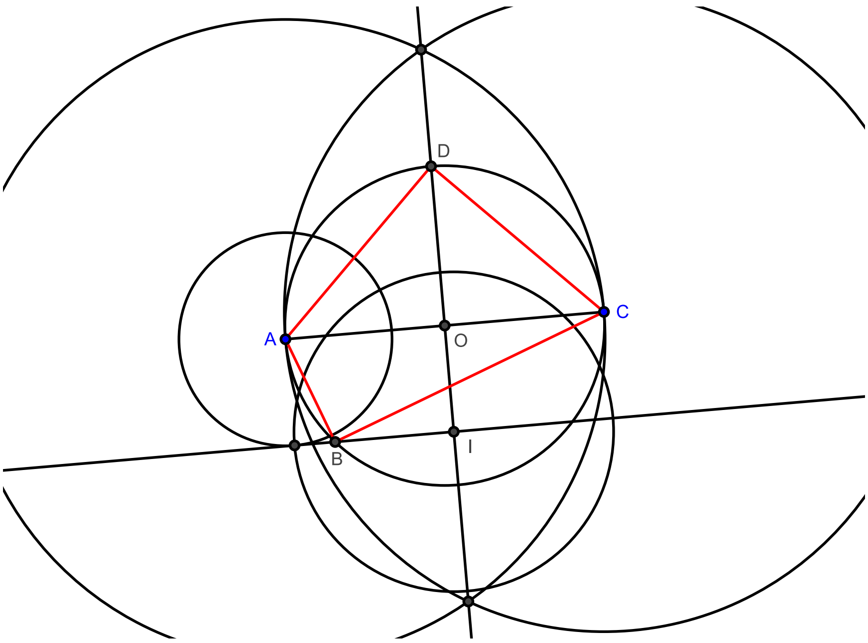
— Je trace le cercle Γ de centre O, de rayon OA qui coupe la droite (d) en deux points distincts dont l'un que je baptise D.

— Sur la droite (d), je place le point I tel que le segment $[OI]$ mesure 2 cm et tel que D et I soient de part et d'autre de O.

— Je trace la parallèle à la droite (AC) passant par le point I et qui coupe le cercle Γ en deux points dont un que je baptise B.

— Je trace le quadrilatère $ABCD$.

La figure n'est pas à l'échelle.



(b) On calcule l'aire de $ABCD$ en triangularisant le quadrilatère.

— Calcul de l'aire du triangle ADC. $\mathcal{A}(ADC) = \dfrac{AC \times OD}{2} = \dfrac{6 \times \frac{6}{2}}{2} = 9$ (en cm^2).
— Calcul de l'aire du triangle ABC. On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B. $\mathcal{A}(ADC) = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6$ (en cm^2).

On déduit l'aire du quadrilatère $ABCD$: $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ADC) = 6 + 9 = 15$ (en cm^2).

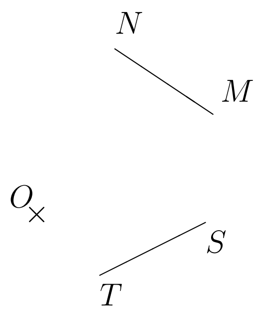
(c) On peut calculer l'aire du triangle ADC d'une autre façon et conclure.

Le triangle ADC est isocèle rectangle en D. On peut donc calculer son aire en utilisant $AD = DC$. $\mathcal{A}(ADC) = \frac{DA \times DC}{2} = \frac{DA^2}{2} = 9$ (en cm^2).

Puis, on déduit $AD = \sqrt{9 \times 2} = 3 \times \sqrt{2}$ (en cm).

Ainsi, $AD = 42$ mm (au mm près).

Exercice 23 [Créteil, Paris, Versailles (1999)] *Pour tout l'exercice, les constructions seront faites en utilisant la règle non graduée et le compas. On laissera apparents les traits de construction. On sera amené à reproduire deux fois sur la copie la figure ci-dessous :*



On veut construire un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que :
— les points M et N appartiennent au côté $[AB]$;
— les points S et T appartiennent au côté $[BC]$;
— le point O soit à l'intérieur du quadrilatère et appartienne à une de ses diagonales.

1. En respectant ces contraintes, construire :
   (a) Un parallélogramme (non rectangle, non losange) $ABCD$.
   (b) Un losange $ABCD$.
2. Pour chacun de ces quadrilatères, préciser le programme de construction mis en oeuvre.
3. Quelles sont les propriétés des figures (parallélogramme, losange) qui justifient la possibilité ou l'impossibilité de chaque construction ?

