

Sujet de Créteil, Paris, Versailles, 1999.

Réponses

1. A quel niveau de classe peut-on présenter les activités des annexes 1 et 2 ?

L'apprentissage des décimaux se situe au cycle 3, introduit usuellement en CM1. L'enseignement se dirige progressivement vers la maîtrise de l'ordre des décimaux. Il s'agit donc ici plus probablement de séances présentées en CM2.

2. Expliquez comment les seules règles de comparaison sur les nombres entiers peuvent permettre à un élève de donner une réponse juste dans l'annexe 2.

Pour cette séance, il suffit de traduire en centimètres les données en mètres. Une simple conversion des mesures permet ici d'obtenir des données entières qui peuvent être comparées aisément.

3a. Dans les annexes 1 et 2, quelles sont les variables susceptibles d'avoir un effet sur les réussites et les procédures des élèves ?

Annexe 1

1. Mélange d'écritures à virgule et fractionnaires. L'élève doit alors réfléchir sur le sens de chacune des deux écritures pour pouvoir comparer les nombres (quitte à tous les convertir en écriture à virgule pour faciliter la comparaison).

2. Le nombre de chiffres après la virgule varie d'un nombre à l'autre (jusqu'à trois chiffres). L'élève ne peut alors facilement se ramener à la comparaison d'entiers et doit alors, pour ce faire, avoir recours à la mise au format (les coder tous avec trois chiffres après la virgule en complétant au besoin les écritures à virgule par des 0, à droite) des décimaux avant de les comparer.

3. La présence du segment $[4,7]$ gradué. Il permet de visualiser les nombres qui pourront alors être rangés selon l'ordre induit par le segment gradué (plus les nombres sont proches de 4 sur ce segment, plus ils sont petits).

3a. Présence de nombres qui vont se retrouver quasiment confondus sur ce segment (exemple $6,1$ et $6,101$). L'élève doit alors encore réfléchir pour classer ces nombres. Les nombres proposés possèdent quelquefois trois chiffres après la virgule et certaines décimales n'ont alors plus aucun sens sur le segment gradué, au vu de l'échelle de représentation.

3b. Les nombres sont tous représentables sur le segment $[4,7]$ gradué (ils sont tous compris entre 4 et 7). L'élève ne doit pas apprendre à construire de lui-même des aides (schémas) pour comparer ces décimaux.

3c. Le nombre de nombres à classer (douze) est suffisamment important pour que les élèves ne puissent se contenter de comparer les décimaux deux à deux, les invitant ainsi à avoir recours au segment $[4,7]$ gradué.

Annexe 2

1. Seules des écritures à virgule sont présentées.

2. Le nombre de chiffres après la virgule est globalement fixe (exception faite du 3, les décimaux présentés sont déjà tous au même format, i.e. tous avec deux chiffres après la virgule).

3. Les nombres sont présentés dans un tableau à double entrée qu'il faut avoir bien compris pour pouvoir répondre aux questions posées (d'abord relever le plus grand décimal dans chaque colonne, puis classer les quatre décimaux ainsi relevés du plus grand au plus petit).

3b. Dans l'annexe 1, expliquez en quoi les choix de ces variables font que les règles de comparaison sur les nombres entiers évoquées dans la question précédente ne suffisent pas.

Le nombre de chiffres après le virgule varie d'un nombre à l'autre (jusqu'à trois chiffres). L'élève ne peut alors facilement se ramener à la comparaison d'entiers et doit alors, pour ce faire, avoir recours à la mise au format (les coder tous avec trois chiffres après la virgule en complétant au besoin les écritures à virgule par des 0, à droite) des décimaux avant de les comparer.

4. Laquelle de ces annexes vous paraît la mieux adaptée pour une situation de départ concernant la comparaison des nombres décimaux ? Justifiez votre réponse.

L'annexe 1 présente un document qui est probablement plus adapté à l'introduction de la notion d'ordre des décimaux. En effet,

l'annexe 1 présente une grande variété de procédures,

l'annexe 1 permet de travailler sur différentes représentations des décimaux (écriture à virgule, fractionnaire, représentation sur un segment gradué),

l'annexe 2 fait plutôt travailler l'ordre des entiers que l'ordre des décimaux, alors que ces deux notions d'ordre doivent être dissociées (voir propriété d'intercalation plus bas, à la question 7).

5. Dans la mise en oeuvre de l'annexe 1, comment le maître peut-il aider les élèves dans leur recherche ?

Dans la phase d'appropriation ... Relire l'énoncé en mettant l'accent sur les points importants (présence du segment gradué pour aider au rangement des décimaux, ...).

Pour des élèves qui auraient du mal à "rentrer dans le sujet", ... Organiser chronologiquement les différentes tâches des élèves (d'abord convertir toutes les écritures en écritures à virgule, puis s'intéresser aux nombres dont la partie entière est 4, ...).

Pour des élèves qui auraient bien compris le problème et qui montreraient quelques difficultés d'ordre mathématique ... Aider à la comparaison en proposant tantôt la technique de la mise au format, tantôt l'utilisation de l'ordre lexicographique, selon l'intention de l'élève.

6a. Les annexes 3 et 4 présentent plusieurs méthodes pour comparer les nombres décimaux. Quelles critiques pouvez-vous en faire ?

