Logique : vrai/faux ; condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante ; et/ou ; connecteurs logiques (implication, équivalence)

Denis Vekemans *

1 Le vrai ou faux

Vrai ou faux : une assertion mathématique est soit vraie, soit fausse. Dans le doute, elle est considérée comme fausse.

Soit une assertion du type :

1. $U =$ "quelque soit a, on a l'assertion A"
   (a) Pour justifier que U est vraie, on utilise la variable a pour *démontrer* A.
   (b) Pour justifier que U est fausse, il suffit de trouver un a (nommé un contre-exemple) tel que A soit fausse.
2. $V =$ "on peut trouver a tel que j'ai l'assertion A"
   (a) Pour justifier que V est fausse, on utilise la variable a pour *démontrer* que A est fausse.
   (b) Pour justifier que V est vraie, il suffit de trouver un a (nommé un exemple) tel que A soit vraie.

2 Les opérateurs logiques

Le ET logique :

	A est vraie	A est fausse
B est vraie	A ET B est vraie	A ET B est fausse
B est fausse	A ET B est fausse	A ET B est fausse

Le OU logique :

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

	A est vraie	A est fausse
B est vraie	A OU B est vraie	A OU B est vraie
B est fausse	A OU B est vraie	A OU B est fausse

L'implication : A **implique** B. On la note $A \Rightarrow B$.

L'implication $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque si A est vraie, alors B l'est aussi.

Si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il est possible que l'implication : $B \Rightarrow A$, soit fausse. On dit alors que A implique B, mais que la réciproque est fausse.

Si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il est possible que l'implication : $B \Rightarrow A$, soit également vraie. On dit alors que A et B sont équivalentes et on note $A \Longleftrightarrow B$.

L'assertion contraire : lorsque A est vraie est équivalente à B est fausse, on dit que A et B sont des assertions contraires et on note $B = \overline{A}$. A est vraie et son contraire $\overline{A}$ est fausse, sont deux assertions équivalentes.

La contrapposée : l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie et l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ est vraie sont deux implications équivalentes.

3 Plusieurs types de démonstrations usuels

La démonstration par contrapposée : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va montrer $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

La démonstration par l'absurde : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va supposer que A est vraie et que B est fausse pour aboutir à une contradiction.

La démonstration par exhaustion : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va décrire l'ensemble de tous les cas qui permettent de réaliser A : A_1, A_2, ... et A_p, et montrer que $A_1 \Rightarrow B$, $A_2 \Rightarrow B$, ... et $A_p \Rightarrow B$.

4 "Il faut" et "Il suffit"

Lorsque $A \Rightarrow B$, on dit qu'**il suffit** que A soit vraie pour que B le soit aussi, mais on dit également que lorsque A est vraie, **il faut** que B le soit aussi.

Dans $A \Rightarrow B$, le "il suffit" porte sue A et le "il faut" porte sur B.

Lors d'une question du type :

1. "Trouver une condition suffisante pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $B \Rightarrow A$;
2. "Trouver une condition nécessaire pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $A \Rightarrow B$;
3. "Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $A \Longleftrightarrow B$.

Exercice 1

1. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'assertion A vraie. Donner l'assertion contraire.
2. Même question dans le domaine géométrique.
3. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'implication $A \Rightarrow B$ vraie, telle que l'implication $B \Rightarrow A$ soit fausse. Vérifier alors que l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ est vraie.
4. Même question dans le domaine géométrique.
5. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'équivalence $A \Leftrightarrow B$.
6. Même question dans le domaine géométrique.
7. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique ou géométrique de démonstration par l'absurde.

Solution 1

1. L'assertion "$A : 2 \geq 0$" est vraie. L'assertion contraire "$\overline{A} : 2 < 0$" est fausse.
2. Dans un carré, l'assertion "A : *les diagonales sont perpendiculaires*" est vraie, mais l'assertion contraire "$\overline{A}$: *les diagonales ne sont pas perpendiculaires*" est fausse.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, "$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$" est une implication vraie, mais l'implication réciproque "$x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$" est fausse (contre-exemple : $x = -1$).
   Cependant, la contrapposée "$x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 1$" est vraie.
4. "$ABCD$ est un carré $\Longrightarrow (AC) \perp (BD)$" est une implication vraie, mais l'implication réciproque "$(AC) \perp (BD) \Longrightarrow ABCD$ est un carré" est fausse (contre-exemple : $ABCD$ un losange non carré).
   Cependant, la contrapposée "$(AC) \not\perp (BD) \Longrightarrow ABCD$ n'est pas un carré" est vraie.
5. "$x = 1 \Longleftrightarrow 2 \times x + 3 = 5$".
6. "$ABCD$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow [AC]$ et $[BD]$ ont même milieu".
7. "Si $x + y = 1$ et $x \times y$ est maximum, alors $x = y$".
   Par l'absurde, si $x \neq y$, on définit $x' = y' = \frac{x+y}{2}$. On a $x' \times y' = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 > x \times y$ car $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 > 0$. Ainsi, $x' + y' = 1$ et $x' \times y' > x \times y$, ce qui contredit le fait que $x \times y$ puisse être maximal.

