Sujet zéro (exercice 1)

On peut classer les entiers naturels selon la valeur de leur reste dans la division euclidienne par 26.

Ainsi :

E_0 est l'ensemble de ceux dont le reste est 0

E_1 est l'ensemble de ceux dont le reste est 1

E_2 est l'ensemble de ceux dont le reste est 2

...

1) Combien d'ensembles E_n différents obtient-on ?

Etant donné que le reste d'une division euclidienne est positif au sens large et inférieur au diviseur au sens strict, on obtient 26 ensembles E_n possibles qui sont : E_0, E_1, E_2, ..., E_{25}.

2) Prouver que si un entier x est dans l'ensemble E_n, alors $x + 26$ est dans le même ensemble E_n.

La division euclidienne de x par 26 donne un quotient q et un reste r. Cela s'écrit :

$x = 26 \times q + r$
avec $0 \leq r < 26$.

Ceci donne alors

$x + 26 = 26 \times q + r + 26 = 26 \times (q + 1) + r$
avec $0 \leq r < 26$.
Ceci induit que la division euclidienne de $x + 26$ par 26 donne un quotient $q + 1$ et un reste r.

Ainsi, x et $x + 26$ sont deux éléments du même ensemble E_r.

3) Dans quels ensembles sont les nombres : 456 ; 261 ; $456 + 261$; 456×261 ? Justifier vos réponses.

$456 = 17 \times 26 + 14$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de 456 par 26 car $0 \leq 14 < 26$). Donc, 456 est un élément de E_{14}.

$261 = 10 \times 26 + 1$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de 261 par 26 car $0 \leq 1 < 26$). Donc, 456 est un élément de E_1.

$456 + 261 = 17 \times 26 + 14 + 10 \times 26 + 1 = 27 \times 26 + 15$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de $456 + 261$ par 26 car $0 \leq 15 < 26$). Donc, $456 + 261$ est un élément de E_{15}.

$456 \times 261 = (17 \times 26 + 14) \times (10 \times 26 + 1) = (17 \times 10 \times 26 + 14 \times 10 + 17 \times 1) \times 26 + 14 \times 1 = 4577 \times 26 + 14$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de 456×261 par 26 car $0 \leq 14 < 26$). Donc, 456×261 est un élément de E_{14}.

4) Montrer que si un entier a est dans E_{10} et un autre entier b est dans E_{23}, alors $a + b$ est dans E_7 et $a \times b$ dans E_{22}.

Si a est dans E_{10}, il s'écrit $a = a' \times 26 + 10$. De même, si b est dans E_{23}, il s'écrit $b = b' \times 26 + 23$.

Ainsi, $a + b = a' \times 26 + 10 + b' \times 26 + 23 = (a' + b') \times 26 + (10 + 23) = (a' + b') \times 26 + 26 + 7 = (a' + b' + 1) \times 26 + 7$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de $a + b$ par 26 car $0 \leq 7 < 26$). Donc, $a + b$ est un élément de E_7.

Egalement, $a \times b = (a' \times 26 + 10) \times (b' \times 26 + 23) = (a' \times b' \times 26 + a' \times 23 + b' \times 10) \times 26 + (10 \times 23)$

$= (a' \times b' \times 26 + a' \times 23 + b' \times 10) \times 26 + 8 \times 26 + 22 = (a' \times b' \times 26 + a' \times 23 + b' \times 10 + 8) \times 26 + 22$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de $a \times b$ par 26 car $0 \leq 22 < 26$). Donc, $a \times b$ est un élément de E_{22}.

5) Déterminer toutes les valeurs possibles des deux derniers chiffres a et b du nombre entier $2039ab$ afin que ce nombre soit dans E_{10} et soit également divisible par 3.

On cherche les nombres compris entre 203900 au sens large et 203999 au sens large qui soient dans E_{10}. La division euclidienne de 203900 par 26 s'écrit algébriquement $203900 = 7842 \times 26 + 8$ (c'est bien l'écriture de la division euclidienne de $a \times b$ par 26 car $0 \leq 8 < 26$). Il s'ensuit que 203902 est dans E_{10} (par surcomptage). Puis, d'après la question 2, $203902 + 26 = 203928$, $203928 + 26 = 203954$, $203954 + 26 = 203980$ sont également dans E_{10}. Les nombres 203902, 203928, 203954, 203980 sont même les seuls de E_{10} qui soient compris entre 203900 au sens large et 203999 au sens large (on a montré à la question 2 que si x donnait q comme quotient, $x + 26$ donnait $q + 1$ comme quotient dans la division euclidienne par 26, ce qui veut dire que ces deux nombres sont *consécutifs* dans l'ensemble E_r).

203902 est-il divisible par 3 ? Non, car la somme de ses chiffres ne l'est pas.

203928 est-il divisible par 3 ? Oui, car la somme de ses chiffres l'est.

203954 est-il divisible par 3 ? Non, car la somme de ses chiffres ne l'est pas.

203980 est-il divisible par 3 ? Non, car la somme de ses chiffres ne l'est pas.

Le nombre 203928 est donc le seul qui réponde à la question 5 ($a = 2$ et $b = 8$).

Questions complémentaires

6) Quels liens existe-t-il entre les ensembles E_n et les lignes et colonnes du tableau des nombres proposé par le maître ?

Aucun de bien évident, a priori, puisque les ensembles E_n font référence à une division euclidienne par 26 (c'est explicite) alors que le tableau du maître fait appel à une division euclidienne par 8 (8 nombres consécutifs par ligne).

Nouvelle définition des E_n (nécessaire pour répondre correctement à la question posée) :

On peut classer les entiers naturels selon la valeur de leur reste dans la division euclidienne par 8.
Ainsi :

E_0 est l'ensemble de ceux dont le reste est 0

E_1 est l'ensemble de ceux dont le reste est 1

E_2 est l'ensemble de ceux dont le reste est 2

...

Maintenant, si on regarde le tableau du maître (tableau à 8 colonnes),

la colonne qui commence par 0 contient les éléments de E_0,

la colonne qui commence par 1 contient les éléments de E_1,

la colonne qui commence par 2 contient les éléments de E_2,

la colonne qui commence par 3 contient les éléments de E_3,

la colonne qui commence par 4 contient les éléments de E_4,

la colonne qui commence par 5 contient les éléments de E_5,

la colonne qui commence par 6 contient les éléments de E_6, la colonne qui commence par *7* contient les éléments de E_7,

la première ligne contient les nombres qui admettent *0* comme quotient dans la division euclidienne par *8*,
la deuxième ligne contient les nombres qui admettent *1* comme quotient dans la division euclidienne par *8*,
la troisième ligne contient les nombres qui admettent *2* comme quotient dans la division euclidienne par *8*,
...

7) Le maître construit une feuille de calcul à partir d'un tableur pour valider rapidement les réponses aux questions du type :

Dans quelle ligne et dans quelle colonne va-t-on écrire le nombre *852* ?

Donner une des procédures possibles pour réaliser rapidement la feuille proposée en annexe 2.

- Entrer dans la cellule **A1**, le nombre *0* ;
- Entrer dans la cellule **B1**, la formule *"=A1+1"*, copier cette formule et la coller dans la plage **C1:H1** ;
- Entrer dans la cellule **A2**, la formule *"=A1+8"*, copier cette formule et la coller dans la plage **B2:H2** ;
- Copier la plage **A2:H2** et la coller dans la plage **A3:H*n*** pour un *n* suffisamment grand.

Les formules étant en adressage relatif, le copier-coller fournit bien le tableau demandé.

8) Pour chaque phase de la préparation du maître, faire des hypothèses sur les procédures attendues des élèves pour répondre aux questions.

<u>Phase 1</u> : pour compléter le tableau, l'élève peut utiliser la comptine numérique pour placer *12*, *13*, *14* et *15* en allant de gauche à droite dans le tableau, puis passer à gauche de la ligne suivante à *16* en poursuivant de gauche à droite, *17*, *18*, et caetera. Pour répondre à la question "Dans quelle ligne est le nombre *19* ?", il suffit à l'élève de repérer le nombre *19* et de constater qu'il se trouve à la troisième ligne. Pour répondre à la question "Dans quelle colonne est le nombre *23* ?", il suffit à l'élève de repérer le nombre *23* et de constater qu'il se trouve à la huitième colonne.

<u>Phase 2</u> : continuer à compléter le tableau pour savoir dans quelle ligne et dans quelle colonne on range les nombres *62* et *70* n'aurait pas grand intérêt et ne répondrait pas aux attentes du maître qui veut essayer de prévoir ce qui se passe ... L'élève est donc invité à observer les nombres de *1* à *25* qui sont déjà placés dans le tableau pour repérer des propriétés relatives au positionnement de ces nombres dans le tableau.

1°) L'élève peut, par exemple, repérer dans la première colonne, le début de la liste des multiples de *8*, s'en servir pour déduire qu'on va placer *56* dans la première colonne (à la huitième ligne), puis poursuivre de gauche à droite en plaçant *57* dans la deuxième colonne, ... jusqu'à *62* dans la septième colonne. Cet élève peut mettre en oeuvre une procédure analogue pour placer *70* dans le tableau.
2°) L'élève peut aussi faire la remarque suivante : "Quand on se déplace d'une case vers la droite du tableau, on ajoute *1* et quand on se déplace d'une case vers le bas du tableau, on ajoute *8*". Il peut alors se servir de cette règle pour construire partiellement son tableau : de *25* placé en deuxième colonne et quatrième ligne, placer *33* en deuxième colonne et cinquième ligne, ... jusqu'à placer *57* en deuxième colonne et huitième ligne, puis placer *58* en troisième colonne et huitième ligne, ... jusqu'à placer *62* en septième colonne et huitième ligne. Enfin, en remarquant que $70 = 62 + 8$, il peut placer *70* en septième colonne et neuvième ligne.

<u>Phase 3</u> : les procédures utilisant uniquement l'addition sont rapidement mises en défaut pour placer des grands nombres dans le tableau (les procédures deviennent longues et fastidieuses). L'élève peut

alors réfléchir sur une procédure utilisant les multiplications (plutôt que l'addition réitérée de *8*) en menant la réflexion suivante : "Quand on se déplace d'une case vers le bas du tableau, on ajoute *8*, donc quand on se déplace de *10* cases vers le bas du tableau, on ajoute $10 \times 8 = 80$, et même, quand on se déplace de *100* cases vers le bas du tableau, on ajoute $100 \times 8 = 800$, ...".

1°) La propriété précédente utilisée directement donne : "En faisant un saut vers le bas de *100* lignes depuis la case contenant le nombre *0*, on arrive au nombre *800*, mais on peut encore descendre pour atteindre *808*, et encore pour atteindre *816*, ... et encore pour atteindre *848*, puis après, se déplacer vers la droite d'une colonne pour arriver à *849*, d'une autre pour arriver à *850*, ... puis encore une dernière pour arriver à *852*. On parvient ainsi en *107*^{ème} ligne et en cinquième colonne". L'élève a ainsi utilisé une décomposition du type $852 = 8 \times 100 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Remarque* : il aurait également été possible de détailler ce type de procédure sur l'exemple de *784*.
2°) L'élève aurait pu être plus efficace en utilisant des décompositions du type $852 = 8 \times 100 + 8 \times 6 + 4$. Ceci donne : "En faisant un saut vers le bas de *100* lignes depuis la case contenant le nombre *0*, on arrive au nombre *800*, mais on peut encore faire un saut vers le bas de *6* lignes pour arriver à *848*, puis après se déplacer vers la droite de quatre colonnes pour arriver à *852* ... et on parvient ainsi en *107*^{ème} ligne et en cinquième colonne".
3°) L'élève aurait pu être encore plus efficace en utilisant directement la division euclidienne $784 = 8 \times 98 + 0$ ou $852 = 8 \times 106 + 4$. Il suffit pour cela que l'élève se demande : "Combien de fois peut-on avancer d'une case vers le bas sachant qu'à chaque fois qu'on descend, on ajoute *8* ?".

<u>Phase 4</u> : réinvestissement de la phase 3 pour la question "Dans quel ligne et dans quelle colonne serait le nombre *145* ?". Quant à la question "Quel nombre écrit-on dans la *25*^{ème} ligne et à la première colonne ?", l'élève peut se dire qu'il faut de la case contenant le nombre *0* descendre de *24* lignes, c'est-à-dire ajouter $8 \times 24 = 192$ pour trouver ainsi le nombre *192*.

<u>Remarques</u> :

Les procédures des élèves sont ici construites sur un aspect dynamique de la situation (on voyage dans le tableau), mais on pouvait aussi voir le problème selon un aspect statique en considérant que pour placer n nombres dans le tableau (ou le nombre n lui-même), il faut avoir rempli un maximum de lignes qui contiennent chacune *8* nombres avant de compléter la ligne suivante et le nombre de lignes achevées est alors donné par le quotient de la division euclidienne de n par *8* (division quotition).
Il n'est probablement pas nécessaire pour l'élève de constater que les nombres disposés dans une même colonne ont même reste dans la division euclidienne par *8* ou que ceux disposés dans une même ligne ont même quotient dans la division euclidienne par *8*. La division euclidienne vient ici comme procédure experte et l'élève donne du sens à la division euclidienne en regard avec le tableau du maître : "Si $852 = 8 \times 106 + 4$, pour placer le nombre *852*, je descends de *106* lignes et je me déplace vers la gauche de *4* cases depuis la cellule située en première ligne et première colonne et je parviens à la *107*^{ème} ligne et cinquième colonne".

9) Quelle est la solution attendue par l'enseignant en fin de la phase 3 ?

Les solutions des questions proposées en fin de phase 3 sont données dans la question précédente.

10) Quelle est la fonction du choix des nombres dans chacune des phases ?

<u>Phase 1</u> : des nombres supérieurs à *12* au sens large mais pas trop élevés (≤ 25) pour que l'élève comprenne comment on construit le tableau et que la construction permet d'obtenir aisément la réponse aux questions posées (phase d'appropriation du problème).

<u>Phase 2</u> : des nombres supérieurs à *26* au sens large mais qui ne soient pas encore placés dans le tableau ni trop élevés (≤ 60) afin que les procédures basées sur l'addition soient performantes (phase de recherche : on construit des procédures primitives de résolution).

