Sujet de Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, La Réunion, Nantes, Poitiers, 1998.

Réponses

Question a

Reproduire sur la copie le tableau donné dans l'exercice 1 en le complétant. Donner les objectifs visés dans cet exercice en précisant les savoirs et savoir-faire nécessaires pour le réaliser.

Surfaces	A	B	C	D	E	F
Nombre de triangles	4	14	18	16	26	24
Nombre de carrés	2	7	9	8	13	12

L'objectif visé est de comparer des aires en les mesurant à l'aide d'une unité bien choisie (triangle ou carré). Un sens quantique est donné à la notion d'aire.

Les figures données sont déjà pavées par les carrés et triangles qui seront utilisés comme unité.

Procédure P1 ... Pour mesurer l'aire à l'aide de carrés, l'élève doit pouvoir compter les carrés du pavage inclus dans la figure et, si nécessaire (figures A, D, E et F), surcompter en associant mentalement deux à deux les triangles du pavage inclus dans la figure.

Procédure P2 ... Pour mesurer l'aire à l'aide de triangles, l'élève doit pouvoir compter pour deux (i.e. de 2 en 2) les carrés du pavage inclus dans la figure et, si nécessaire (figures A, D, E et F), surcompter les triangles du pavage inclus dans la figure. (Ils peuvent aussi préférer paver uniquement par des triangles, puis compter les triangles.)

Procédure P3 ... Pour ranger les surfaces de la plus petite à la plus grande, l'élève doit utiliser le fait que plus une surface est grande, plus la mesure de son aire l'est aussi.

Résumé :

> Savoirs mis en jeu : la comptine numérique, la notion de surface, celle d'aire, celle de carré, celle de triangle, celle de l'ordre sur les entiers.
> Savoir-faire mis en jeu : dénombrer en utilisant le comptage et le surcomptage, utiliser le comptage de deux en deux pour les carrés (P2), associer mentalement des triangles deux à deux (P1).

Question b

Faire une analyse de l'exercice 2 en le comparant à l'exercice 1 ; on s'appuiera sur une (ou des) procédure(s) que les élèves peuvent développer.

Si, dans le premier exercice, il s'agissait d'utiliser la mesure pour comparer des aires, il s'agit dans le deuxième exercice de comparer des aires en utilisant une décomposition (un découpage) des figures en sous-figures (ici, en un rectangle de *4 x 2* carreaux et deux quarts de cercle dont le rayon est de *4* carreaux), utilisant implicitement la propriété mathématique "l'isométrie conserve l'aire" (ce qui induit que si on peut recomposer une figure en déplaçant des sous-figures de l'autre, alors les deux figures concernées ont même aire).

Question a

Parmi les neuf figures proposées dans l'exercice 3, donner quatre figures qui ont le même périmètre.

Les figures *A*, *B*, *C*, *E* et *H* ont même périmètre. Si *c* est le côté de la maille du quadrillage, les figures *A*, *B*, *C*, *E* et *H* ont toutes un périmètre égal à $24 \times c$.

Question b

Comparer les périmètres des figures A, D et G. Justifier les réponses par des arguments utilisant le quadrillage ou des propriétés géométriques.

Périmètre(D) > Périmètre(G) > Périmètre(A) où *P* désigne le périmètre.

Pour justifier ce résultat, on peut utiliser le théorème de Pythagore qui fournit $Périmètre(D) = (12 + 12 \times \sqrt{2}) \times c$; $Périmètre(G) = (12 + 4 \times \sqrt{13}) \times c$; $Périmètre(A) = 24 \times c$.

Cependant, un argument plus intuitif pourrait également convenir (un élève de CM1 n'étant pas encore disposé à utiliser le théorème de Pythagore), ...

Si nous utilisons l'orientation de la page de l'annexe C, chacun des quatre quadrilatères possède un bord "haut", un bord "bas", un bord "gauche" et un bord "droit"
L'addition des longueurs des bords "haut" et "bas" pour chacune des figures A, D et G est de $12 \times c$;
les bords "gauche" et "droit" sont de même longueur pour chacune des figures A, D et G (observable par translation (pour A et D), ou par symétrie (pour G)) ;
pour comparer les périmètres des figures A, D et G, il nous suffit donc de comparer les longueurs des bords "gauche" (une simplification en éliminant d'abord les bords "haut" et "bas", puis une division par *2* permet de se limiter à l'un des côtés) ;
et, ces bords "gauche" ont même hauteur, tout en étant plus ou moins incliné ;
le bord "gauche" de D est plus penché que celui de G, qui est plus penché que celui de A, et comme "plus un bord est penché, plus il est long" (c'est un critère visuel correct, mais intuitif), nous obtenons le résultat escompté.

Question c

Donner
- deux figures de même aire que la figure A,
- deux figures de même aire que la figure H,
- deux figures de même aire que la figure I. Justifier les réponses.

Question d

Donner des procédures utilisables par les élèves de CM1, leur permettant d'effectuer les comparaisons demandées à la question précédente.