Exercice 2 [Grenoble, Lyon (2001)] Alice, perdue dans la Forêt de l'oubli, ne se souvenait jamais du jour de la semaine. Heureusement, un Lion et une Licorne visitaient souvent cette forêt étrange et pouvaient parfois la tirer de cette embarrassante ignorance. Alice savait que lundi, mardi et mercredi, le Lion ne disait jamais une phrase vraie et ne mentait pas pendant le reste de la semaine. La Licorne ne faisait que mentir jeudi, vendredi et samedi et disait la vérité pendant les autres jours.

1. Alice surprit un jour la conversation suivante entre le Lion et la Licorne
   — Lion : *Hier, je mentais.*
   — Licorne : *Moi aussi.*
   Alice avait un raisonnement logique infaillible. Elle a pu en déduire le jour de la semaine. Indiquez ce jour et le raisonnement utilisé.
2. Une autre fois, Alice rencontra seulement le Lion qui prononça les deux phrases suivantes
   — *Je mentais hier.*
   — *Je mentirai de nouveau dans trois jours.*
   Quel jour cette rencontre a-t-elle eu lieu ? Justifier la réponse.
3. Déterminer quels jours la phrase suivante a pu sortir de la gueule du Lion
   — *Hier, je mentais et je mentirai de nouveau demain.*
   Justifier la réponse.

D'après Raymond Smullyan, *What is the name of this book ?*, Penguin books.

Solution 2 Un petit tableau pour résumer les données ...

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Le Lion	M	M	M	V	V	V	V
La Licorne	V	V	V	M	M	M	V

M : ment ; V : dit la vérité.

1. (a) Premier cas : le Lion dit la vérité.

   Dans ce cas, on est jeudi car il doit être vrai que le Lion mente la veille. La licorne ment donc (voir tableau). Il faudrait donc que le mercredi soit un jour où elle dit la vérité, ce qui est vrai.

   (b) Second cas : le Lion ment.

   Dans ce cas, on est lundi car il doit être faux que le Lion mente la veille. La licorne dit donc la vérité (voir tableau). Il faudrait donc que le dimanche soit un jour où elle ment, ce qui est faux.

   Synthèse. Parmi les deux cas, seul le premier fournit une solution et cette solution est **jeudi**.

2. (a) Premier cas : le Lion dit la vérité.

   Dans ce cas, on est jeudi car il doit être vrai que le Lion mente la veille. Il faudrait aussi que le dimanche soit un jour où il ment, ce qui est faux.

   (b) Second cas : le Lion ment.

   Dans ce cas, on est lundi car il doit être faux que le Lion mente la veille. Il faudrait aussi que le jeudi soit un jour où il dit la vérité, ce qui est vrai.

   Synthèse. Parmi les deux cas, seul le second fournit une solution et cette solution est **lundi**.

3. (a) Premier cas : le Lion dit la vérité.

   Dans ce cas, on est jeudi car il doit être vrai que le Lion mente la veille. Il faudrait aussi que le vendredi soit un jour où il ment, ce qui est faux.

(b) Second cas : le Lion ment.

Dans ce cas, soit il disait la vérité la veille, soit il disait la vérité le lendemain (car la négation de "A ET B" est "$\overline{A}$ OU $\overline{B}$"). Ainsi, on est soit lundi, soit mercredi.

Synthèse. Parmi les deux cas, seul le second fournit une solution et cette solution est indéterminée : soit lundi, soit mercredi (les deux solutions conviennent).

Exercice 3 Deux joueurs font la "course à 10 par pas de 2" : le premier joueur choisit 1 ou 2, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1 ou 2 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 10 en premier. Par exemple, dans la première partie, le joueur A commence et dit : "1" ; le joueur B dit : "$1+2=3$" ; A dit : "$3+2=5$" ; B dit "$5+1=6$" ; A dit : "$6+2=8$" ; B dit : "$8+2=10$" et gagne.

1. Dans la deuxième partie, le joueur A arrive à 7 et dit à B : "J'ai gagné !". Justifiez cette affirmation.
2. Dans la troisième partie, le joueur B commence, dit un nombre et annonce : "J'ai gagné !". Quel est ce nombre ?
3. **Le jeu change !** Deux joueurs font la "course à 10 par pas de 3 " : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 10 en premier.

