Exercice [Nancy, Metz, Reims, Strasbourg, 2001]

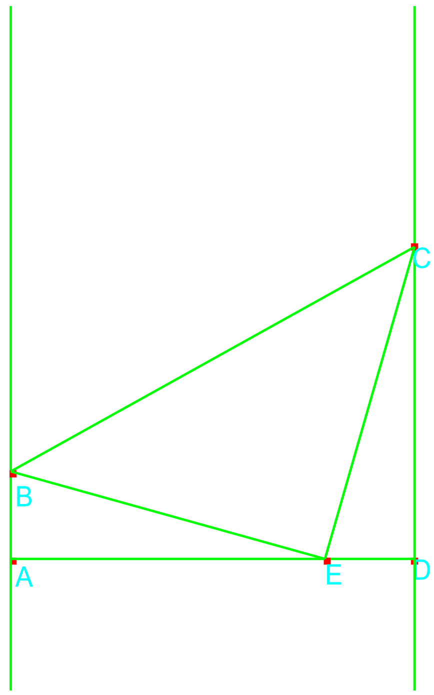
Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = a$, $CD = b$, $AD = a + b$.

Soit E un point du segment $[AD]$ tel que $AE = b$ et $ED = a$. On pose $BE = c$.

1. Démontrer que l'angle $\widehat{BEC}$ est droit. En déduire la nature précise du triangle BEC.
2. Calculer de deux manières différentes l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de a, b, ou c.
3. Retrouver ainsi une démonstration du théorème de Pythagore.

Solution [Nancy, Metz, Reims, Strasbourg, 2001]

Je commence par tracer la figure !



1. Démontrer que l'angle $\widehat{BEC}$ est droit. En déduire la nature précise du triangle BEC.

Je commence par montrer que les triangles ABE et DEC sont isométriques.

a) $AB = DE = a$;
b) $AE = DC = b$;
c) les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{CDE}$ sont droits (car $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D).

D'après les points a), b), et c), les triangles ABE et DEC sont isométriques (ils ont en commun un angle et deux mesures de côtés).

Je déduis que les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{DEC}$ sont égaux et qu'il en est de même pour les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{ECD}$. Cependant, en considérant le triangle ABE rectangle en A, j'obtiens que les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{AEB}$ sont complémentaires. Il en est donc de même des angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{DEC}$. Or, je sais que l'angle $\widehat{AED}$ est plat (car E appartient au segment $[AD]$), j'en déduis donc, que l'angle $\widehat{BEC}$ est droit (car $\widehat{AED} = \widehat{AEB} + \widehat{BEC} + \widehat{CED}$). Puis, le triangle BEC est rectangle en E.

Du fait que les triangles ABE et DEC sont isométriques, je déduis également que $BE = EC = c$. Le triangle BEC est donc isocèle en E.

En conclusion, le triangle BEC est isocèle rectangle en E.

2. Calculer de deux manières différentes l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de a, b, ou c.

J'utilise d'une part le trapèze et d'autre part la découpe de ce trapèze en trois triangles.

$Aire(ABCD) = ((AB + CD) \times AD)/2 = ((a+b)^2)/2$.

$Aire(ABCD) = Aire(AEB) + Aire(BEC) + Aire(DEC) = (AE \times AB)/2 + (EB \times EC)/2 + (DE \times DC)/2$ $= (b \times a)/2 + (c \times c)/2 + (a \times b)/2 = a \times b + (c^2)/2$.

3. Retrouver ainsi une démonstration du théorème de Pythagore.

Il me suffit d'utiliser les résultats précédents.

J'obtiens l'égalité suivante : $((a+b)^2)/2 = a \times b + (c^2)/2$.

Puis, $a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = 2 \times a \times b + c^2$.

Et enfin, $a^2 + b^2 = c^2$.

Par suite, dans un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent respectivement a et b et dont l'hypoténuse mesure c (on peut citer en exemple le triangle ABE rectangle en A ou le triangle CDE rectangle en D), j'ai $a^2 + b^2 = c^2$. C'est le théorème de Pythagore.