Phase 3 : des nombres suffisamment élevés ($\geq$ *100*) que pour mettre en défaut les procédures basées uniquement sur l'addition afin de faire jaillir des procédures basées sur la multiplication ou mieux encore sur la division euclidienne (nouvelle phase de recherche : on déconstruit les procédures primitives pour mieux asseoir les procédures expertes).

Phase 4 : toujours des nombres supérieurs à *100* au sens large (phase de réinvestissement de la phase 3).

11) A l'aide d'une calculatrice, un élève peut valider les réponses concernant la place des nombres *784* et *852* dans le tableau. Proposer deux procédures différentes qu'il pourrait utiliser.

L'élève peut effectuer à la calculatrice la division euclidienne de ce nombre par *8*. pour obtenir directement quotient et reste.

Remarque : toutes les calculatrices ne possèdent pas de touche spécifique pour la division euclidienne.

L'élève peut aussi utiliser la calculatrice pour trouver quotient et reste de la division euclidienne par tâtonnement :

$8 \times 72 = 576$
$576 + 8 \times 16 = 704$
$704 + 8 \times 6 = 752$
$752 + 8 \times 2 = 768$
$768 + 8 = 776$
$776 + 8 = 784.$

Donc $784 = (72 + 16 + 6 + 2 + 1 + 1) \times 8 = 98 \times 8.$

Ou encore

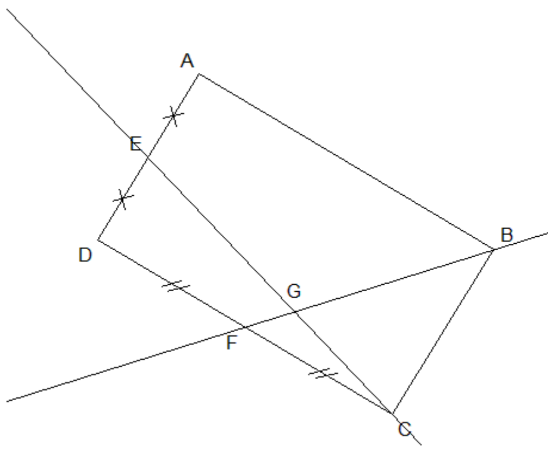
$8 \times 100 = 800$
$800 + 8 \times 7 = 856$ (c'est trop)
$800 + 8 \times 6 = 848$
$848 + 4 = 852.$
Donc $852 = (100 + 6) \times 8 + 4 = 106 \times 8 + 4.$

Le quotient augmenté de un donne le numéro de la ligne, le reste augmenté de un donne le numéro de la colonne.

Sujet zéro (exercice 2)

Soit *ABCD* un rectangle. On note *F* le milieu du segment *[CD]*, *E* le milieu du segment *[AD]* et *G* l'intersection des droites *(EC)* et *(FB)*.

1) Faire un dessin à main levée.



2) Exprimer l'aire du triangle *DEC* en fonction de l'aire du rectangle *ABCD*. Justifier votre réponse.

Aire(ABCD) = AD x DC (formule de calcul d'aire d'un rectangle).

Aire(DEC) = (DE x DC)/2 (formule de calcul d'aire d'un triangle rectangle).

Puis, *Aire(DEC) = (AD/2 x DC)/2* (car *E* est milieu du segment *[AD]*), et enfin, *Aire(DEC) = (AD x DC)/4 = Aire(ABCD)/4.*

3) Justifier que l'aire du quadrilatère *EDFG* est égale à celle du triangle *BCG*.

Aire(BCF) = (BC x CF)/2 (formule de calcul d'aire d'un triangle rectangle). Puis, *Aire(BCF) = (AD x DC/2)/2* (car *BC = AD* puisque *ABCD* est un rectangle et car *F* est milieu du segment *[CD]*), et enfin, *Aire(DEC) = (AD x DC)/4 = Aire(ABCD)/4.*

Ainsi, *Aire(BCF) = Aire(DEC)*. Mais, en décomposant ces deux triangles, on a : *Aire(BCF) = Aire(BCG) + Aire(CGF)* et *Aire(DEC) = Aire(DEGF) + Aire(CGF)*. Il s'ensuit que *Aire(BCG) + Aire(CGF) = Aire(DEGF) + Aire(CGF)*, puis *Aire(BCG) = Aire(DEGF)*.

4) Donner la réponse à chacun des exercices 1 et 2.

Exercice 1

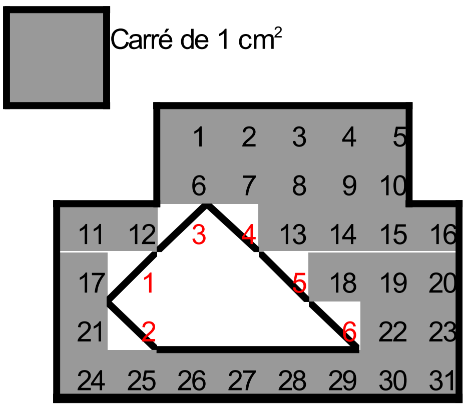
Quel est le périmètre de la figure ?
Réponse : ***14*** cm

Exercice 2

Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?
Réponse : ***8,5*** cm^2

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

Je me suis aidé du schéma suivant pour compter les petits carreaux ...



31 petits carreaux entiers
6 moitiés de petits carreaux
Soit un équivalent de 31 + 6/2 = 34 petits carreaux entiers
Soit encore 34/4 = 8,5 cm^2

Questions complémentaires

5) Dans quel cycle de l'enseignement ces exercices peuvent-ils être proposés ? Justifiez.

Cycle 3. C'est dans le programme de cycle 3 qu'on peut trouver "Mesurer l'aire d'une surface par un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement)". L'aire ne fait pas partie des grandeurs à travailler dans le programme du cycle 2.

6) Quelles erreurs, liées aux grandeurs en jeu dans ces deux exercices, peut-on prévoir ? Citez-en au moins trois.

<u>Pour le périmètre</u>.

i. Erreur liée à l'unité de mesure : deux carreaux pour *1* cm (exemple : omission de diviser par *2* ; périmètre de *28* cm) ;
ii. Erreur liée au comptage des paires de petits carreaux (exemple : oubli d'un petit carreau ; périmètre de *13,5* cm) ;
iii. Erreur liée à la confusion entre les notions d'aire et de périmètre (exemple : la figure a même périmètre qu'un rectangle de *3* cm de large et *4* cm de long, ce qui est correct, et la formule qui donne le périmètre d'un rectangle est $L \times l$, ce qui est faux, donc le périmètre est *12* cm).

<u>Pour l'aire</u>.

i. Erreur liée à l'unité de mesure : quatre carreaux pour *1* cm^2 (exemple : omission de diviser par *4* ; aire de *34* cm^2) ;
ii. Erreur liée au comptage des groupes de quatre petits carreaux (exemple : oubli d'un petit carreau ; aire de *8,25* cm^2) ;
iii. Erreur liée au caractère décimal du résultat attendu (exemple : aire de *8* cm^2 en délaissant la partie décimale) ;
iv. Erreur liée à la confusion entre les notions d'aire et de périmètre (exemple : l'aire grisée peut être calculée comme différence entre l'aire du polygone plein extérieur et de celle du polygone plein intérieur, ce qui est correct, le polygone extérieur a même aire qu'un rectangle de *3* cm de large et *4* cm de long, ce qui est faux, l'aire grisée vaut donc douze centimètres carrés, ce qui est faux, diminués de deux, ce qui est correct, et vaut ainsi dix centimètres carrés, ce qui est évidemment encore faux).

7. a) Décrire les procédures utilisées par Marina et Raoul.

Ces deux élèves trouvent la même réponse mais également utilisent la même procédure : ils comptent les groupes de deux petits carreaux inclus dans le polygone dont il faut calculer le périmètre. Cette procédure où l'on pave l'intérieur d'un polygone est généralement utilisée pour un calcul d'aire !

7. b) Quelle peut être la signification des nombres *7* et *9* dans le calcul de Mathilde ?

Après avoir remarqué que le polygone a même périmètre qu'un rectangle de *3* cm de large et *4* cm de long, ce qui est correct, cet élève a sans doute compté *7* petits carreaux de large (erreur de un : peut-être l'élève a-t-il compté les noeuds du quadrillage au lieu des carreaux) et *9* petits carreaux de long (encore erreur de un : peut-être l'élève a-t-il compté les noeuds du quadrillage au lieu des carreaux) et les a multiplié. Cette procédure où l'on multiplie les mesures des côtés d'un rectangle entre elles relève d'un calcul d'aire à l'aide d'une formule.

7. c) Quelle est l'erreur commune aux trois élèves ?

Ces trois élèves confondent les notions d'aire et de périmètre.

8. a) Décrire les procédures utilisées par Julie et Anaïs.

Ces deux élèves utilisent la même procédure : ils dénombrent les petits carreaux grisés, et comptent pour un ceux qui sont à moitié grisés, ce qui est faux.

Pour Anaïs, c'est exactement ceci qui est fait : elle trouve *37* petits carreaux.
Pour Julie, il y a de plus un groupement de ces petits carreaux par *4*, mais elle omet un dernier petit carreau (soit directement dans le comptage, soit comme équivalent à *0,25* cm^2).

8. b) Analysez l'erreur d'Alexandre et donnez-en une origine possible.

Cet élève pave la partie grisée avec des grands carreaux. Il parvient à placer exactement quatre grands carreaux et déduit que l'aire est de *4* cm^2. Il omet de traiter la partie grisée non pavée. Il devrait encore acquérir des procédures de découpage/recollage. Mais il pourrait aussi accepter de paver par des moitiés de petits carreaux (changer d'unité), puis utiliser un rapport de proportionnalité (un grand carreau équivaut à huit moitiés de petits carreaux).

8. c) A ce même exercice, quelques élèves ont répondu "*8,2*". Expliquez l'origine possible de ce résultat.

Il n'est pas rare chez les élèves de ne pas écrire huit et demi correctement et d'écrire "8," puis "2" en rapport avec le terme demi ("deux" et "demi" sont des termes qui ont la même racine étymologique). Cependant, il est fort possible qu'ici le *8* devant la virgule désigne le nombre de grands carreaux équivalents et le *2* après la virgule désigne le nombre de petits carreaux équivalents restant.

Sujet zéro (exercice 3)

1) Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est *105* ? *210* ? *77* ? *144* ? *326* ? Justifiez vos réponses.

Si on nomme $n - 1$, n et $n + 1$ les trois entiers naturels consécutifs, la somme de ces trois entiers est $3 \times n$ (n est entier naturel supérieur ou égal à *1*, d'après l'énoncé). Ceci induit qu'une somme de trois entiers naturels consécutifs est forcément multiple de *3*.

Ainsi, *77* et *326* ne peuvent être sommes de trois entiers consécutifs.

D'autre part, $105/3 = 35$, ce qui induit que $105 = 34 + 35 + 36$; $210/3 = 70$, ce qui induit que $210 = 69 + 70 + 71$; $144/3 = 48$, ce qui induit que $144 = 47 + 48 + 49$.

2) Quels sont tous les entiers naturels qui peuvent être la somme de trois entiers consécutifs ? Justifiez votre réponse.

Il a été établi qu'une somme de trois entiers naturels consécutifs est forcément multiple de *3*.

On peut aussi montrer que si un entier naturel est multiple de *3*, il est somme de trois entiers consécutifs : en effet, un multiple de *3* s'écrit $3 \times n$ (n est entier naturel) et $3 \times n = (n - 1) + n + (n + 1)$ et donc tout multiple de *3* est somme de trois entiers consécutifs.

<u>Remarque</u> : même *0* est somme de trois entiers consécutifs : $0 = (- 1) + 0 + 1$ bien que $- 1$ ne soit pas un entier naturel. Dans la première question, il est dit que les trois entiers consécutifs doivent être naturels, mais ce n'est plus le cas dans la deuxième question.

3) Quelles peuvent être les valeurs possibles du nombre a (avec $0 \leq a \leq 9$) pour que le nombre $34a7$ soit la somme de trois entiers naturels consécutifs ?

Lors de la première question, il a été vu que $34a7$ doit être multiple de *3* pour être somme de trois entiers naturels consécutifs. Cependant, un nombre est multiple de *3* si et seulement si la somme de ses chiffres l'est également. Ainsi, $34a7$ est multiple de *3* si et seulement si $3 + 4 + a + 7 = a + 14$ est multiple de *3*, c'est-à-dire pour $a = 1$, $a = 4$, et $a = 7$. Ainsi, $3417 = 1138 + 1139 + 1140$, $3447 = 1148 + 1149 + 1150$ et $3477 = 1158 + 1159 + 1160$ sont somme de trois entiers consécutifs, et, d'après la deuxième question, ce sont les seuls de la forme $34a7$.

4) Le nombre *21924* est le produit de trois entiers consécutifs que l'on souhaite déterminer.

a) Décomposer ce nombre en produit de facteurs premiers, puis en déduire les trois entiers cherchés.

21924/2 = 10962 ; *10962/2 = 5481* ; *5481/3 = 1827* ; *1827/3 = 609* ; *609/3 = 203* ; *203/7 = 29*.

Donc, $21924 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 29$.
Puis, $21924 = 27 \times 28 \times 29$ ($27 = 3^3$ et $28 = 2^2 \times 7$).

b) A l'aide de votre calculatrice, trouver ces trois nombres par une autre méthode que vous décrirez précisément.

A l'aide de la calculatrice, on peut effectuer une méthode par tâtonnement :

Nombre choisi	Suivant	Sur-suivant	Produit des trois	Commentaire
20	21	22	9240	Trop petit
32	33	34	35904	Trop grand
26	27	28	19656	Trop petit
27	28	29	21924	Exact

Questions complémentaires

5) Un maître a demandé à ses élèves de cycle 3 d'écrire trois nombres entiers qui se suivent. Tous les élèves ont répondu correctement à cette question. Le maître leur a ensuite posé l'exercice suivant :

Je pense à trois nombres qui se suivent. Lorsque je les additionne cela fait *42*, quels sont ces nombres ?

a) Décrire les procédures utilisées par ces élèves.

b) Repérer et analyser les erreurs en faisant des hypothèses sur leur origine.

Elève A.

Il effectue la division (euclidienne ou exacte) à l'aide de l'algorithme d'Euclide (maîtrisé) pour déduire que $42 = 14 + 14 + 14$ puis ajuste cette décomposition additive de *42* pour répondre à la question posée et écrire *42* comme somme de trois entiers naturels consécutifs : il ôte *1* du premier *14* qu'il compense par un ajout de *1* au troisième *14* et obtient $42 = 13 + 14 + 15$.
Cet élève ne commet aucune erreur.