   Quel nombre le joueur qui commence la partie doit-il annoncer pour être sûr de gagner ?
4. **Le jeu change !** Deux joueurs font la "course à 12 par pas de 3" : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 12 en premier.

   Pourquoi le joueur qui commence est-il sûr de perdre ?
5. **Le jeu change !** N est un entier naturel strictement supérieur à 3. Deux joueurs font la "course à N par pas de 3" : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce N en premier.

   Quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) doivent respecter les nombres N pour que le joueur qui commence soit sûr de gagner ?

Solution 3

1. En effet, le joueur A qui a annoncé "7" gagne :
   — si le joueur B dit alors "$7+1=8$", le joueur A dira "$8+2=10$" et gagnera
   — et, si le joueur B dit alors "$7+2=9$", le joueur A dira "$9+1=10$" et gagnera.
2. On a vu dans la question précédente que le joueur qui parvient en premier à 7 gagne.

   On montrerait de la même façon que le joueur qui parvient en premier à 4 gagne, puis que le joueur qui parvient en premier à 1 gagne.

   Le joueur qui commence doit donc annoncer "1".

3. En reprenant la question 1 avec la nouvelle règle, un joueur qui annonce "6" gagne :
   — si l'autre dit alors "$6+1=7$", le joueur qui a annoncé "6" dira "$7+3=10$" et gagnera ;
   — si l'autre dit alors "$6+2=8$", le joueur qui a annoncé "6" dira "$8+2=10$" et gagnera ;
   — enfin, si l'autre dit alors "$6+3=9$", le joueur qui a annoncé "6" dira "$9+1=10$" et gagnera.

   En reprenant la question 2 avec la nouvelle règle, un joueur qui annonce "2" a également gagné.

   Et, celui qui commence doit donc annoncer "2" pour être sûr de gagner.

4. En reprenant la question 1 avec la nouvelle règle, un joueur qui annonce : "8" a gagné. En effet,
   — si l'autre dit alors "$8+1=9$", le joueur qui a annoncé "8" dira "$9+3=12$" et gagnera ;
   — si l'autre dit alors "$8+2=10$", le joueur qui a annoncé "8" dira "$10+2=12$" et gagnera ;
   — enfin, si l'autre dit alors "$8+3=11$", le joueur qui a annoncé "8" dira "$11+1=12$" et gagnera.

   En reprenant la question 2 avec la nouvelle règle, un joueur qui annonce "4" a également gagné.

   Cependant, quelque soit le choix du joueur qui commence, il est sûr de perdre car
   — s'il dit "1", l'autre dira "$1+3=4$" et gagnera ;
   — s'il dit "2", l'autre dira "$2+2=4$" et gagnera ;
   — enfin, s'il dit "3", l'autre dira "$3+1=4$" et gagnera.

5. Dans la "course à N par pas de 3", le joueur qui joue en second est sûr de pouvoir atteindre tous les multiple de 4 non nuls en adoptant la stratégie suivante :
   — si le joueur qui a commencé ajoute 1 (ou s'il dit "1" pour commencer), il ajoute 3 et parvient sur un multiple de 4 non nul : en effet, à deux, ils ont donc ajouté 4 depuis un autre multiple de 4 et arrivent donc encore sur un multiple de 4 non nul ;
   — si le joueur qui a commencé ajoute 2 (ou s'il dit "2" pour commencer), il ajoute 2 et parvient sur un multiple de 4 non nul : même raison que celle évoquée au point précédent ;
   — enfin, si le joueur qui a commencé ajoute 3 (ou s'il dit "3" pour commencer), il ajoute 1 et parvient sur un multiple de 4 non nul : même raison que celle évoquée au point précédent.

   Il s'ensuit que si N est un multiple de 4 non nul, le joueur qui joue en second est sûr de gagner.

   Avec la même stratégie, on montrerait de la même façon que :
   — le joueur qui commence en annonçant "1" est sûr de pouvoir atteindre toutes les valeurs du type "$4\times k+1$" avec k entier naturel ;
   — le joueur qui commence en annonçant "2" est sûr de pouvoir atteindre toutes les valeurs du type "$4\times k+2$" avec k entier naturel ;
   — le joueur qui commence en annonçant "3" est sûr de pouvoir atteindre toutes les valeurs du type "$4\times k+3$" avec k entier naturel.

   Ainsi,
   — si le nombre N est de la forme "$4\times k$" avec k entier naturel (i.e. un multiple de 4), c'est le joueur qui joue en second qui est sûr de gagner ;
   — et sinon (i.e. si N est de la forme "$4\times k+1$", "$4\times k+2$" ou "$4\times k+3$" avec k entier naturel), c'est le joueur qui joue en premier qui est sûr de gagner.

   Condition nécessaire et suffisante requise : "N ne doit pas être multiple de 4."