Exercice [Lyon, Grenoble, 1999]

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit O le centre du parallélogramme $ABCD$. Soit E tel que A soit le milieu du segment $[ED]$. Soit F le point d'intersection des droites (AB) et (OE).

1. Démontrer $AF = AB/3$ (on pourra utiliser le triangle BDE).

La parallèle à (BD) passant par F coupe la droite (AC) en I et la droite (AD) en H.

2. Calculer les rapports AH/AD et AI/AC.

Soit R le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AR = 4 \times AB/3$.

Soit S le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AS = 4 \times AC/3$.

Soit T le point de la demi-droite $[AD)$ tel que $AT = 4 \times AD/3$.

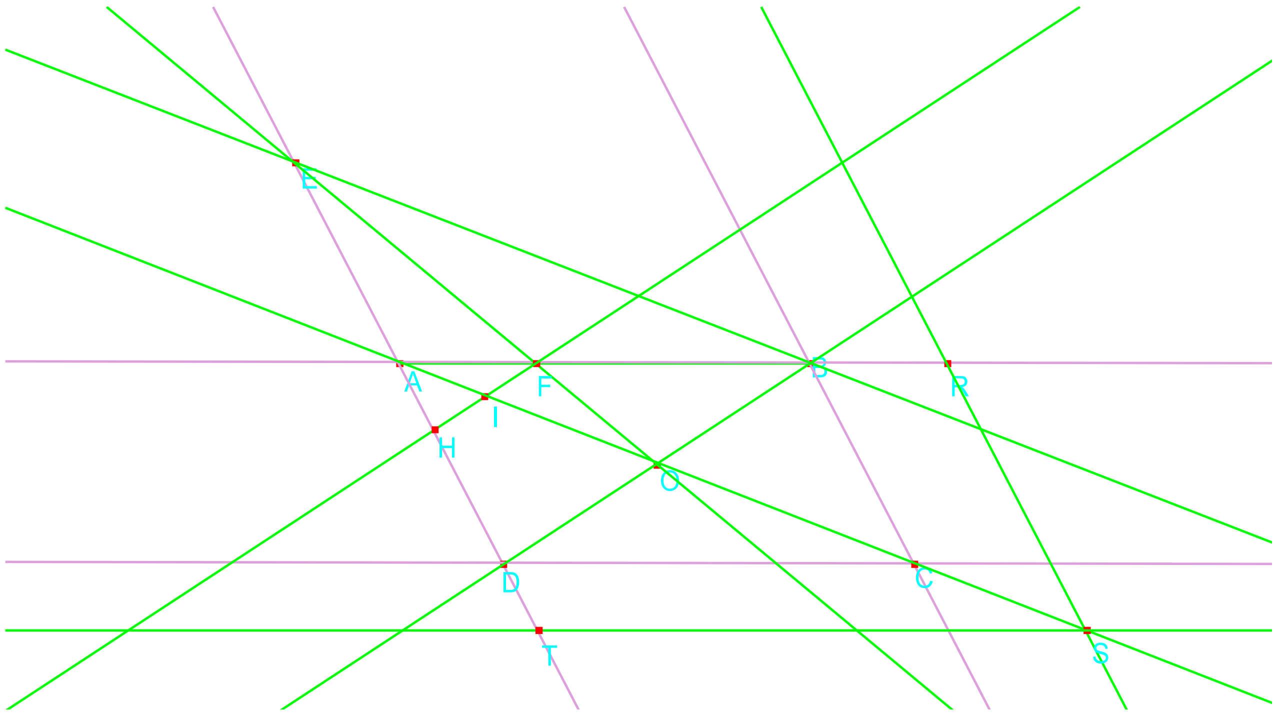
3. Placer R, S et T à la règle non graduée et au compas en explicitant le procédé utilisé.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $ARST$?