Elève B.

Il procède par tâtonnement en utilisant plusieurs groupes de trois entiers naturels consécutifs. Ses recherches ne sont pas toujours correctement orientées (il obtient comme somme *57* et au lieu de diminuer ses nombres, il les augmente pour obtenir *60*, ...) mais il parvient cependant au résultat escompté en un temps raisonnable.
Cet élève ne commet aucune erreur.

Elève C.

Il effectue la division (euclidienne ou exacte) de *42* par *3* (correctement) pour déduire que $42 = 14 + 14 + 14$ (ce qu'il n'écrit pas) puis ajuste cette décomposition additive de *42* pour écrire *42* comme somme de trois entiers naturels en progression arithmétique (ce n'était pas l'objectif de l'exercice) : il ajoute *2* au premier *14* qu'il compense en ôtant *2* au troisième *14* et obtient $42 = 16 + 14 + 12$, ce qui est correct, mais ne répond pas à la question posée puisque *12*, *14* et *16* ne sont pas des entiers naturels consécutifs.
Cet élève qui ne fournit pas un groupe de trois nombres entiers naturels consécutifs n'a sans doute pas pris l'hypothèse "consécutifs" en compte (bien que ce soit souligné dans l'énoncé) ou alors fait la confusion entre "consécutifs" et "en progression arithmétique".

Elève D.

Il procède par tâtonnement à partir d'un groupe de trois entiers naturels consécutifs : *15*, *16* et *17*. Il fait d'autres essais à partir de groupes de trois entiers consécutifs, mais perd peu à peu le fil directeur et, pour ajuster le résultat de sa somme à *42*, finit par ne plus considérer trois entiers naturels consécutifs. Il obtient une décomposition correcte de *42* comme somme de trois entiers naturels *10*, *13* et *19*, mais ces trois entiers naturels ne sont pas consécutifs.
Cet élève qui ne fournit pas un groupe de trois nombres entiers naturels consécutifs a sans doute, vu le nombre d'hypothèses à traiter, perdu de vue (bien que ce soit souligné dans l'énoncé) cette hypothèse.

Elève E.

Bien que cet élève ait dans un premier temps compris ce que sont trois entiers naturels consécutifs, il se contente ici de fournir une décomposition de *42* comme somme de trois entiers naturels : $42 = 20 + 11 + 11$. Si son calcul est posé en colonne ici, rien ne permet de conclure sur la méthode utilisée pour obtenir cette décomposition additive : peut-être une addition à trou.
Cet élève qui ne fournit pas un groupe de trois nombres entiers naturels consécutifs n'a sans doute pas pris l'hypothèse "consécutifs" en compte (bien que ce soit souligné dans l'énoncé).

Elève F.

Cet élève, qui utilise encore au cycle 3 des représentations cardinales du nombre *42*, écrit *42* comme somme de deux entiers naturels, en disposant ses *42* objets en deux groupes : $42 = 10 + 32$.
Cet élève qui ne fournit pas un groupe de trois nombres entiers n'a même pas tenu compte de l'hypothèse "trois nombres".

6) Le maître propose la même consigne pour d'autres nombres comme : *60*, *72*, *96*. Parmi les procédures utilisées par les six élèves, quelle est celle qu'il souhaite vraisemblablement valoriser ? Justifiez.

Sans doute celle de l'élève A, qui est rapide et efficace. Mais la procédure de l'élève B a tout de même l'avantage d'être plus sûre (pas de division) bien que plus longue.

7) Quel peut être l'objectif du maître lorsqu'il propose la même consigne mais avec le nombre *77* ?

L'objectif pourrait être de montrer que certains nombres ne peuvent s'écrire comme somme de trois entiers naturels consécutifs. Pour la procédure de l'élève A, ceci concorderait avec le fait que la division de *77* par *3* fournit un reste non nul. Pour la procédure de l'élève B, $24 + 25 + 26 = 75$ et $25 + 26 + 27 = 78$ et *77* semble par conséquent difficile à obtenir.

8) Le maître permet ensuite aux élèves d'utiliser leur calculatrice pour résoudre le problème.

a) Proposez trois nouveaux nombres que pourrait alors donner le maître. Justifiez votre choix.

Il pourrait proposer des multiples de *3* possédant *4* chiffres comme : *9627*, *8712* ou *8376*.

b) Décrire une procédure qu'un élève utilisant la calculatrice pourrait mettre en oeuvre.

Sur l'exemple de *8376* ...

L'élève peut réutiliser la procédure de l'élève A pour effectuer rapidement la division par *3*, puis achever comme l'élève A : "la calculatrice fournit $8376/3 = 2792$ donc $8376 = 2792 + 2792 + 2792 = 2791 + 2792 + 2793$".

L'élève peut également réutiliser la procédure de l'élève B pour le tâtonnement : $2000 + 2001 + 2002 = 6003$, $2500 + 2501 + 2502 = 7503$, $2800 + 2801 + 2802 = 8403$, $2700 + 2701 + 2702 = 8103$, $2750 + 2751 + 2752 = 8253$, $2775 + 2776 + 2777 = 8328$, $2790 + 2791 + 2792 = 8373$, $2791 + 2792 + 2793 = 8376$.

Sujet zéro (exercice 4)

1) a) En partant de *17584* et en comptant de *23* en *23*, peut-on atteindre le nombre *17692* ? Justifiez votre réponse.

17584 + 23 = 17607 ; *17607 + 23 = 17630* ; *17630 + 23 = 17653* ; *17653 + 23 = 17676* ; *17676 + 23 = 17699* ; ...

L'algorithme proposé n'a pas permis d'atteindre le nombre *17692* et ne le permettra jamais car les nombres visités par l'algorithme non écrits sont plus grands que *17699* et sont, par conséquent, trop grands.

1) b) En partant de *2197* et en comptant de *23* en *23*, peut-on atteindre le nombre *31600* ? Justifiez votre réponse.

Les nombres visités par cet algorithme sont de la forme $2197 + k \times 23$ où k est entier naturel (un ajout itéré de *23* s'est traduit par un ajout d'un certain nombre de fois *23*). Peut-on avoir $2197 + k \times 23 = 31600$. Si oui, alors $31600 - 2197 = k \times 23$, ou encore *29403* est multiple de *23*. En posant la division euclidienne de *29403* par *23*, on trouve un quotient égal à *1278* et un reste égal à *9*. Par conséquent, le reste étant non nul, *29403* n'est pas multiple de *23* et en partant de *2197* en comptant de *23* en *23*, on ne peut pas atteindre le nombre *31600*.

1) c) En partant de *0* et en comptant de *23* en *23*, peut-on atteindre le nombre *5727* ? Justifiez votre réponse.

Les nombres visités par cet algorithme sont les multiples de *23* (par construction). La question qui se pose alors est de savoir si *5727* est un multiple de *23*. En posant la division euclidienne de *5727* par *23*, on trouve un quotient égal à *249* et un reste nul. Par conséquent, le reste étant nul, *5727* est multiple de *23* et en partant de *0* en comptant de *23* en *23*, on peut atteindre le nombre *5727*.

2) D'une façon générale, si a et b sont deux entiers naturels donnés ($a \leq b$), indiquez un procédé général et rapide permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre b à partir de a en comptant de *23* en *23*.

Soit $RDE(b - a, 23)$ le reste dans la division euclidienne de $b - a$ par *23*. Si $RDE(b - a, 23)$ est nul, alors on peut atteindre b à partir de a en comptant de *23* en *23*, et si $RDE(b - a, 23)$ est non nul, alors on ne peut pas atteindre b à partir de a en comptant de *23* en *23*. Le procédé à proposer serait donc de calculer $RDE(b - a, 23)$ puis de conclure en conséquence.

3) Quel est le plus petit entier naturel à partir duquel, en comptant de *23* en *23*, on peut atteindre *31600* ? Justifiez votre réponse.

Soit r le nombre cherché. On cherche donc le plus petit entier naturel r possible tel que $r + k \times 23 = 31600$, ce qui est le cas lorsque r est le reste dans la division euclidienne de *31600* par *23*. En posant la division euclidienne de *31600* par *23*, on trouve : $r = 21$.

<u>Questions complémentaires</u>

4) Un enseignant de CM2 a donné à chacun de ses élèves l'un des trois exercices suivants :

a) On compte de *23* en *23* : en partant de *17584*, est-il possible d'atteindre le nombre *17692* ?
b) On compte de *23* en *23* : en partant de *2197*, est-il possible d'atteindre le nombre *31600* ?
c) On compte de *23* en *23* : en partant de *0*, est-il possible d'atteindre le nombre *5727* ?
Il a constaté que les procédures utilisées par les élèves ayant obtenu rapidement des réponses correctes étaient significativement différentes selon l'exercice traité. Expliquez pourquoi ces différences étaient prévisibles.

Par ordre croissant de difficulté ...

Pour le a), l'écart entre *17584* et *17692* est relativement petit : il est possible pour l'élève de fonder une procédure basée uniquement sur l'<u>addition itérée</u> de *23* (voir question 1.a).

Pour le c), l'écart est trop élevé pour encore procéder par addition itérée de *23*. L'élève doit affiner sa procédure initiale ...

a) au lieu d'additionner *23*, puis *23*, puis *23...*, il peut additionner un certain nombre de fois *23*, par exemple *10* fois ou *100* fois (il est facile de travailler multiplicativement avec les *10* ou les *100* : règle des zéros généralisée ou non), puis encore ... : on parle alors de <u>sauts successifs</u> ;
b) en additionnant *23*, puis *23*, puis *23...*, il peut remarquer qu'il tombe uniquement sur des multiples de *23* (même si la table des *23* n'est pas requise au cycle 3, les élèves ayant une approche intelligente des tables multiplicatives (utilisation des propriétés de la table de Pythagore pour la construire) peuvent repérer une technique permettant de construire cette table) et rechercher si *5727* est multiple de *23* en utilisant la <u>division euclidienne</u>.

Pour le b), l'écart est encore trop élevé pour procéder par addition itérée de *23*. L'élève doit affiner sa procédure initiale ...

a) au lieu d'additionner *23*, puis *23*, puis *23...*, il peut additionner un certain nombre de fois *23*, par exemple *10* fois, *100* fois ou *1000* fois (il est facile de travailler multiplicativement avec les *10*, les *100* ou les *1000* : règle des zéros généralisée ou non), puis encore ... : on parle alors de <u>sauts successifs</u> ;
b) en additionnant *23*, puis *23*, puis *23...*, il faut déjà avoir une bonne maîtrise de la division euclidienne pour savoir que ce problème en dépend : il ne semble pas complètement naturel de s'intéresser à l'écart entre la valeur initiale et la valeur finale (ou les valeurs atteintes par l'application de l'algorithme) ; et encore, une fois cette difficulté dépassée, l'élève poursuivant comme pour le c) en effectuant la division euclidienne de *29403* par *23* verrait encore surgir une nouvelle difficulté au niveau du calcul puisque les programmes demandent de rester dans le cadre de dividende de moins de quatre chiffres au sens large, ce qui n'est pas le cas ici.

5) Le document suivant est adapté du manuel "Maths CE2", Collection Thévenet, Bordas, 2004, p.132.

a) Quels sont les éléments mathématiques communs entre cet exercice et ceux de la question précédente ?

La situation mathématique est la même : on donne un <u>point de départ</u>, on considère un <u>pas algorithmique</u> et on questionne sur l'éventualité de tel ou tel <u>point d'arrivée</u>.

La notion mathématique sous-jacente est la même : la division euclidienne.

b) Quelle est la variable essentielle qui permet de donner cet exercice à des élèves dès le CE2 ?

Dans le programme de cycle 3, on trouve la compétence suivante :

"Produire des suites orales et écrites de *1* en *1*, *10* en *10*, *100* en *100*, à partir de n'importe quel nombre".
La production de suites de nombres (écrits en chiffres) de *10* en *10*, *100* en *100*, ... doit être mise en relation avec les effets d'ajouts successifs de 10 (ou d'une dizaine), de 100 (ou d'une centaine) ... A partir de ces activités, les élèves peuvent commencer à envisager le caractère infini de ces suites. Il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) ainsi que les régularités et les accidents des suites de nombres dits oralement.

De ce fait, les exercices proposés à Maud et à Cyril font partie intégrante du programme de cycle 3. Pour l'exercice proposé à Magali, il ne s'éloigne pas trop des programmes puisque ajouter *5* puis encore *5* revient à ajouter *10*, comme pour Cyril.

c) Proposez, pour chaque problème posé aux personnages du livre (Maud, Cyril et Magali) une procédure autre que celle qui correspond à la consigne et qui permettrait à des élèves de CE2 de déterminer dans chaque cas, de façon rapide, l'étiquette "arrivée".

Le pas a dans cet exercice un lien privilégié avec la base *10* : les pas sont tous de la forme $2^\alpha \times 5^\beta$ ($100 = 2^2 \times 5^2$; $10 = 2 \times 5$; et *5*). De ce fait, les nombres visités par les différents algorithmes ont des formes bien particulière :
pour Maud, tous les nombres visités terminent par "*25*" et sont plus grands que *17425* ... il s'agit donc de *18325* ;
pour Cyril, tous les nombres visités terminent par "*4*" et sont plus grands que *18124* ... il s'agit donc de *18214* ;
pour Magali, tous les nombres visités terminent par "*2*" ou par "*7*" et sont plus grands que *18542* ... il s'agit donc de *18587*.

Sujet zéro (exercice 5)

1) Répondre aux questions a) et b) posées ci-dessus, en justifiant vos réponses.

a) Dans quelles proportions les dimensions de la photo A ont-elles augmenté pour obtenir les agrandissements B et C ?

Le taux d'agrandissement est de *1,5* pour B et de *2,5* pour C. Ceci signifie qu'en multipliant longueur (respectivement largeur) de la photo A par *1,5*, on trouve longueur (respectivement largeur) de la photo B et qu'en multipliant longueur (respectivement largeur) de la photo A par *2,5*, on trouve longueur (respectivement largeur) de la photo C.

b) Quelle serait la longueur d'une photo, qui agrandie aurait une largeur de *60* cm ?