Solution 23

1. Le parallélogramme.

   On choisit de considérer que O appartient à la diagonale $[BD]$. On aurait pu également faire le choix de considérer que O appartenait à la diagonale $[AC]$, mais on rejoindrait alors la deuxième construction demandée ...

   Algorithme de construction ...

   — Je trace les droites (MN) et (ST) qui se coupent en un point que je baptise B. [Si ces droites avaient été parallèles, la construction aurait été impossible.]

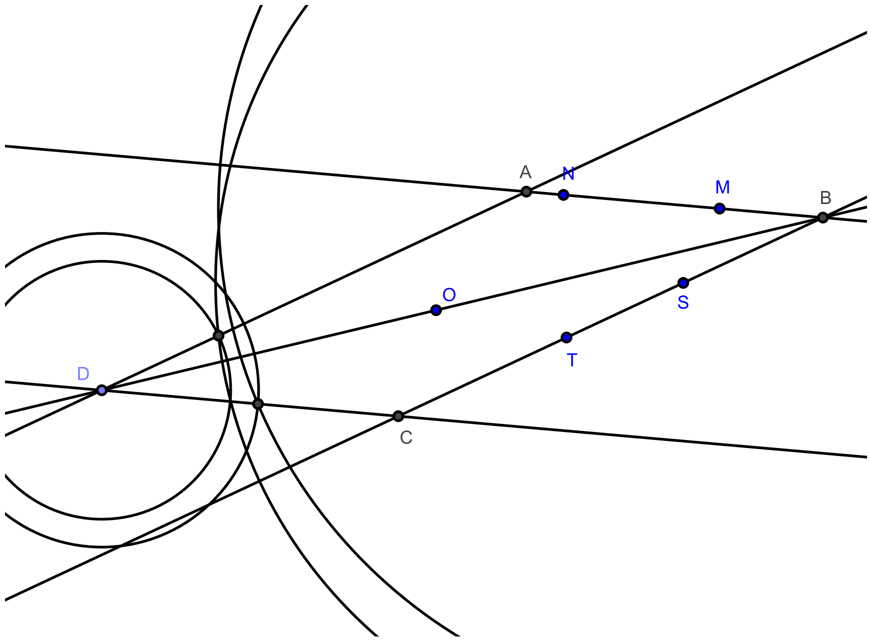
   — Je trace la droite (BO).

   — Je place un point D sur la demi-droite $[BO)$. [Je choisis ce point D suffisamment loin de B (pour que le segment $[ST]$ soit inclus dans le segment $[BC]$ -voir plus loin- et pour que le segment $[MN]$ soit inclus dans le segment $[BA]$ -voir plus loin-). C'est toujours possible.]

   — Je trace la parallèle à la droite (ST) passant par D qui coupe la droite (MN) en A.

   — Je trace la parallèle à la droite (MN) passant par D qui coupe la droite (ST) en C.

   Pour la construction, j'ai utilisé le fait que les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux.



2. Le losange.

   On choisit de considérer que O appartient à la diagonale $[AC]$. Vu la position du point O, il ne semble pas possible que le point O appartienne à la diagonale $[BD]$ ...

   Algorithme de construction ...

   — Je trace les droites (MN) et (ST) qui se coupent en un point que je baptise B. [Si ces droites avaient été parallèles, la construction était impossible.]

   — Je trace la bissectrice (d) du triangle MBS relative au sommet B.

   — Je trace la perpendiculaire à la droite (d) passant par O qui coupe la droite (MN) en A et la droite (ST) en C. [Ce qui rend la construction possible est le fait que les points A et C

ainsi obtenus sont tels que le segment $[AB]$ contienne le segment $[MN]$ et que le segment $[CB]$ contienne le segment $[ST]$.]

— Je nomme O' l'intersection des droites (d) et (AC), puis je trace le cercle de centre O' de rayon $O'B$ qui coupe la droite (d) en deux points distincts B et D.