$Aire(A) = Aire(D) = Aire(G) = 36 \times c^2$;
$Aire(B) = Aire(E) = Aire(H) = 20 \times c^2$;
$Aire(C) = Aire(F) = Aire(I) = 27 \times c^2$.

Une utilisation des formules d'aire permet d'obtenir ce résultat (pas pour un élève de CM1).
Un réinvestissement de l'exercice 1 peut également être réalisé en dénombrant les carreaux

du pavage des différents quadrilatères, quitte à grouper deux triangles du pavage pour reconstituer un carreau (pour B, F et I) ou quitte à grouper un triangle et un quadrilatère (pour G, mais c'est très difficile pour un élève).
Un réinvestissement de l'exercice 2 peut également être proposé en décomposant les différentes figures (D en deux triangles rectangles, G en un rectangle et deux triangles rectangles pour recomposer A ; E en un rectangle et deux carrés, pour recomposer B ou H ; I en deux triangles rectangles pour recomposer F, C en un rectangle et un carré, carré lui-même décomposé en deux triangles rectangles, pour recomposer F).

Question e

La situation de recherche (exercice 3) est-elle une situation problème au sens didactique ? Pourquoi ?

<u>Définition</u> de la situation problème selon Jean BRUN :
" Situation jamais vue, jamais rencontrée ; on ne dispose pas des éléments théoriques pour la résoudre d'emblée. C'est une situation qui dérange et déséquilibre : il manque quelque chose par rapport à ce que l'on a ".

Ou, plus récemment ...

Une situation-problème devrait :

- o avoir du sens (interpeller, concerner l'apprenant qui ne se contente pas d'obéir, d'exécuter),
- o être liée à un obstacle repéré, défini, considéré comme dépassable et dont les apprenants doivent prendre conscience à travers l'émergence de leurs conceptions (représentations mentales),
- o faire naître un questionnement chez les apprenants (qui ne répondent plus aux seules questions du maître),
- o créer une ou des ruptures amenant les apprenants à déconstruire leur(s) modèle(s) explicatifs initiaux s'ils sont inadaptés ou erronés, correspondre à une situation complexe, si possible liée au réel, pouvant ouvrir sur différentes réponses acceptables et différentes stratégies utilisables,
- o ouvrir sur un savoir d'ordre général (notion, concept, loi, règle..).

D'après ce qui précède, il ne s'agit pas d'une situation-problème. En effet, la situation concerne la comparaison d'aires ou de périmètres qui a déjà été abordée et les élèves disposent des éléments pour la résoudre d'emblée (concernant l'aire, ils peuvent singer tantôt l'exercice 1, tantôt l'exercice 2).

Mener la réflexion autour du fait qu'il n'y a aucune implication entre les assertions "avoir même aire" et "avoir même périmètre" pourrait faire l'objet d'une situation-problème en travaillant sur les mêmes figures A, B, C, D, E, F, G, H et I. Cependant, ce n'est semble-t-il pas l'objet ici.

Question f

Quelle logique conduit l'enseignant à proposer cette progression (activités préparatoires puis situation de recherche) ?

Dans les exercices 1 et 2, le maître propose deux procédures différentes pour comparer des aires (par mesurage et par décomposition puis recomposition des figures). L'exercice 3 consiste en un réinvestissement de ces deux procédures, mais il s'agit certainement d'un exercice destiné à distinguer les notions d'aire et de périmètre.

En faire une analyse critique.

Les exercices 1 et 2 se complètent pour donner du sens à la notion d'aire : même si, en général, la comparaison d'aire est abordée sans la mesure (les élèves ont habituellement du mal à se détacher de l'aire mesurée) puis en utilisant la mesure, il est certainement intéressant de montrer aux élèves ces deux approches.

Les figures sont bien choisies pour introduire la discussion "avoir même aire" induit-il "avoir même périmètre" ou réciproquement. En effet, A et D ont même aire, mais pas même périmètre ; A et B ont même périmètre mais pas même aire ; et certaines figures ont à la fois même aire et même périmètre, comme B, E et H.
Par contre, l'exercice 3 n'est pas très bien présenté ...

. le tableau oblige à des répétitions, et il eut été préférable de demander de grouper des figures de même aire, ou de même périmètre.

. les questions n'invitent pas l'élève à se poser des questions sur la distinction des notions d'aire et de périmètre.

Question g

Envisager une exploitation des réponses possibles des élèves.

Les réponses correctes et bien justifiées pourront servir de correction (en guise de conclusion).

Certains élèves vont probablement argumenter (par erreur) "Comme elles ont même aire, elles ont aussi même périmètre" ou "Comme elles ont même périmètre, elles ont aussi même aire". Le maître peut alors demander aux autres élèves ce qu'ils en pensent, ..., puis proposer en institutionnalisation "On peut trouver deux figures qui ont même aire et qui n'ont pas même périmètre" ou "On peut trouver deux figures qui ont même périmètre et qui n'ont pas même aire".

En dehors de cela, le maître devra sans doute revenir sur les méthodes répertoriées dans les exercices 1 (pour mesurer : la figure G de l'exercice 3 est difficile à mesurer) et 2 (pour décomposer et recomposer : décomposer correctement les figures C, F et I n'est pas chose aisée).