La largeur de cette photo est double de la largeur de la photo B, il en est alors de même pour la longueur (composition de proportionnalité : les dimensions de cette photo sont proportionnelles à celles de la photo A qui sont proportionnelles à celles de la photo B, donc les dimensions de cette photo sont proportionnelles à celles de la photo B). La longueur de cette photo serait par conséquent de *90* cm.

2) Quelle serait la largeur d'une photo agrandie qui aurait *147* cm de long ? Justifier votre réponse.

Il suffit de remplir le tableau de proportionnalité suivant pour trouver *98* comme largeur de cette nouvelle photo (par exemple en utilisant la règle de *3* : $98 = 147 \times 20/30$).

	Photo A	Nouvelle photo
Largeur	20	98
Longueur	30	147

3) Si l'on s'impose que le périmètre de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas *3,20* mètres, quelles sont les dimensions maximales de cet agrandissement ? Justifiez votre réponse.

Si on appelle x la largeur de la nouvelle photo, sachant que cette nouvelle photo est agrandie depuis la photo A, on déduit que la longueur de cette nouvelle photo est $x \times 30/20 = 1,5 \times x$.

Le périmètre de cette nouvelle photo doit être inférieur ou égal à *3,20* mètres, ce qui revient à dire que $2 \times (x + 1,5 \times x) \leq 3,2$ m ou encore que $5 \times x \leq 3,2$ m, soit $x \leq 0,64$ m. En traduisant cela, les dimensions maximales de cette nouvelle photo sont *0,64* m pour la largeur et $1,5 \times 0,64$ m $= 0,96$ m pour la longueur.

4) Si l'on s'impose que l'aire de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas *1,16* m^2, quelles sont les dimensions maximales de cet agrandissement ? Justifiez votre réponse.

Si on appelle y la largeur de la nouvelle photo, sachant que cette nouvelle photo est agrandie depuis la photo A, on déduit que la longueur de cette nouvelle photo est $y \times 30/20 = 1,5 \times y$.

L'aire de cette nouvelle photo doit être inférieure ou égal à *1,16* m^2, ce qui revient à dire que $y \times (1,5 \times y) \leq 1,16$ m^2 ou encore que $y^2 \leq 2,32/3$ m^2, soit $y \leq \sqrt{(2,32/3)}$ m. En traduisant cela, les dimensions maximales de cette nouvelle photo sont $\sqrt{(2,32/3)}$ m pour la largeur et $1,5 \times \sqrt{(2,32/3)}$ m $= \sqrt{(5,22/3)}$ m pour la longueur.

Questions complémentaires

Voici un exercice extrait du manuel "Nouvel Objectif Calcul", CM1, Ed Hatier, 1995.

L'annexe 1 présente les productions de trois élèves qui ont résolu les questions a) et b) de l'exercice du manuel.

5)Les élèves interprètent à leur façon les termes de la question a). Pour chaque élève, décrire succinctement l'interprétation donnée à cette question.

Elise regarde les couples de valeurs comme un début de suite logique, à la manière des tests de Q.I. :

20 -- ["+" 10] --> 30 -- ["+" 20 i.e. "+" 2 x 10] --> 50 -- ["+" 40 i.e. "+" 2 x 20] --> ...
30 -- ["+" 15] --> 45 -- ["+" 30 i.e. "+" 2 x 15] --> 75 -- ["+" 60 i.e. "+" 2 x 30] --> ...

La question concernant la proportion n'a donc pas du tout été comprise.

Antoine parle d'une augmentation brute des dimensions, sans parler de proportion : il calcule l'augmentation par différence entre l'état d'"avant" et l'état d'"après" mais pose les soustractions en ligne à l'envers (c'est juste un problème d'écriture) : le nombre soustrait est supérieur au nombre duquel on soustrait.

Jérémy parle d'une augmentation brute également, sans parler de proportion, mais l'augmentation dont il parle porte uniquement sur l'aire et non sur longueur et largeur. Il est vrai que l'agrandissement porte sur deux dimensions données (longueur et largeur) et que si l'élève n'a pas compris que la situation relevait de la multiplication, l'élève ne peut accepter l'addition puisque la largeur et la largeur ne sont pas augmentées d'une même longueur ; il est donc tentant (pour l'élève qui veut traiter son problème par addition) de se ramener à une seule grandeur (usuellement périmètre ou aire) sur laquelle l'élève peut effectivement parler d'augmentation.

6) Caractériser, en énonçant les propriétés mathématiques sous-jacentes, les procédures utilisées par les élèves pour répondre au b).

Elise utilise le fait que les dimensions de la nouvelle photo doivent être proportionnelles à celle de la photo B. Le coefficient de proportionnalité est *2* ("il faut doubler ...") et est correctement utilisé.

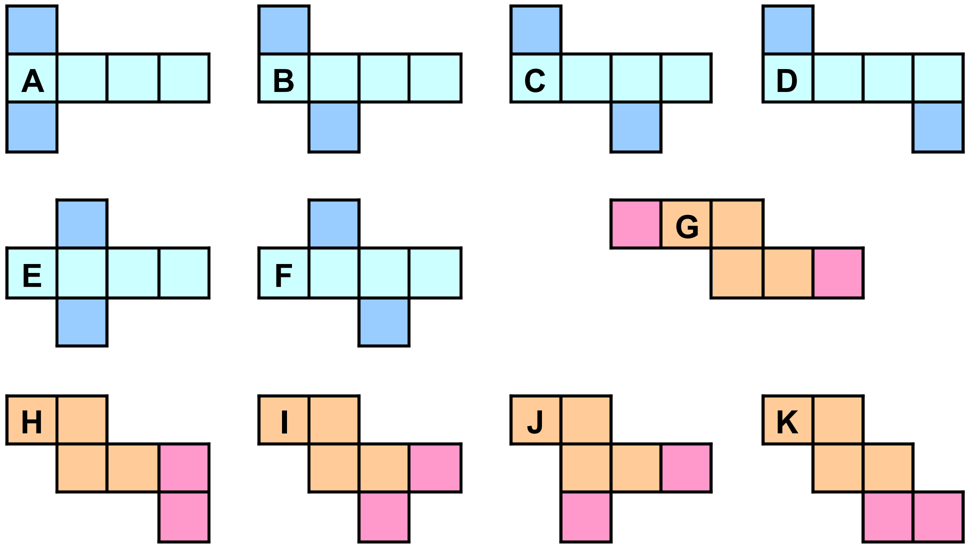
Antoine utilise exactement la même procédure qu'Elise, à ceci près qu'il utilise avec abus le signe "*x*". Une rédaction avec des couples de valeurs aurait été tout à fait correcte, $(30, 45) \times 2 = (30 \times 2, 45 \times 2) = (60, 90)$, mais c'est l'énoncé lui même qui suggérait la notation multiplicative pour les différents couples de valeurs.

Jérémy utilise une procédure correcte assez complexe. En effet, l'énoncé parle directement de proportion entre les dimensions des photos A, B, C et la nouvelle. Il s'agit donc ici de proportionnalité composée. Mais, de ces multiples situations de proportionnalité en naît une autre : longueur et largeur des différentes photos sont proportionnelles. Et, pour cette nouvelle relation de proportionnalité, Jérémy utilise la proportionnalité des écarts : si au regard de deux photos, la largeur a été augmentée de *10* cm pendant que la longueur était augmentée de *15* cm, alors si deux autres photos diffèrent de *10* cm pour la largeur, elles diffèrent aussi de *15* cm pour la longueur.

Sujet zéro (exercice 6)

1) A l'aide de dessins à main levée, proposer au moins trois patrons d'un cube, différents de ceux donnés dans les annexes 2 et 3.

Voici les onze patrons du cube :



Dans l'exercice 1, on trouve le **E**.

Dans l'exercice 2, on trouve le **E** pour B, le **G** pour C, le **K** pour D, le **A** pour E et le **D** pour G (A et F ne sont pas des patrons du cube).

Dans l'exercice 3, on trouve le **A**.

Dans l'exercice 4, on trouve le **I** pour *a* et le **A** pour *e* (*b*, *c* et *d* ne sont pas des patrons de cube).

B, **C**, **F** ,**H** et **J** sont donc les patrons qui ne sont pas présentés dans les annexes.

2) On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête *a*.

a) Quelle est la nature du triangle *ABC* ? Justifier la réponse.

Le quadrilatère *ABCD* est un carré (car les faces du cube sont toutes carrées). *ABC* est donc un <u>triangle isocèle rectangle en *B*</u> (l'angle en *B* est droit car les angles d'un carré sont droits et $AB = BC$ car les côtés du carré sont isométriques).

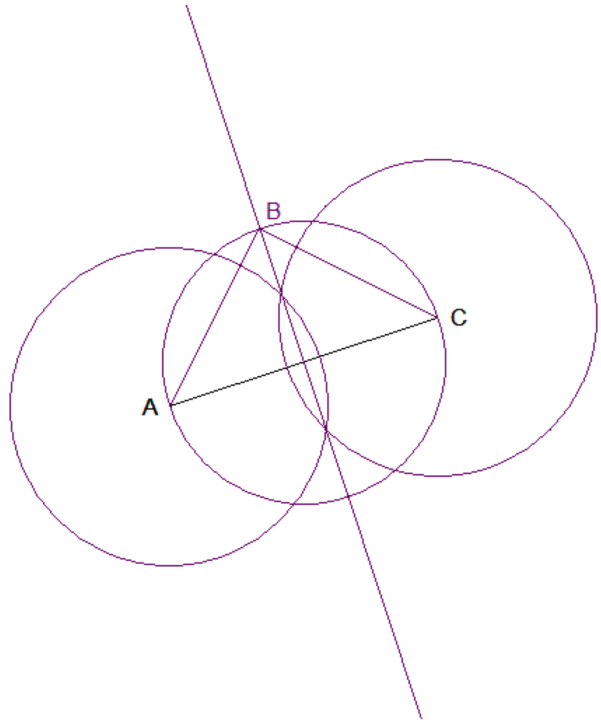
b) Calculer *AC* en fonction de *a*.

L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle *ABC* isocèle rectangle en *B* donne $AC = a \times \sqrt{2}$.

c) Sur l'annexe 1, le segment *[AC]* est déjà tracé. Construire à la règle non graduée et au compas le triangle *ABC*.

Etapes de la construction :
tracé de la médiatrice de *[AC]* (*B* est sur cette médiatrice car dans un triangle isocèle, la médiatrice principale passe par le sommet principal) ;

- construire le milieu du segment *[AC]* pour tracer le cercle de diamètre *[AC]* (*B* est sur ce cercle car le triangle *ABC* est rectangle en *B*).



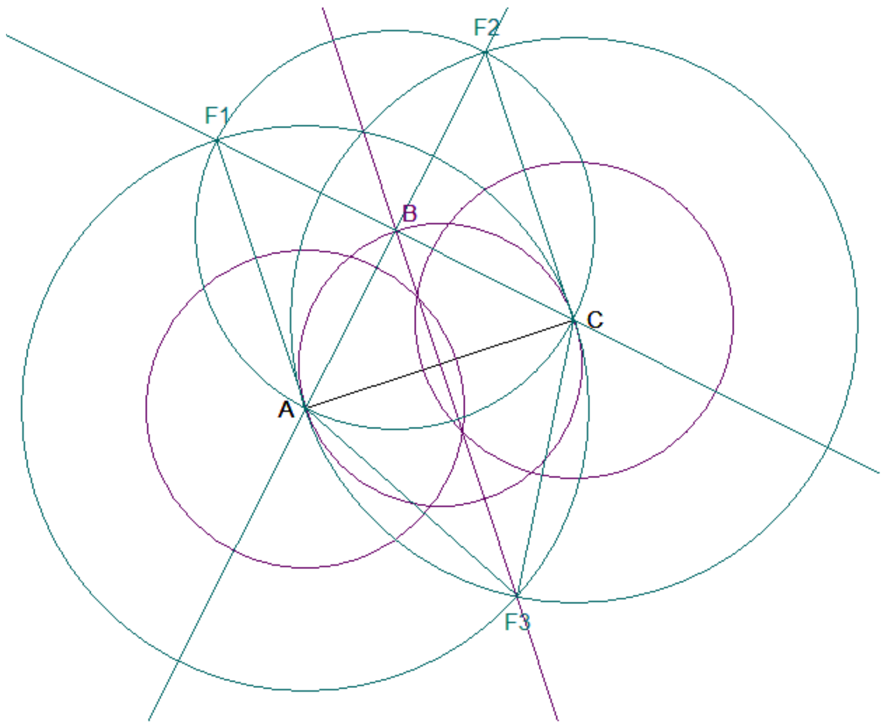
3)

a) A partir du tracé du triangle *ABC* précédemment effectué, construire un patron de la pyramide *FABC* (on laissera les traits de construction apparents).

Un aperçu sur les propriétés des faces de ce tétraèdre ...

ABC est un triangle isocèle rectangle en *B* ;
de même, *ABF* est un triangle isocèle rectangle en *B* ;
et, *BCF* est un triangle isocèle rectangle en *B* ;
puis, *ACF* est un triangle équilatéral (car tous ses côtés mesurent $a \times \sqrt{2}$).

Il n'est pas demandé d'expliquer la construction.



b) Calculer le volume de cette pyramide en fonction de *a*.

On rappelle la formule donnant le volume d'une pyramide :
le volume de la pyramide est l'aire de la base multipliée par la hauteur relative à cette base puis divisée par *3*.

Si on considère comme base le triangle *ABC*, la hauteur correspondante est bien *[BF]* car *(BF)* $\perp$ *(ABC)*.

Ainsi, $Volume(ABCF) = (Aire(ABC) \times BF)/3 = (a^2/2 \times a)/3 = a^3/6$.

4) On donne la valeur de l'arête du cube : $a = 6$ cm.

a) Calculer le volume de la pyramide *FABC*.

$Volume(ABCF) = a^3/6 = 36$ cm^3.

b) Sachant que cette pyramide est une maquette à l'échelle *1 / 200* d'un objet industriel, quel est, en m^3, le volume exact de cet objet ? Justifier la réponse.

Un taux d'agrandissement agit au simple sur des longueurs de segments, au carré sur des aires de surfaces planes et au cube sur des volumes.

Ainsi, $Volume(objet\ industriel) = 200^3 \times 36$ cm^3 $= 288000000$ cm^3 $= 288$ m^3.