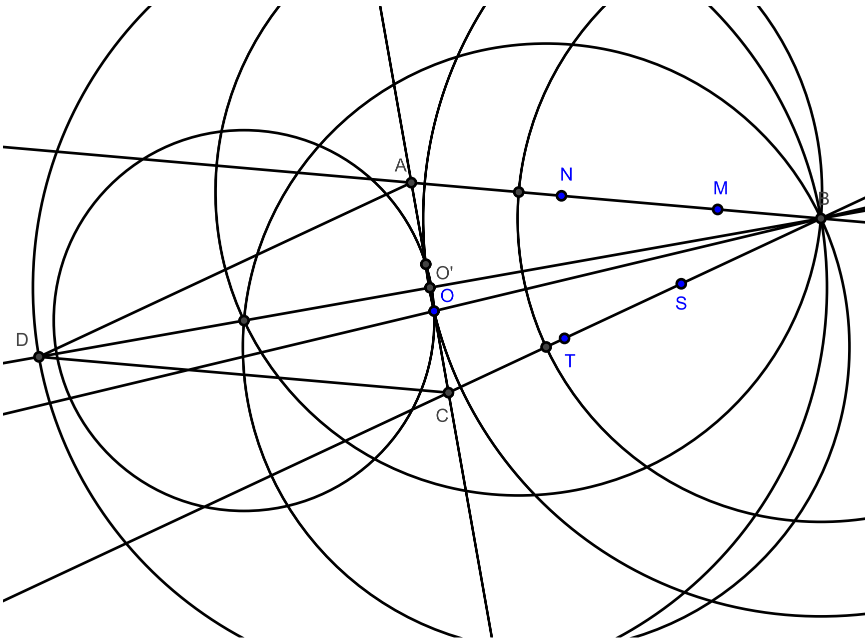
— Je trace les droites (DA) et (DC).

Pour la construction, j'ai utilisé

— le fait que la diagonale $[DB]$ du losange est axe de symétrie orthogonale et donc la droite (DB) est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$,

— le fait que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires,

— le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.



Exercice 24 [Montpellier (1998)]

1. Tracer un cercle de centre O et de rayon R (pour la clarté de la figure, on prendra R compris entre 5 et 8 cm).

   Tracer, en précisant comment, en laissant les traces de la construction et en n'utilisant que la règle non graduée et le compas, deux diamètres $[AB]$ et $[CD]$ perpendiculaires.

   Tracer le cercle de centre C, de rayon CA, qui coupe $[CD]$ en E.

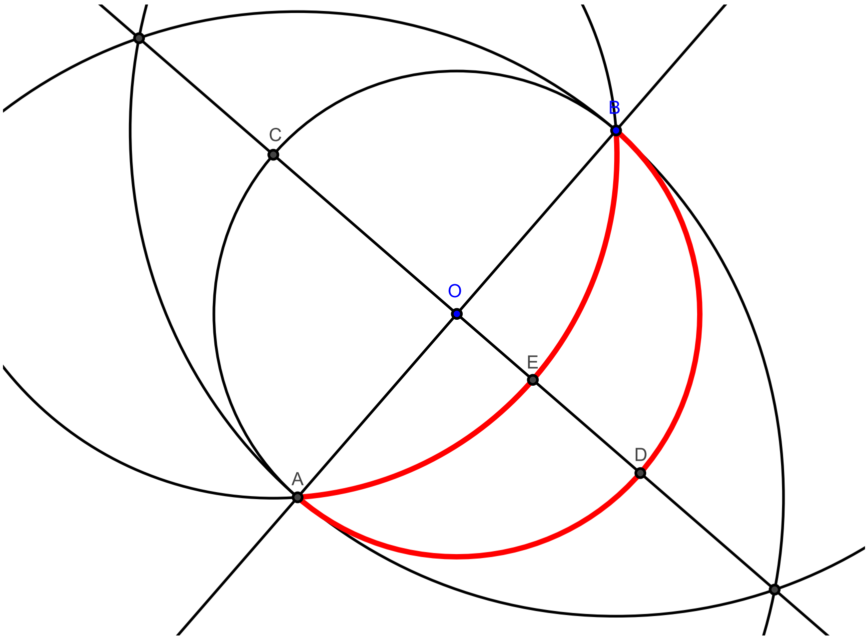
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Calculer, en fonction de R,

   — l'aire du triangle ABC,

   — l'aire de la lunule $ADBEA$.

Solution 24 Algorithme de construction.



Quant à la nature du triangle ABC ...

La droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le milieu du segment $[AB]$ (i.e. O). La droite (CD) est donc médiatrice du segment $[AB]$. Par suite, le triangle ABC est isocèle (puisqu'il admet un axe de symétrie orthogonale). Enfin, le point C est sur le cercle de diamètre $[AB]$ et le triangle ABC est rectangle en C. En résumé, le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

Calcule de l'aire de la lunule ...

— Soit E_1 l'ensemble des points du disque de centre O, de rayon OA, diminué de ceux du disque de centre C et de rayon CA (i.e. la lunule).

— Soit E_2 l'ensemble des points du demi-disque de centre O, de rayon OA, délimité par le diamètre $[AB]$ et contenant le point D.

— Soit E_3 l'ensemble des points du quart de disque de centre C, de rayon CA, délimité par les rayons $[CA]$ et $[CB]$ (c'est bien un quart de disque car le triangle ABC est isocèle rectangle en C).

— Soit E_4 l'ensemble des points situés à l'intérieur du triangle ABC.

— Soit E_5 l'ensemble des points de E_3 diminué de ceux de E_4.

L'ensemble E_3 est réunion des deux ensembles disjoints E_4 et E_5. Ainsi, $\mathcal{A}(E_3) = \mathcal{A}(E_4) + \mathcal{A}(E_5)$.

L'ensemble E_2 est réunion des deux ensembles disjoints E_1 et E_5. Ainsi, $\mathcal{A}(E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_5)$.

Puis, $\mathcal{A}(E_3) - \mathcal{A}(E_4) = \mathcal{A}(E_2) - \mathcal{A}(E_1)$ ou encore $\mathcal{A}(E_1) = \mathcal{A}(E_2) - \mathcal{A}(E_3) + \mathcal{A}(E_4)$.

Or, si $OA = R$, $AC = R \times \sqrt{2}$ (calcul de l'aire du triangle ABC de deux manières différentes).

$\mathcal{A}(E_2) = \dfrac{\pi \times R^2}{2}$, $\mathcal{A}(E_3) = \pi \times \dfrac{(R \times \sqrt{2})^2}{4} = \pi \times \dfrac{R^2}{2}$, $\mathcal{A}(E_4) = R^2$.

L'aire de la lunule est alors donnée par : $\mathcal{A}(E_1) = \mathcal{A}(E_2) - \mathcal{A}(E_3) + \mathcal{A}(E_4) = \pi \times \dfrac{R^2}{2} - \pi \times \dfrac{R^2}{2} + R^2 = R^2$.

Exercice 25 On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R. On définit alors le quadrilatère $ABCD$ de façon à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle Γ ;
2. l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 30° ;
3. l'angle $\widehat{BOC}$ mesure 50° (A et C sont de part et d'autre de la droite (OB)) ;
4. l'angle $\widehat{COD}$ mesure 30° (B et D sont de part et d'autre de la droite (OC)).

Question 1 : Dresser la figure en prenant $R = 8$ cm.

Question 2 : Le quadrilatère $ABCD$ est-il un trapèze ?

Avant de répondre à cette question ...

Question 2 *a* : Que mesure l'angle $\widehat{OAB}$? Que mesure l'angle $\widehat{OBA}$?

Question 2 *b* : Que mesure l'angle $\widehat{OBC}$? Que mesure l'angle $\widehat{OCB}$?

Question 2 *c* : Que mesure l'angle $\widehat{OCD}$? Que mesure l'angle $\widehat{ODC}$?

Question 2 *d* : Que mesure l'angle $\widehat{OAD}$? Que mesure l'angle $\widehat{ODA}$?

Question 2 *e* : Que dire des droites (AD) et (BC) ?

Répondre à la question 2.

Question 3 : On note I l'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$. Que mesure l'angle $\widehat{AIB}$?

Avant de répondre à cette question ...

Question 3 *a* : Quelle relation peut-on trouver entre les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$?

Question 3 *b* : Quelle relation peut-on trouver entre les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{COD}$?

Question 3 *c* : Que mesure l'angle $\widehat{BIC}$?

Répondre à la question 3.

Question 4 : Si l'angle l'angle $\widehat{BOC}$ ne mesurait pas 50° mais α° ?

Question 4 *a* : Le quadrilatère $ABCD$ serait-il encore un trapèze ?

Question 4 *b* : La mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ changerait-elle ?

Solution 25

Question 1. La figure mais pas à l'échelle.

Question 2 a. Le triangle OAB est isocèle en O car comme A et B sont sur Γ, on a $OA = OB = R$.