La méthode par recours à la mise au format est proposée par la deuxième méthode de l'annexe 3. Il ne s'agit pas d'une procédure experte, mais d'une procédure qui permet de faire des liens entre la comparaison sur les décimaux et celle sur les entiers. Pour comparer deux décimaux donnés par leurs écritures à virgule, il s'agit de les mettre tous deux au même format (i.e. avec le même nombre de chiffres après la virgule en complétant au besoin les écritures à virgule par des 0, à droite), puis de les comparer en omettant la virgule et en les considérant donc comme des entiers.

Critique de la méthode : cette méthode qui n'est pas experte peut être lourde de manière générale (par exemple pour comparer 4,781 et 5,98, il n'est pas utile d'utiliser la mise au format puisque la comparaison des parties entières suffit à conclure).

La méthode utilisant l'ordre lexicographique est mise en lumière dans la première méthode de l'annexe 3 et dans l'annexe 4. Il s'agit d'une procédure experte. Pour comparer deux décimaux donnés par leurs écritures à virgule, il s'agit tout d'abord de comparer les parties entières, puis

si elles sont différentes de conclure que le nombre le plus grand est celui qui possède la plus grande partie entière

ou

si elles sont égales, de classer les parties décimales suivant l'ordre lexicographique (i.e. comme dans un dictionnaire) et de conclure que le nombre le plus petit est le premier dans l'ordre lexicographique (i.e. le premier dans le dictionnaire).

Critique sur la première méthode de l'annexe 3 : l'explication de la notion d'ordre lexicographique est correctement détaillée (bien qu'il reste la question de traiter le *rien* comme un 0 pour comparer, par exemple, 7,25 et 7,2 et où l'on est amené à comparer un 5 et un 0 qui n'est pas écrit).

Critique sur l'annexe 4 : l'explication de la notion d'ordre lexicographique ne semble pas très claire (Quel est le sens du *Ou* dans la partie **J'observe** ? Il semble que ce soit le *Ou* d'une disjonction de cas, ce qui n'est pas son sens habituel. La partie **Je retiens** est présente pour expliquer la partie **J'observe**, mais certaines phrases n'ont pas de conclusion : on sait ce qu'on va comparer, mais on ne sait pas pour quoi faire).

6b. Quelle règle proposeriez-vous à vos élèves ?

En tenant compte des critiques émises dans la question précédente, je proposerais ...

Pour comparer des nombres décimaux écrits avec la virgule ...

Premier cas : les parties entières sont différentes. Alors, le nombre le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.

Deuxième cas : les parties entières sont égales. Alors, on compare les parties décimales chiffre par chiffre (celui des dixièmes de l'un avec celui des dixièmes de l'autre, celui des centièmes de l'un avec celui des centièmes de l'autre, ...) jusqu'à ce que ces chiffres soient différents (s'il n'existe pas de tels chiffres, les nombres sont égaux) et en tenant compte du fait qu'une absence de chiffre est traitée comme une présence du chiffre 0. Le plus grand nombre est celui dont le chiffre est de rang le plus grand.

Pour le choix des nombres, je prendrais deux exemples : 12,345 et 12,4 puis 1,234 et 1,23.

7. On considère l'exercice suivant :

Trouvez un nombre compris entre

8,4 et 8,7

10,1 et 10,2

25 et 25,1

7 et 7,01

7a. Quelle propriété de l'ensemble des nombres décimaux ce type d'exercice permet-il de travailler ?

Il s'agit de la propriété d'intercalation des décimaux : entre deux nombres décimaux, il existe toujours un (et même une infinité) autre nombre décimal. Cette propriété n'est évidemment plus valable si l'on remplace nombre décimal par nombre entier.

7b. Expliquez pourquoi le choix des valeurs numériques est important dans ce type d'exercice.

Le choix des valeurs influe sur la difficulté de la tâche. Voici les différentes actions implicitement utilisées pour résoudre un tel exercice.

8,4 et 8,7 P_1 [$84 < 85 < 87$] d'où 8,5 convient.

10,1 et 10,2 P_1 [il n'existe pas d'entier entre 101 et 102] P_2 [traiter 10,1 comme 10,10 et 10,2 comme 10,20] P_1 [1010 < 1015 < 1020] d'où 10,15 convient.

25 et 25,1 P_0 [traiter 25 comme 25,0] P_1 [il n'existe pas d'entier entre 250 et 251] P_2 [traiter 25 comme 25,00 et 25,1 comme 25,10] P_1 [2500 < 2505 < 2510] d'où 25,05 convient.

7 et 7,01 P_0 [traiter 7 comme 7,00] P_1 [il n'existe pas d'entier entre 700 et 701] P_2 [traiter 7 comme 7,000 et 7,01 comme 7,010] P_1 [7000 < 7005 < 7010] d'où 70,05 convient.

Avec

Procédure P_0 : mettre au même format les décimaux.

Procédure P_1 : considérer les décimaux en omettant la virgule, c'est-à-dire comme des entiers, trouver un entier compris entre ces deux entiers, et placer dans cet entier trouvé la virgule au bon endroit.

Procédure P_1 : considérer que la procédure P1 ne peut fonctionner et qu'il faut la perfectionner.

Procédure P_2 : l'actuel format ne convenant pas, on utilise alors les zéros non écrits de l'écriture à virgule.

On peut alors constater un accroissement de la difficulté au cours de la séance au regard du nombre de procédures à mettre en oeuvre.