5) Parmi les assemblages proposés dans l'exercice 4 de l'annexe 3, déterminer ceux qui ne sont pas des patrons d'un cube et justifier votre réponse (on pourra utiliser un codage pour faciliter les explications).

Pour les assemblages qui correspondent à des patrons, on se référera à la question 1).

L'assemblage b présente deux faces qui vont "se superposer".
L'assemblage c présente une face de trop donc deux faces qui vont "se superposer".
L'assemblage d présente quatre faces disposées en carré qui ne peuvent pas "se plier".

<u>Questions complémentaires</u>

6) Comparer les exercices 2 et 4 de l'annexe 3 au niveau :
-de la présentation ;
-de la consigne ;
-de la vérification.

<u>Au niveau de la présentation</u> ...

Les assemblages proposés dans l'exercice 2 sont de taille plus petite que ceux de l'exercice 4 et sont par conséquent plus difficile à manipuler tels quels.
Le nombre d'assemblages proposés dans l'exercice 2 est plus important que dans l'exercice 4, ce qui permet à l'élève d'observer une plus grande variété de patrons du cube, mais qui rend la tâche un peu plus longue.
Les assemblages de l'exercice 4 sont accompagnés d'un cube représenté en perspective cavalière, ce qui rend peut-être l'aspect plus attrayant, mais qui peut permettre aussi de favoriser l'association mentale de la perspective cavalière du cube et de quelques uns de ses patrons.
Les arêtes selon lesquelles on plie et selon lesquelles on découpe sont distinguées dans l'exercice 2 respectivement par des traits pointillés ou des traits pleins, ce qui facilite la compréhension de la figure.

Proposition. Je proposerais les assemblages A, B, C, D, E, F, G et *c*, au format des assemblages de l'exercice 4 (mais avec les traits pointillés et les traits pleins), accompagnés d'un cube représenté en perspective cavalière.

Au niveau de la consigne ...

Dans l'exercice 2, il n'est pas dit combien d'assemblages sont des patrons et, de ce fait, les élèves doivent réfléchir sur chacun des assemblages : s'il est facile de voir quand un assemblage ne correspond pas à un patron de cube, comme pour le A sur lequel apparaît que deux faces vont "se superposer", il est beaucoup plus difficile de conclure qu'un assemblage est un patron de cube sans vérification concrète (uniquement par manipulation d'images mentales), comme pour le C ou le D qui correspondent à des patrons de cube qui sont peu visités dans les manuels scolaires. Dans l'exercice 4, il suffit donc d'invalider les assemblages *b*, *c* et *d* pour conclure que *a* et *e* sont des patrons de cube : même si le *a* n'est pas un patron du cube souvent proposé dans les manuels scolaires, l'élève n'a pas à se poser la question de le valider.

Suite de la proposition. Je proposerais la consigne suivante : "Entoure trois assemblages qui sont des patrons de cube. Barre trois assemblages qui ne sont pas des patrons de cube".

Au niveau de la vérification ...

Il est évident que le but de ce genre d'exercice est de construire chez l'élève des images mentales anticipatrices et il faut donc que la phase de vérification ne vienne qu'assez longtemps après une réelle phase de recherche. Ainsi, il est à regretter qu'une vérification soit proposée directement dans l'exercice 2 (et non par le maître en remédiation ou par l'élève qui en ressent le besoin) et sans que l'élève ait à choisir pour quels assemblages il est utile de vérifier (la vérification proposée dans l'exercice 2 est trop systématique : pour chaque figure).

Suite de la proposition. Je proposerais de ne pas écrire de consigne portant sur la vérification.

7) Suite à la mise en place dans une classe de la "1ère phase" décrite dans le livre du maître (annexe 2), proposer une progression pour l'utilisation des exercices 1 à 4 des annexes 2 et 3. Justifier votre choix.

Je proposerais tout d'abord l'exercice modifié (voir question 6)) comme application directe de ce qui a été travaillé en phase 1.

Ensuite, je proposerais l'exercice 3 (en ôtant la phase de vérification imposée dans l'énoncé pour ne proposer cette phase que si l'élève n'a pas répondu correctement à l'exercice) qui permet d'anticiper sur les faces qui seront opposées après constitution du cube .

Et, enfin, je proposerais l'exercice 1 qui permet de prolonger le travail exécuté dans l'exercice 3 en s'intéressant aux faces adjacentes et non plus aux faces opposées. Cependant, le motif "rayures" pose problème et l'élève peut répondre à la question posée simplement en comptant les rayures : "la face rayée du patron a *8* rayures, la perspective A a *5* rayures et la perspective C a *7* rayures, c'est donc la perspective B qui est la bonne" ; ceci n'étant probablement pas l'objectif, j'en proposerais un analogue en utilisant des faces unies et colorées sans motif. De plus, les différents motifs conduisent à d'autres problèmes de transformation de figures : les cercles sont vus comme des ellipses en perspective cavalière, ... et il semble difficile d'approcher cela avec les élèves des Ecoles.

Sujet zéro (exercice 7)

Soit C un cercle de centre O et de rayon 4 cm. $[MN]$ est un diamètre de C.

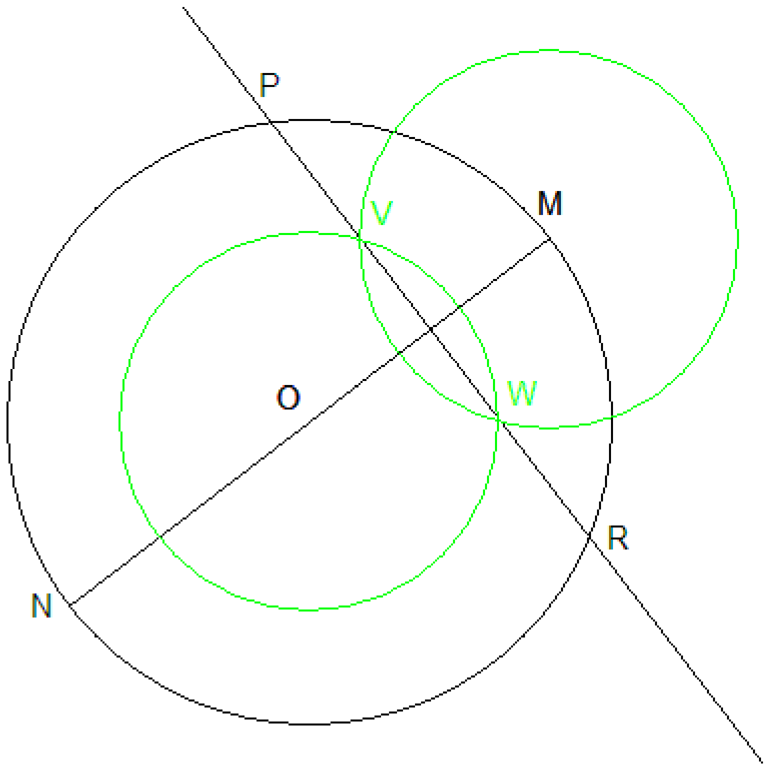
La médiatrice du segment $[MO]$ coupe le cercle C en P et R.

1) Construire la figure à la règle graduée et au compas en laissant les traits de construction apparents.

Etapes de la construction :

je trace une droite sur laquelle je place M, O et N dans cet ordre tels que $MO = ON = 4$ cm ;

je trace le cercle *C* de centre *O* passant par *M* ;
je trace un cercle C_1 de centre *O* de rayon *r* (avec $r > OM/2$) puis un autre C_2 de centre *M* et de même rayon *r* ;
les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points *V* et *W* équidistants de *O* et de *M* qui définissent donc la médiatrice du segment *[OM]* ;
je définis alors *P* et *R* comme points de concours entre le cercle *C* et la droite *(VW)*.



2) Démontrez que les points *P* et *R* sont symétriques par rapport à la droite *(MN)*.

On appelle *s* la symétrie orthogonale par rapport à la droite *(MN)*.

On nomme Δ la médiatrice du segment *[OM]*.

M, *O* et *N* étant sur la droite *(MN)* (invariante par *s*), on a $s(M) = M$, $s(N) = N$ et $s(O) = O$.

De plus, l'image d'un cercle de centre *O* par *s* est un cercle de centre *s(O)* et de même rayon. Ainsi, $s(C) = C$.

Et, une droite perpendiculaire à l'axe d'une symétrie orthogonale étant invariante, on a $s(\Delta) = \Delta$.

De $s(C) = C$ et de $s(\Delta) = \Delta$ on déduit que $s(C \cap \Delta) = C \cap \Delta$ ou $s(\{P, R\}) = \{P, R\}$ puis, comme ni *P* ni *R* ne sont sur l'axe de symétrie (i.e. ni *P* ni *R* ne sont invariants), on a : $s(P) = R$ et $s(R) = P$. *P* et *R* sont donc symétriques orthogonalement par rapport à la droite *(MN)*.

3) Quelle est la nature du quadrilatère *MPOR* ? Justifiez votre réponse.

Il s'agit d'un losange. On peut le montrer en utilisant la caractérisation par les diagonales (les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ; et réciproquement, un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu est un losange) :
les diagonales sont perpendiculaire (car *(PR)* est médiatrice de *[OM]* et car un segment et sa médiatrice sont perpendiculaires) ;
si on appelle *T* le point d'intersection des diagonales on a $OT = TM$ (car *(PR)* est médiatrice de *[OM]* et car les points de la médiatrices d'un segment sont équidistants de ses extrémités) et $PT = TR$ (car, d'après la question précédente, *P* et *R* sont symétriques orthogonalement par rapport à la

droite *(MN)*).

4) Quelle est la nature du triangle *MPN* ? Justifiez votre réponse.

Le triangle *MPN* est rectangle en *P* car l'angle inscrit dans *C*, $\widehat{MPN}$, intercepte un diamètre, à savoir *[MN]*.

5) Quelle est l'aire du quadrilatère *MPNR* ? Justifiez.

Le quadrilatère *MPNR* peut être considéré comme assemblage des triangles *MPT*, *PNT*, *NRT* et *RMT* qui sont tous quatre rectangles en *T* (puisque les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires). Il s'ensuit que $Aire(MPNR) = Aire(MPT) + Aire(PNT) + Aire(NRT) + Aire(RMT) = (MT \times PT)/2 + (PT \times NT)/2 + (NT \times RT)/2 + (RT \times MT)/2 = ((MT + NT) \times PT)/2 + ((NT + MT) \times RT)/2 = (MN \times PT)/2 + (MN \times RT)/2 = (MN \times (PT + RT))/2 = (MN \times PR)/2$.

Il reste à calculer *PR*. Par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle *OTP* rectangle en *T*, on déduit $PT = \sqrt{(OP^2 - OT^2)} = \sqrt{12}$ cm = $2 \times \sqrt{3}$ cm. Puis, $PR = PT + TR = 2 \times PT$ (car $PT = TR$ d'après la question 3) et $PR = 4 \times \sqrt{3}$ cm.

Maintenant, $Aire(MPNR) = (MN \times PR)/2 = 16 \times \sqrt{3}$ cm.

6) Écrire un programme de construction permettant d'obtenir cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique : on utilisera exclusivement la liste des instructions de programmation fournie en annexe 2.

> Créer un point.
> Nommer le point *O* (en cliquant sur le dernier point).
> Construire un cercle de centre *O* et de rayon de longueur *4* cm.
> Construire un point *M* sur le cercle.
> Construire une droite passant par le point *O* et par le point *M*.
> Construire l'intersection de la droite et du cercle.
> Nommer le point *N* (en cliquant sur le point distinct de *M* de la dernière intersection).
> Construire un cercle de centre *M* et passant par le point *O*.
> Construire l'intersection des deux cercles.
> Nommer le point *P* (en cliquant sur l'un des points de la dernière intersection).
> Nommer le point *R* (en cliquant sur l'autre point de la dernière intersection).

Justification de la construction : les points baptisés a posteriori *P* et *R* sont équidistants de *O* et de *M* (il appartiennent donc à la médiatrice du segment *[OM]*) et appartiennent à *C* ; il est donc justifié de les baptiser *P* et *R*.

<u>Questions complémentaires</u>

1)

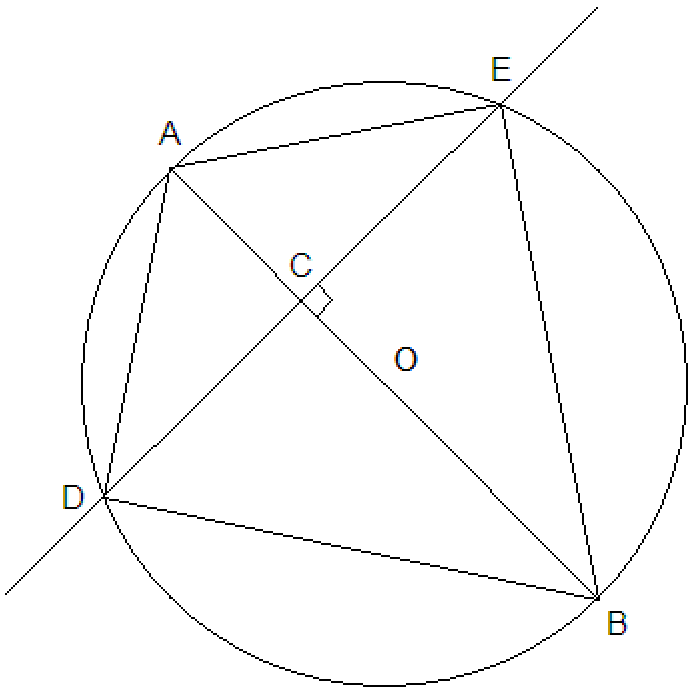
a) Répondre aux questions posées aux élèves en justifiant votre réponse.

Dans les fiches 23 et 25, il n'est pas spécifié où doit se placer le point *C* sur le segment *[OA]* (i.e. au milieu de ce segment), ce qui peut être repéré par mesurage.