Dans un triangle isocèle, les angles associés à la base principale sont égaux en mesure et comme dans tout triangle la somme des mesures des angles vaut 180°.

Ainsi, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Question 2 b. De même qu'en 2a, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

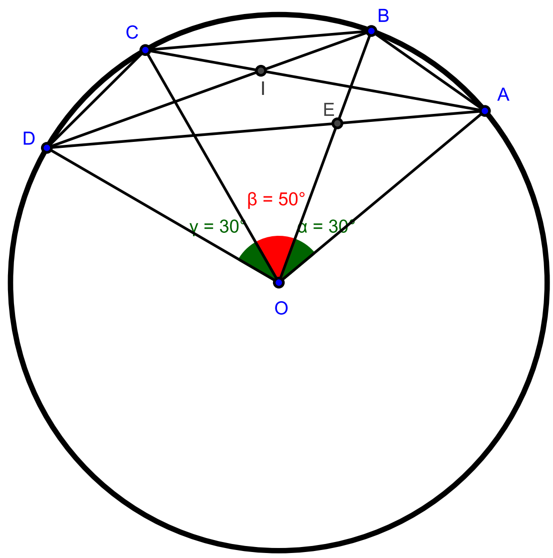
Question 2 c. De même qu'en 2a, $\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Question 2 d. De même qu'en 2a, $\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \dfrac{180° - (30° + 50° + 30°)}{2} = 35°$.

Question 2 e. Que dire des droites (AD) et (BC) ?

On appelle E le point de concours des droites (OB) et (AD).

Ainsi, $\widehat{DEO} = 180° - \widehat{EOD} - \widehat{ODE} = 180° - (50° + 30°) - \widehat{ODA} = 180° - (50° + 30°) - 35° = 65°$.



En considérant les droites (BC) et (AD) et la sécante (BE), les angles $\widehat{CBO}$ et $\widehat{DEO}$ sont correspondants et de même mesure 65°, donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Et, le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

<u>Question 3 a</u>. Le théorème de l'angle au centre donne $\widehat{ACB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

<u>Question 3 b</u>. Le théorème de l'angle au centre donne $\widehat{CBD} = \dfrac{\widehat{COD}}{2} = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

<u>Question 3 c</u> : Que mesure l'angle $\widehat{BIC}$? La somme des mesures des angles d'un triangle étant de 180°, on déduit dans le triangle BIC que $\widehat{BIC} = 180° - \widehat{ICB} - \widehat{CBI} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{CBD} = 180° - 15° - 15° = 150°$.

Comme $\widehat{AIB}$ et $\widehat{BIC}$ sont supplémentaires, $\widehat{AIB} = 180° - \widehat{BIC} = 180° - 150° = 30°$.

<u>Question 4</u>. Juste la suite des calculs à reprendre, les justifications ayant déjà été toutes évoquées.

$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \dfrac{180° - \alpha°}{2} = 90° - \dfrac{\alpha°}{2}$.

$\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

$\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \dfrac{180° - (30° + \alpha° + 30°)}{2} = 60° - \dfrac{\alpha°}{2}$.

$\widehat{DEO} = 180° - \widehat{EOD} - \widehat{ODE} = 180° - (\alpha° + 30°) - \widehat{ODA} = 180° - (\alpha° + 30°) - (60° - \dfrac{\alpha°}{2}) = 90° - \dfrac{\alpha°}{2}$.

En considérant les droites (BC) et (AD) et la sécante (BE), les angles $\widehat{CBO}$ et $\widehat{DEO}$ sont correspondants et de même mesure $90° - \dfrac{\alpha°}{2}$, donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

$\widehat{ACB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

$\widehat{CBD} = \dfrac{\widehat{COD}}{2} = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

$\widehat{BIC} = 180° - \widehat{ICB} - \widehat{CBI} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{CBD} = 180° - 15° - 15° = 150°$.

$\widehat{AIB} = 180° - \widehat{BIC} = 180° - 150° = 30°$.

La mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ ne dépend donc pas de la valeur de α.

Analyse de productions d'élèves [Orléans, Tours (1998)]

Sujet

Solution

Analyse de productions d'élèves [d'après le sujet de Rouen (2) (2001)]

Sujet

Solution

Volet didactique [Lyon, Grenoble (1999)]

Sujet

Solution

Volet didactique [Aix-Marseille (1998)]

Sujet

Solution

Volet didactique [Grenoble (1998)]

Sujet

Solution