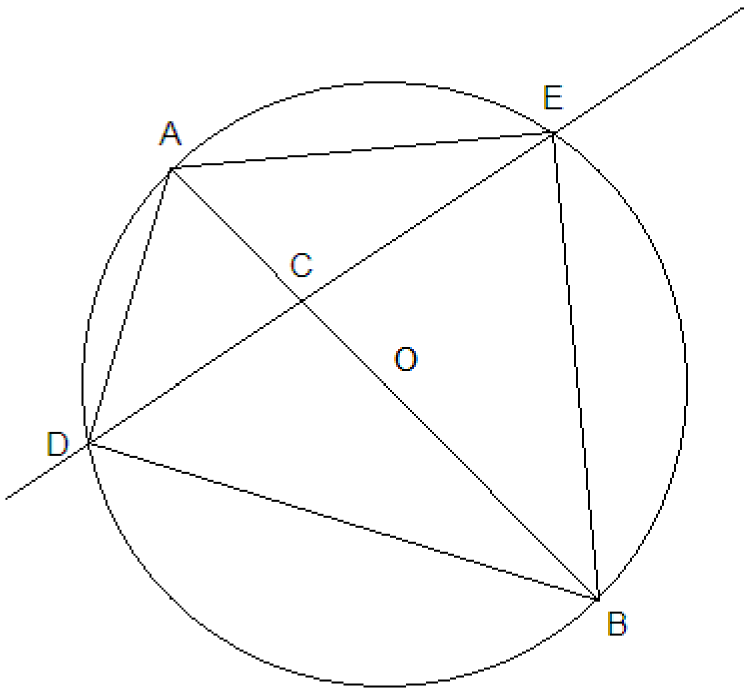
Dans la fiche 25, il n'est pas spécifié non plus que la droite *(DE)* doit être perpendiculaire à la droite *(AB)*, ce qui est codé sur la figure donnée.

La fiche 24 est donc la bonne.

La fiche 23 peut donner lieu à la figure suivante (à l'échelle 2 : 1) :



La fiche 25 peut donner lieu à la figure suivante (à l'échelle 2 : 1) :



b) Quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser cette tâche ?

On laisse les problèmes de compréhension du vocabulaire géométrique de côté, car il est évident que pour comprendre un texte, l'élève doit en comprendre le vocabulaire.

Point 1. L'élève doit savoir que pour définir un cercle, il suffit, par exemple, d'en donner centre et rayon. Il doit aussi pouvoir repérer que pour le cercle tracé, le centre est O et doit pouvoir vérifier par mesurage que son rayon est de *24* mm.

Point 2. L'élève doit pouvoir repérer que pour le cercle tracé, *[AB]* en est un diamètre simplement en invoquant la définition du terme "diamètre".
Point 3. L'élève doit pouvoir vérifier par mesurage que le point *C* n'est pas un point quelconque du segment *[OA]*, mais son milieu. Remarque : la notation d'un segment "entre crochets" ne fait pas partie des exigences de l'école.
Point 4. L'élève doit savoir qu'une droite est complètement définie si on dit qu'elle est perpendiculaire à une autre en spécifiant un point par lequel elle passe. Il doit aussi pouvoir interpréter le codage pour la perpendicularité. Remarque : la notation d'un segment "entre crochets" ne fait pas partie des exigences de l'école et le codage de la perpendicularité non plus.
Point 5. L'élève doit pouvoir authentifier les points *D* et *E* comme points d'intersections entre une droite et un cercle.
Point 6. L'élève doit savoir qu'on peut définir un quadrilatère en listant ses sommets et constater que ce quadrilatère est effectivement tracé.
¤ Pour les points 3 et 4, l'élève doit être capable de choisir la syntaxe correcte parmi les différentes propositions.

2)

a) Dans l'exercice, le rayon du cercle est donné et la figure est reproduite à taille réelle : si l'on supprimait ces deux données, cela modifierait-il la résolution du problème ? Justifier.

La résolution de ce problème ne serait pas modifiée car le problème porte essentiellement sur un choix pour les points 3 et 4 :
pour le point 3, le milieu est conservé par un agrandissement/réduction de figure et il suffit encore à l'élève de vérifier par mesurage que $AC = CO$;
pour le point 4, l'orthogonalité est conservée par un agrandissement/réduction de figure et il suffit encore à l'élève d'utiliser le codage ou de vérifier que les deux droites en question "forment" un angle droit.

b) De même, la présence du codage de l'angle droit en *C* a-t-il une influence sur les procédures des élèves ? Justifier.

Oui, le codage a une influence :
avec le codage, il suffit d'utiliser celui-ci et de lui faire confiance ;
sans le codage, l'élève doit utiliser l'équerre à bon escient pour constater l'orthogonalité.

3) A quel cycle proposeriez-vous cette activité ? Justifier.

Certaines compétences requises dans cet exercice ne sont pas du ressort du cycle 2, comme par exemple simplement "vérifier qu'un point est milieu d'un segment". Mais, ce n'est pas tant que certaines compétences ne font pas partie du programme du cycle 2 que la multitude et la variété des compétences mises en jeu qui fait que cet exercice serait proposé en cycle 3 et probablement même en fin de cycle 3 (fin de CM1, début de CM2).

4) Un maître demande à ses élèves de construire la figure de l'exercice en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Plusieurs élèves obtiennent alors une figure superposable à celle de la page du manuel.

a) Quels moyens l'enseignant peut-il utiliser pour vérifier la validité des procédures mises en oeuvre par ces élèves ?

Si l'objectif est d'obtenir une figure correcte, les procédures qui fournissent une figure correcte n'ont pas besoin d'être validées.

Si l'objectif est d'utiliser la fiche 24 avec le logiciel de géométrie dynamique, valider la figure ne suffit plus et il faut aller regarder comment l'élève a construit sa figure :
soit en demandant un compte-rendu de la part de l'élève à corriger plus tard par le maître, mais il est dommage que l'élève ne soit pas évalué immédiatement pour pouvoir revenir immédiatement sur sa

procédure ;
soit dans une phase de mise en commun (les élèves avec le maître valident ou invalident les procédures en argumentant) suivie d'une phase de correction (où les élèves peuvent retourner sur ordinateur pour modifier leurs procédures).

b) Quels types d'erreurs peut-il alors mettre en évidence ?

Certains élèves pourraient utiliser d'autres procédures de construction : par exemple, on peut envisager une procédure qui s'organiserait chronologiquement comme suit : construction de *[DE]*, puis de *C*, puis de *(AB)*, puis de *A*, *O* et *B*, puis le cercle.

Remarque : je ne pense pas que l'intention des auteurs de cette dernière question était de parler des difficultés spécifiques des logiciels de géométrie dynamique : un point déposé sur un objet n'est pas identique à un point attaché à ce même objet (un point sur une droite reste sur une droite lorsque l'on déplace la droite si ce point a été attaché à la droite, mais pas si le point a été déposé sur la droite), ... Si tel était le cas, je propose une autre réponse à la question 4 :

a) On déplace le point *A* et si la figure demeure correcte, la procédure est alors admissible.
b) Au point 2, l'élève peut avoir placé les points *A* et *B* sur le cercle au lieu d'attacher le premier au cercle et de définir l'autre comme intersection de droite et de cercle ; au point 3, l'élève peut avoir positionné *C* au milieu du segment *[OA]* sans l'avoir défini comme milieu du segment *[OA]*, etc.

Sujet zéro (exercice 8)

Note : toutes les réponses aux questions suivantes doivent être argumentées.

1) On considère deux nombres : $29/55$ et $39/75$.

a) Sont-il des nombres décimaux ?

Ces nombres sont rationnels (i.e. ils sont de la forme p/q avec p entier et q entier naturel non nul).

La fraction $29/55$ étant irréductible (i.e. on ne peut pas l'écrire différemment avec un dénominateur positif plus petit), elle est décimale si et seulement si le dénominateur (i.e. 55) n'a dans sa décomposition en produit de facteurs premiers que des 2 et des 5 ; cependant, la décomposition en produit de facteurs premiers de 55 est $55 = 5 \times 11$ et donc la fraction $29/55$ n'est pas décimale.

La fraction $39/75$ n'est pas irréductible, mais $39/75 = 13/25$ avec $13/25$ qui est une fraction irréductible (i.e. on ne peut pas l'écrire différemment avec un dénominateur positif plus petit), elle est décimale si et seulement si le dénominateur (i.e. 25) n'a dans sa décomposition en produit de facteurs premiers que des 2 et des 5 ; cependant, la décomposition en produit de facteurs premiers de 25 est $25 = 5 \times 5$ et donc la fraction $39/75 = 13/25$ est décimale.

b) Comparer ces deux nombres.

On a $0{,}527 \leq 29/55 \leq 0{,}528$ et $39/75 = 13/25 = 0{,}52$. Ainsi, on conclut que $39/75 = 13/25 < 29/55$.

c) Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.

On peut poursuivre et donner : $39/75 = 13/25 < \mathbf{0{,}524} < 29/55$.

d) Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

L'hypothèse "qui ne soit pas un nombre décimal" nous empêche de fournir la réponse donnée précédemment soit $524/1000 = 131/250$. Cependant, $524/999$ ou $524/1001$ devraient convenir.

En effet,
la fraction $524/999$ étant irréductible (i.e. on ne peut pas l'écrire différemment avec un dénominateur positif plus petit), elle est décimale si et seulement si le dénominateur (i.e. 999) n'a dans sa décomposition en produit de facteurs premiers que des 2 et des 5 ; cependant, la décomposition en produit de facteurs premiers de 999 est $999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ et donc la fraction

524/999 n'est pas décimale ;
de même, la fraction *524/1001* étant irréductible (i.e. on ne peut pas l'écrire différemment avec un dénominateur positif plus petit), elle est décimale si et seulement si le dénominateur (i.e. *1001*) n'a dans sa décomposition en produit de facteurs premiers que des *2* et des *5* ; cependant, la décomposition en produit de facteurs premiers de *1001* est $1001 = 7 \times 11 \times 13$ et donc la fraction *524/1001* n'est pas décimale.
Maintenant qu'on sait que ces fractions ne sont pas décimales, il reste à montrer qu'elles sont comprises entre $39/75 = 13/25$ et $29/55$. Il est évident que $524/1001 < 524/1000 < 424/999$. Il reste à montrer que
$13/25 < 524/1001$ ou que $13 \times 1001 = 13013 < 25 \times 524 = 13100$, ce qui est évident ;
et que $524/999 < 29/55$ ou que $524 \times 55 = 28820 < 999 \times 29 = 28971$, ce qui est également évident.

Conclusion : $39/75 = 13/25 <$ ***524/1001*** $< 0{,}524 <$ ***524/999*** $< 29/55$

2)

a) Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

1,7
1,07
1,109
1,81.

On a $1{,}07 < 1{,}109 < 1{,}7 < 1{,}81$. Pour justifier cela, on peut expliquer comment on peut ranger des nombres décimaux :
i. si deux décimaux ont des parties entières différentes, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière ;
ii. si deux décimaux ont des parties entières égales, on classe ces nombres en utilisant l'ordre lexicographique de leur partie décimale.

b) Donner deux décimaux strictement compris entre les nombres *1,1* et *1,11.*

$1{,}1 < 1{,}101 < 1{,}102 < 1{,}11$. La justification de la question 2. a) demeure valable pour la question 2. b).

<u>Questions complémentaires</u>

3) On considère l'exercice suivant :

Trouver un nombre compris entre

8,4 et *8,7*
10,1 et *10,2*
25 et *25,1*
7 et *7,01.*

a) Quelle propriété (notée P) de l'ensemble des nombres décimaux permet d'affirmer que cet exercice a des solutions ? Comment la formuleriez vous pour des élèves de fin cycle 3 ?

Il s'agit de la propriété d'intercalation des décimaux : entre deux nombres décimaux, il existe toujours un (et même une infinité) autre nombre décimal. Cette propriété n'est évidemment plus valable si l'on remplace nombre décimal par nombre entier.

Pour des élèves, une phrase du type "Entre deux nombres décimaux, je pourrai toujours trouver un autre nombre décimal" peut faire l'affaire.

<u>Remarque</u> : il n'est pas demandé dans cette question de parler des procédures que l'élève pourrait utiliser.

b) Expliquer pourquoi le choix des valeurs numériques est important dans ce type d'exercice.

Le choix des valeurs influe sur la difficulté de la tâche. Voici les différentes actions implicitement utilisées pour résoudre un tel exercice.

8,4 et *8,7* P_1 *[84 < 85 < 87]* d'où *8,5* convient.

10,1 et *10,2* P_1 [il n'existe pas d'entier entre *101* et *102*] P_2 [traiter *10,1* comme *10,10* et *10,2* comme *10,20*] P_1 *[1010 < 1015 < 1020]* d'où *10,15* convient.

25 et *25,1* P_0 [traiter *25* comme *25,0*] P_1 [il n'existe pas d'entier entre *250* et *251*] P_2 [traiter *25* comme *25,00* et *25,1* comme *25,10*] P_1 *[2500 < 2505 < 2510]* d'où *25,05* convient.

7 et *7,01* P_0 [traiter *7* comme *7,00*] P_1 [il n'existe pas d'entier entre *700* et *701*] P_2 [traiter *7* comme *7,000* et *7,01* comme *7,010*] P_1 *[7000 < 7005 < 7010]* d'où *70,05* convient.

Avec

Procédure P_0 : mettre au même format les décimaux.

Procédure P_1 : considérer les décimaux en omettant la virgule, c'est-à-dire comme des entiers, trouver un entier compris entre ces deux entiers, et placer dans cet entier trouvé la virgule au bon endroit.

Procédure P_1 : considérer que la procédure P1 ne peut fonctionner et qu'il faut la perfectionner.

Procédure P_2 : l'actuel format ne convenant pas, on utilise alors les zéros non écrits de l'écriture à virgule.

On peut alors constater un accroissement de la difficulté au cours de la séance au regard du nombre de procédures à mettre en oeuvre.

c) Certains élèves échouent à l'exercice ci-dessus. Donner une origine vraisemblable de leurs difficultés.

Ces difficultés ont été mises en lumière dans la réponse à la question précédente. La principale origine de ces difficultés est que la propriété d'intercalation, qui est vraie pour les nombres décimaux, est fausse quand il s'agit d'entiers naturels : entre deux nombres décimaux il existe toujours un autre nombre décimal, mais entre deux entiers naturels, il n'existe pas toujours un autre entier naturel (s'il n'en existe pas, les deux entiers naturels sont dits consécutifs).

Par exemple, entre *101* et *102*, il n'existe pas d'entier naturel et l'élève peut alors être amené à penser qu'il n'existe pas de nombre décimal entre *10,1* et *10,2* : entre *101* dixièmes et *102* dixièmes, l'élève peut croire qu'il n'existe pas de nombre décimal.

d) En quoi le travail de la propriété P est-il indispensable à la connaissance des nombres décimaux ?

La réponse se trouve directement dans le programme du cycle 3.

A propos de la compétence "Intercaler des nombres décimaux entre deux nombres entiers consécutifs ou entre deux nombres décimaux", il est dit : "ces activités permettent aux élèves de prendre conscience que la notion de nombres consécutifs, valable pour les nombres entiers, ne l'est plus pour les nombres décimaux : intercaler un nombre (décimal) entre deux nombres décimaux devient toujours possible. Ces questions d'intercalation peuvent également être l'occasion de rencontrer des nombres décimaux qui s'écrivent avec plus de trois chiffres dans leur partie décimale".

Une application importante de la propriété d'intercalation est l'approximation (plus tard, on dira qu'un nombre réel est un nombre qui possède un développement décimal, limité ou non ...) et l'élève doit également être confronté à cette notion, comme le stipule le programme avec la compétence "Donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au *1/10* ou au *1/100* près", pour lequel il est commenté : "La notion de valeur approchée fait l'objet d'un tout premier travail qui doit prendre sens pour l'élève, en relation avec un contexte issu de la vie courante, de la physique, de la géographie ... Par exemple, pour la monnaie, on n'utilise que des nombres avec deux décimales.

4) Les documents 1 et 2 présentent plusieurs méthodes pour comparer les nombres décimaux.

a) En revenant à la définition d'un nombre décimal, justifier ces deux méthodes.

La méthode par recours à la mise au format est proposée par la deuxième méthode du document 1. Il ne s'agit pas d'une procédure experte, mais d'une procédure qui permet de faire des liens entre la comparaison sur les décimaux et celle sur les entiers. Pour comparer deux décimaux donnés par leurs écritures à virgule, il s'agit de les mettre tous deux au même format (i.e. avec le même nombre de chiffres après la virgule en complétant au besoin les écritures à virgule par des *0*, à droite), puis de les comparer en omettant la virgule et en les considérant donc comme des entiers.

Remarque : l'élève a vu la définition d'un nombre décimal à partir des fractions décimales et n'est censé savoir comparer en fin de cycle 3 que des fractions ayant même dénominateur, la tâche qui leur est proposée dans cette procédure relève donc de ce type de comparaison puisque mettre deux nombres au même format revient à les exprimer tous deux en dixièmes, ou en centièmes, ... puis de comparer les numérateurs.

La méthode utilisant l'ordre lexicographique est mise en lumière dans la première méthode du document 1 et dans le document 2. Il s'agit d'une procédure experte. Pour comparer deux décimaux donnés par leurs écritures à virgule, il s'agit tout d'abord de comparer les parties entières, puis
si elles sont différentes de conclure que le nombre le plus grand est celui qui possède la plus grande partie entière
ou
si elles sont égales, de classer les parties décimales suivant l'ordre lexicographique (i.e. comme dans un dictionnaire) et de conclure que le nombre le plus petit est le premier dans l'ordre lexicographique (i.e. le premier dans le dictionnaire).
Remarque : cette procédure experte ne peut devenir acceptable pour l'élève qu'en donnant du sens à chacun des chiffres du développement décimal et en faisant le lien avec la méthode par recours à la mise au format.

b) Les exemples proposés dans les documents 1 et 2 vous semblent ils pertinents ? Justifier.

Première méthode du document 1.

Il faut comparer *7,25* et *7,3*. Pour comparer ces deux nombres, il suffit avec cette méthode de comparer les chiffres *2* et *3* et il n'est pas expliqué comment il faut faire pour comparer un chiffre et une absence de chiffre comme en comparant *7,25* et *7,2*, par exemple ou il faut comparer *5* et *" "* ; les nombres choisis cachent donc une difficulté de la méthode.

Deuxième méthode du document 1.

Il faut encore comparer *7,25* et *7,3*. Cette fois-ci, les nombres sont bien choisis puisqu'ils ne sont pas au même format.

Méthode du document 2.

Les nombres à comparer sont à chaque moment de l'explication au même format, et, de ce fait, l'élève peut les comparer en utilisant une méthode moins experte encore que celle de la mise au format en omettant simplement la "," de l'écriture décimale du nombre puis en comparant les entiers qui en résultent.

c) En vous inspirant des méthodes des documents 1 et 2, donner la règle de comparaison que vous proposeriez à vos élèves. Justifier votre choix.

Pour comparer des nombres décimaux écrits avec la virgule ...

Premier cas : les parties entières sont différentes. Alors, le nombre le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.
Deuxième cas : les parties entières sont égales. Alors, on compare les parties décimales chiffre par chiffre (celui des dixièmes de l'un avec celui des dixièmes de l'autre, celui des centièmes de l'un avec celui des centièmes de l'autre, ...) jusqu'à ce que ces chiffres soient différents (s'il n'existe pas de tels chiffres, les nombres sont égaux) et en tenant compte du fait qu'une absence de chiffre est traitée comme une présence du chiffre *0*. Le plus grand nombre est celui dont le chiffre est de rang le plus grand.

Pour le choix des nombres, je prendrais deux exemples : *12,345* et *12,4* puis *1,234* et *1,23*.

Sujet zéro (exercice 9)

1) Résoudre le problème suivant en utilisant une procédure algébrique.

Problème 1 : Depuis ce matin, un magasinier range sans interruption des caisses dans un entrepôt. Il a calculé que, s'il range *50* caisses à l'heure, il aura fini à *11* h *30*. Si par contre il en range *60* à l'heure, il aura fini à *11* h *15*. A quelle heure a-t-il commencé son travail ? Justifier la réponse.

Soit n le nombre de caisses que le magasinier doit ranger.

Le temps mis à la vitesse de *50* caisses à l'heure est donc : $t_1 = n/50$ (en heures).

Le temps mis à la vitesse de *60* caisses à l'heure est donc : $t_2 = n/60$ (en heures).

Cependant, $t_1 - t_2 = 11{,}5 - 11{,}25 = 0{,}25$ (toujours en heures). Et, on déduit l'équation $n/50 - n/60 = 0{,}25$. Celle-ci se résout facilement et on obtient $n = 75$.

Il s'ensuite que $t_1 = 1{,}5$ (en heures) et que $t_2 = 1{,}25$ (en heures) et que l'heure à laquelle il a commencé son travail est donnée soit par $11{,}5 - 1{,}5 = 10$ (en heures), soit par $11{,}25 - 1{,}25 = 10$ (en heures).

Conclusion : il a commencé à dix heures.

2) Utilisez le tableau de l'aide n°1 de l'annexe pour résoudre le problème 2 ci-dessous en explicitant votre procédure.

Problème 2 : Depuis ce matin, Alain et Bernard rangent sans interruption des caisses dans un entrepôt.

-Alain range *50* caisses à l'heure, il aura fini à *11* h *30*.
-Bernard range *60* caisses à l'heure, il aura fini à *11* h *15*.
Ils ont débuté le travail en même temps et doivent ranger chacun le même nombre de caisses. Ils travaillent régulièrement.

1. Combien de caisses chacun doit-il ranger ?
2. A quelle heure ont-ils commencé leur travail ? Justifier la réponse.

Je remplis tout d'abord le tableau de l'aide n°1 en utilisant le fait que le nombre de caisses remplies par l'un et l'autre est proportionnel au temps car "ils travaillent régulièrement". Pour remplir ce tableau de proportionnalité j'ai utilisé des relations multiplicatives et additives de linéarité (par exemple, si en une heure Alain range *50* caisses, alors en un quart d'heure, il range $50/4 = 12{,}5$ caisses et donc, en une heure et quart, il range $50 + 12{,}5 = 62{,}5$ caisses).

Une fois le tableau rempli, comme Bernard met un quart d'heure de moins qu'Alain, je cherche quand la valeur dans la colonne d'Alain à la ligne d'indice i est égale à celle dans la colonne de Bernard à la ligne d'indice $i - 1$. Je trouve donc que cette valeur est *75*, ce qui correspond à *1* h *30* de travail pour Alain et à *1* h *15* de travail pour Bernard.

Je déduis par soustraction qu'Alain et Bernard ont tous deux commencé à *10h*.

1. Combien de caisses chacun doit-il ranger ? Réponse : *75*.
2. A quelle heure ont-ils commencé leur travail ? Réponse : *10* h.

Questions complémentaires

Un maître de cycle 3 souhaite travailler avec ses élèves la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité. Dans cet objectif, il a prévu de leur proposer le problème 2. Lors de sa préparation de séance, il construit trois aides (voir en annexe).

3) Question concernant l'aide n°1.

a) Décrire mathématiquement deux procédures différentes qu'un élève de cycle 3 pourrait utiliser pour remplir la case correspondant au nombre de caisses rangées par Bernard en *1* h *30* min.

Soit t le temps de parcours et $f(t)$ le nombre de caisses rangées par l'un ou l'autre.

<u>Première procédure : utilisation de la propriété "multiplicative de linéarité".</u>

$f(1/2) = 1/2 \times f(1)$ ou, pour Alain, en une demi heure, il range $1/2 \times 50 = 25$ caisses ; puis, $f(3/2) = 3 \times f(1/2)$, ou, pour Alain, en une heure et demie, il range $3 \times 25 = 75$ caisses.
NB : directement, il était possible d'obtenir $f(3/2) = 3/2 \times f(1)$, ...

<u>Deuxième procédure : utilisation mixte des propriétés "multiplicative de linéarité" et "additive de linéarité".</u>

$f(1/2) = 1/2 \times f(1)$ ou, pour Alain, en une demi heure, il range $1/2 \times 50 = 25$ caisses ; puis, $f(3/2) = f(1) + f(1/2)$, ou, pour Alain, en une heure et demie, il range $50 + 25 = 75$ caisses.
NB : autrement, il était possible d'obtenir $f(3/2) = f(1/2) + f(1/2) + f(1/2)$, ...

b) En quoi ce tableau peut-il être une aide ?

Ce tableau permet de s'acquitter rapidement de tous les calculs multiplicatifs, et l'élève peut alors ensuite concentrer toute son attention sur la résolution du problème.

c) Après avoir rempli correctement le tableau, un élève conclut qu'on ne peut pas donner le nombre de caisses rangées par Alain et Bernard car il y a plusieurs réponses possibles. Faites une (des) hypothèse(s) sur la nature de l'erreur de cet élève pouvant expliquer sa réponse.

Peut-être l'élève a-t-il simplement repéré qu'Alain et Bernard ont rangé le même nombre de caisses sans tenir compte de l'écart de temps pour accomplir cette tâche. Sous cette hypothèse, dans le tableau, il a pu repérer le *0*, le *75* et le *150* et ne peut pas conclure.

A l'inverse, mais moins probablement, l'élève n'a pas tenu compte du fait qu'Alain et Bernard ont rangé le même nombre de boîtes et a considéré qu'Alain rangeait les caisses en un quart d'heure de plus que Bernard. Sous cette hypothèse, Alain peut par exemple ranger *25* caisses pendant que Bernard en range *15*.

4) Question concernant l'aide n°2.

Compléter ce tableau.

Mettre une croix dans les cases qui conviennent

	VRAI	FAUX	Je ne sais pas répondre	Justification
Au bout de 2 h, Alain aura rangé 100 caisses.	X			Propriété multiplicative de linéarité : 2 x 50 = 100
Au bout de 3 h, Alain aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h multiplié par 3	X			Propriété multiplicative de linéarité sur l'exemple de 3 h
On ne sait pas exactement combien Alain aura rangé de caisses au bout de 15 min		X		Au bout de 15 min, il aura rangé 12,5 caisses (il a donc rangé 12 caisses entières, mais s'agissant d'une situation de proportionnalité, la valeur non entière 12,5 a du sens).
Au bout de 45 min, Alain aura rangé 37 caisses	X			Il en aura même rangé 37,5
Au bout de 2 h, Bernard aura rangé 120 caisses (60 x 2)	X			Propriété multiplicative de linéarité : 2 x 60 = 120
Au bout de 15 min, Bernard aura rangé 10 caisses	X			Il en aura même rangé 15
Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h auquel on ajoute le nombre de caisses qu'il range en 45 min	X			Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1h auquel on ajoute le nombre de caisses qu'il range en 45 min

5) Question concernant l'aide n°3.

En quoi l'aide n°3 modifie-t-elle la tâche de l'élève ?

Le nouveau problème proposé dans l'aide n°3 se réduit au traitement direct d'une situation de proportionnalité, alors que le problème d'origine est plus complexe (par exemple, le problème d'origine demande en plus d'aller chercher dans les données l'écart de temps mis par Alain et Bernard). Cette aide peut probablement inviter l'élève à construire un tableau qui serait réutilisable par la suite. Cependant, il est à déplorer que ce nouveau problème suggère directement la réponse à la question 2 du problème d'origine, i.e. *10* h (pour résoudre le problème d'origine, il ne reste plus qu'à l'élève de constater qu'Alain et Bernard ont effectivement commencé à *10* h pour ranger chacun *75* caisses). Ceci risque d'aider l'élève à résoudre le problème d'origine sans pour autant l'aider à résoudre d'autres problèmes du même type.

6) Question concernant les trois aides.

D'après vous, quelle(s) aides(s) le maître devrait-il privilégier pour respecter l'objectif de sa séance ? Justifier.

La seule aide qui me semble intéressante est la n°1.

A. La n°2 soulève des questions inutiles pour résoudre le problème :

i. les questions posent indirectement la question "Peut-on s'intéresser à des nombres de caisses qui ne soient pas entiers ?" ("Au bout de 45 min, Alain aura rangé *37* caisses" pose la question : "Dois-je dire *37* ou *37,5* ?")

si oui, "Quel sens donne-t-on à ranger une demi caisse ?"
si non, on renonce à faire de la situation une situation de proportionnalité alors que la situation est définie par un coefficient de proportionnalité : "*50* caisses à l'heure"

ii. également, les questions posent le problème du "qui peut le plus peut le moins" (pour la question "Au bout de *15* min, Bernard aura rangé *10* caisses", un élève peut avoir envie de dire que c'est faux puisqu'il en a rangé *15*, alors que s'il en a rangé *15*, il en a aussi rangé *10*).

B. La n°3 donne la réponse au problème et n'aide donc pas l'élève à chercher une solution à ce problème (voir question 5).

C. Enfin, la n°1 donne un tableau permettant de synthétiser partiellement le problème sans en fournir directement la solution.

7) Pendant la séance, un élève a testé plusieurs heures de début possible du rangement : il a essayé successivement *8*h, *9*h, puis *10*h. Il a ainsi rapidement résolu le problème 2. Le maître n'avait pas envisagé cette procédure : pourquoi lui pose-t-elle problème ? Comment aurait-il pu la rendre moins efficace ?

Cette solution pose problème au maître car l'élève a obtenu une solution rapide et efficace par tâtonnement sans avoir même eu à réfléchir sur la manière de tâtonner. Le tâtonnement est souvent une méthode efficace à l'école (et même plus tard au collège, au lycée, ...) et il ne faut pas non plus totalement la refouler.

Le maître aurait pu rendre le tâtonnement moins efficace en proposant le problème initial décalé d'un quart d'heure (ou d'une demi-heure, ...), ce qui n'en modifierait pas la complexité (puisque l'écart de temps n'a pas varié) :

Problème 2' : Depuis ce matin, Alain et Bernard rangent sans interruption des caisses dans un entrepôt.

-Alain range *50* caisses à l'heure, il aura fini à *11* h *15*.
-Bernard range *60* caisses à l'heure, il aura fini à *11* h *00*.
Ils ont débuté le travail en même temps et doivent ranger chacun le même nombre de caisses. Ils travaillent régulièrement.

Pour ce problème 2', l'élève qui tâtonne ne peut plus se contenter d'un tâtonnement usuel sur les entiers (par exemple, *8*, *9* et *10*) et doit alors commencer à réfléchir sur l'organisation de ses essais pour atteindre la solution correcte.

Sujet zéro (exercice 10)

Définition d'un carré magique

Un carré magique *3 x 3* est rempli avec les nombres de *1* à *9* utilisés une seule fois de telle manière que la somme des *3* nombres écrits sur chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même.

1) Compléter chaque case de la grille ci-dessous pour obtenir un carré magique (à recopier sur la copie).

	5	

Il est donné ci-dessous un carré magique, sans justification de construction car celle-ci est l'objet des questions à venir.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2) Dans le carré magique 3×3, justifiez le fait que la somme des nombres de chaque ligne soit toujours égale à 15 et que la somme des nombres de chaque colonne soit toujours égale à 15. On utilisera les notations proposées dans le tableau ci-dessous.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

On appelle N la somme des éléments disposés sur une ligne (qui est aussi la somme des éléments disposés sur une colonne ou sur une diagonale). On a alors $a + b + c = N$ (ligne), $d + e + f = N$ (ligne) et $g + h + i = N$ (ligne), donc $(a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) = 3 \times N$. Il s'ensuit, comme $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, que $3 \times N = 45$ ou encore $N = 15$.

3) En additionnant les nombres de la ligne centrale avec ceux de la colonne centrale et ceux des deux diagonales, déduire que la case centrale est toujours occupé par le nombre 5. On utilisera les notations proposées dans le tableau ci-dessous.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Dans cette question, on utilise sans cesse la conclusion de la question 2.

On a $d + e + f = 15$ (ligne centrale), $b + e + h = 15$ (colonne centrale), $a + e + i = 15$ (diagonale), $g + e + c = 15$ (diagonale), donc $(d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (g + e + c)= 4 \times 15$. Il s'ensuit que $(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3 \times e = 4 \times 15$, puis, comme $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, on obtient $3 \times e = 15$ ou encore $e = 5$.

4) Montrer que $a + i = 10$. Énoncer les trois autres égalités du même type.

On a $a + e + i = 15$ (diagonale), et comme $e = 5$ d'après la question 3, on a directement $a + i = 10$. De même, on aurait $b + h = 10$, $c + g = 10$ et $d + f = 10$.

5) En vous aidant des propriétés énoncées dans les questions 3 et 4, proposer quatre autres carrés magiques.

Les huit carrés magiques possibles sont les suivants. Le fait qu'il n'existe que huit carrés magiques 3×3 est détaillé à la question 6.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6) Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) du plan peut-on utiliser pour trouver tous les carrés magiques à partir d'un seul ?

L'expression "tous les carrés magiques" induit qu'il faut montrer qu'il n'existe que huit carrés magiques *3 x 3*. Les huit carrés magiques définis dans la question précédente sont les seuls possibles en plaçant le "*8*" dans un coin.

A partir d'un "*8*" placé dans un coin, on ne peut construire que deux carrés magiques *3 x 3*. En effet, le "*5*" étant placé au centre du carré, une fois le "*8*" placé dans un coin, le "*2*" s'impose dans le coin opposé. Puis, ni le "*7*", ni le "*9*" ne peuvent se trouver sur la même ligne ou sur la même colonne que le "*8*", car sinon, la somme des éléments de cette ligne ou de cette colonne excèderait *15*. Ainsi, les "*7*" et "*9*" n'ont que deux places possibles et chacun des deux choix définit une solution (ces solutions sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la diagonale comportant le "*8*") : le "*3*" s'oppose au "*7*" sur la colonne ou la ligne de ce "*7*" ; le "*1*" s'oppose au "*9*" sur la colonne ou la ligne de ce "*9*" ; le "*4*" se place sur la même ligne ou colonne que le "*8*" et le "*3*" ; et, le "*6*" se place sur la même ligne ou colonne que le "*8*" et le "*1*".

En plaçant le "*8*" ailleurs que dans un coin, il n'est pas possible de construire un carré magique *3 x 3*. Le "*5*" étant placé au centre du carré, une fois le "*8*" placé ailleurs que dans un coin, le "*2*" s'impose sur la même ligne ou colonne que le "*8*" et le "*5*". Il reste alors à déterminer deux autres cases adjacentes au "*8*", qui sont soit "*1* et "*6*", soit "*3*" et "*4*" (car les éléments placés sur la ligne ou colonne comportant le "*8*" mais pas le "*5*" doivent avoir une somme égale à *15*, comme $15 = 8 + 1 + 6$ $(= 8 + 2 + 5) = 8 + 3 + 4$).
Premier cas : les deux autres cases adjacentes au "*8*" sont "*1* et "*6*". Dans le coin opposé au "*1*", on est donc contraint à placer le "*9*", mais alors les "*6*" et "*9*" sont placés sur la même ligne ou colonne, ce qui est impossible.
Deuxième cas : les deux autres cases adjacentes au "*8*" sont "*3* et "*4*". Dans le coin opposé au "*3*", on est donc contraint à placer le "*7*", mais alors les "*7*" et "*8*" sont placés sur la même ligne ou colonne, ce qui est impossible.

Les huit carrés magiques se déduisent à partir d'un particulier en utilisant les isométries du carré. Il suffit maintenant de le constater !

Rappel : les huit isométries du carré sont :
- l'identité ;
- la symétrie centrale de centre le centre du carré ;
- la rotation de centre le centre du carré et d'angle *90°* ou *-90°* ;
- la symétrie orthogonale par rapport à l'une ou l'autre des deux diagonales du carré ;
- la symétrie orthogonale par rapport à l'une ou l'autre des deux médianes du carré.

Questions complémentaires

7) On peut envisager trois objectifs différents pour un enseignant mettant en oeuvre cette séquence : (annexe1)

- Proposer à ses élèves un problème de recherche ;
- Renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction ;
- Entraîner ses élèves au calcul.

Discuter la pertinence de l'utilisation de la calculatrice selon l'objectif prioritaire de l'enseignant qui propose cette séquence.

Cette séance est présentée à des élèves de cycle 3. Les calculs additifs ne présentent donc aucune difficulté pour les élèves. Mais alors, en quoi la calculatrice peut-elle être utile ? Ce doit être pour calculer

- la somme des nombres *1*, *2*, ... *9* à diviser par *3* pour la recherche A ;
- la somme des nombres *1*, *2*, ... *16* à diviser par *4* pour la recherche C ;
- ou encore des soustractions du type *34 - 13 - 10 - 7*, ... pour la recherche C.

En tout cas, si l'objectif est de proposer un problème de recherche aux élèves (pour les recherches A et C), l'usage de la calculatrice est louable car il permet aux élèves de se dégager partiellement de la partie calculatoire pour se concentrer réellement sur la résolution du problème.

Si l'objectif est de renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction (pour la recherche C), l'usage de la calculatrice semble assez inintéressant :

- le sens "enlever" : sur la diagonale, je dois avoir une somme égale à *34*, mais j'ai déjà *13*, *10* et *7*, donc le nombre absent doit être *34 - 13 - 10 - 7 = 4* (calculs successifs : *34 - 13 = 21* ; *21 - 10 = 11* ; *11 - 7 = 4*). Le sens "enlever" est celui qui est attaché à l'usage du signe "-" de la calculatrice.
- le sens "pour aller à" :
a) sur la diagonale, j'ai *13 + 10 + 7 = 30*, pour aller à *34*, il manque donc "quelque chose". Pour trouver le "quelque chose", l'élève peut utiliser la soustraction (*34 - 30*), surcompter (*31, 32, 33, 34*), s'aider de la bande numérique (*1* en pointant *31*, *2* en pointant *32* ... et *4* en pointant *34*) ou ... alors qu'avec la calculatrice, il est contraint d'utiliser le signe "-".
b) sur la première ligne, j'ai *1 + 14 + 4 = 19*, pour aller à *34*, il manque donc "quelque chose". Pour trouver le "quelque chose", l'élève peut utiliser la soustraction (*34 - 19*), surcompter (*19, 20, ..., 34*, mais c'est long), s'aider de la bande numérique (*1* en pointant *20*, *2* en pointant *21* ... et *15* en pointant *34*), faire des sauts successifs (*19* pour aller à *20* : *1* ; *20* pour aller à *30* : *10* ; *30* pour aller à *34* : *4*, donc *19* pour aller à *34* : *1 + 10 + 4 = 15*) ou ... alors qu'avec la calculatrice, il est encore contraint d'utiliser le signe "-".
- le sens "écart" : sur la première ligne, je cherche l'écart entre *1 + 14 + 4 = 19*, et *34*, cet écart est le même qu'entre *19 - 9 = 10* et *34 - 9 = 25*, c'est-à-dire *15* : une dizaine et cinq unités. Avec la calculatrice, l'élève n'est pas invité à construire une procédure de calcul et n'a pas besoin de porter sa réflexion sur le sens "écart" de la soustraction.
En conclusion, les divers sens de la soustraction sont bien mieux mis en valeur sans la calculatrice.

Si l'objectif est d'entraîner ses élèves au calcul, la calculatrice ne peut être d'aucune aide si on entend par "entraîner au calcul" : "entraîner au calcul mental".

8) Analyser la phase collective de la recherche A proposée aux élèves :

a) Qu'est-ce que ce moment apporte dans la séance ?

Pour l'élève qui n'aurait pas de solution ("juste"), la phase collective lui en apporte une (et même deux).

Pour l'élève qui aurait trouvé une solution ("juste"), la phase collective lui permet de constater qu'il n'existe pas une seule solution à ce problème, ce qui va peut-être le motiver à en chercher encore d'autres.

D'autre part, au niveau de la procédure de construction d'un carré magique *3 x 3*, l'élève va comprendre (même si ce n'est pas démontré avec les élèves) :

- qu'il faut placer le *5* en le centre du carré ;
- que *1, 9* et *5* ; *2, 8* et *5* ; *3, 7* et *5* ; et *4, 6* et *5* sont alignés.

Ceci va aider les élèves dans la recherche d'autres carrés magiques.

b) L'enseignant choisit de ne proposer que des "bonnes solutions" ; il aurait pu à ce stade choisir de présenter aux élèves des carrés magiques et d'autres non magiques, pour les faire étudier et valider par la classe. Qu'apporterait cette nouvelle modalité pour la phase collective ?

Cette nouvelle modalité comporte un retour sur la définition d'un carré magique. Ceci permettrait de voir que pour obtenir un carré magique, il est nécessaire de prendre en compte <u>toutes les conditions</u> :

- un élève qui aurait proposé le carré

8	1	6
4	9	2
3	5	7

peut avoir oublié de prendre en compte la nécessité d'avoir également la même somme sur les diagonales, ...

Entre autres, ceci permet à un élève qui n'a pas trouvé de solution ("juste") de ne pas continuer à chercher pourquoi sa solution n'est pas "juste" et de poursuivre la séance sans retard.

9) Déterminer la (ou les) difficulté(s) supplémentaire(s) que va rencontrer l'élève dans la recherche C par rapport à la recherche A. Que pourrait-on proposer pour faciliter la tâche des élèves dans cette recherche C ?

i. Un carré magique *4 x 4* n'est pas défini. Est-ce à l'élève de prolonger la définition d'un carré magique *3 x 3* ? On pourrait donner la définition d'un carré *4 x 4* : il est rempli avec les nombres de *1* à *16* utilisés une seule fois de telle manière que la somme des *4* nombres écrits sur chacune des quatre lignes, des quatre colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même.

ii. Dans la recherche C, les calculs sont plus complexes (les soustractions sont longues et nombreuses). On pourrait proposer aux élèves d'utiliser la calculatrice (voir question 7).

NB : on pourrait aussi prévoir d'autres aides :

donner la somme *34* commune aux lignes, colonnes, diagonales ; ou proposer une question auxiliaire qui permettrait de le déduire ... ;
organiser chronologiquement la tâche des élèves ... ;
...

Une chronologie possible :

En utilisant la première colonne et l'une des diagonales.

1		14	4
12		7	
8	10		
13			16

En utilisant la première ligne.

1		14	4
12		7	
8	10		
13			16

La dernière ligne présente 13 et 16, pour aller à 34, il manque donc 5, qui ne peut être que 2 + 3 car le 1 est déjà utilisé. Donc, 2 et 3 sont sur la dernière ligne.

Utilisation de la troisième colonne. Premier essai non concluant car le 10 est présent à deux reprises.

1	15	14	4
12		7	
8	10	10	
13	2	3	16

Utilisation de la troisième colonne. Deuxième essai concluant, a priori.

1	15	14	4
12		7	
8	10	11	
13	3	2	16

En utilisant la deuxième colonne et la troisième ligne.

1	15	14	4
12	6	7	
8	10	11	5
13	3	2	16

En utilisant la deuxième ligne.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16