5. Exprimer l'aire du quadrilatère $ARST$ en fonction de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Solution [Lyon, Grenoble, 1999]

Je trace la figure ...



1. Démontrer $AF = AB/3$ (on pourra utiliser le triangle BDE).

Je sais que O est milieu du segment $[BD]$ (car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu), donc [EO] est une médiane du triangle BDE. A est milieu du segment $[ED]$, donc $[AB]$ est une médiane du triangle BDE. Par conséquent, F est centre de gravité du triangle (F est intersection de deux médianes) et $AF = AB/3$ (propriété du centre de gravité).

2. Calculer les rapports AH/AD et AI/AC.

J'utilise le théorème de Thalès avec les sécantes (AB) et (AD) et les parallèles (HF) et (DB). J'obtiens alors $AH/AD = AF/AB$ $[= HF/DB]$, puis $AH/AD = 1/3$ (d'après la question 1).

J'utilise une nouvelle fois le théorème de Thalès avec les sécantes (AB) et (AO) et les parallèles (IF) et (OB). J'obtiens alors $AI/AO = AF/AB$ $[= IF/OB]$, puis $AI/AO = 1/3$ (d'après la question 1). Cependant, O est milieu du segment $[AC]$ (car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu), et $AO/AC = 1/2$, puis $AI/AC = AI/AO \times AO/AC = 1/3 \times 1/2 = 1/6$.

3. Placer R, S et T à la règle non graduée et au compas en explicitant le procédé utilisé.

Pour la construction également, je vais utiliser le théorème de Thalès.

Pour construire le point R, je n'ai pas besoin d'utiliser le théorème de Thalès. Je trace un cercle de centre B et de rayon AF. Ce cercle coupe la droite (AB) en deux points et je baptise R celui qui n'appartient pas au segment $[AB]$ (je pourrais vérifier que $AR = 4/3 \times AB$ car $AR = AB + BR = AB + AF = AB + 1/3 \times AB = 4/3 \times AB$).

Pour construire le point S, je trace une parallèle à la droite (BC) passant par le point R (*) qui coupe la droite (AC) en S (par le théorème de Thalès en utilisant les sécantes (AB) et (AC) et les parallèles (BC) et (RS), j'obtiens que $AB/AR = AC/AS$ $[= BC/RS]$, puis $AS = 4/3 \times AC$.

Pour construire le point T, je trace une parallèle à la droite (DC) passant par le point S (*) qui coupe la droite (AD) en T (par le théorème de Thalès en utilisant les sécantes (AC) et (AD) et les parallèles (DC) et (TS), j'obtiens que $AD/AT = AC/AS$ $[= DC/TS]$, puis $AT = 4/3 \times AD$.

(*) Technique de tracé d'une parallèle à une droite (AB) passant par un point C donné : par exemple, je trace le cercle C_1 de centre B et de rayon AC ; je trace le cercle C_2 de centre C et de rayon AB ; les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points dont l'un, D, tel que le quadrilatère $ABDC$ ne soit pas croisé ; le quadrilatère $ABDC$ est alors un parallélogramme et la droite (CD) est parallèle à la droite (AB) et passe par le point C ; cette technique est basée sur l'égalité des longueurs des côtés opposés d'un parallélogramme et sur la propriété de parallélisme de deux côtés opposés d'un parallélogramme.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $ARST$?

Je vais montrer que c'est un parallélogramme.

Au regard de la construction précédente, il est immédiat que la droite (RS) est parallèle à la droite (BC) qui est parallèle à la droite (AD) (car $ABCD$ est un parallélogramme) et par conséquent, les droites (AT) et (RS) sont parallèles.

De même, la droite (TS) est parallèle à la droite (DC) qui est parallèle à la droite (AB) (car $ABCD$ est un parallélogramme) et par conséquent, les droites (AR) et (TS) sont parallèles.

Par suite, le quadrilatère $ARST$ est un parallélogramme (car ses côtés opposés sont parallèles).

5. Exprimer l'aire du quadrilatère $ARST$ en fonction de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Je vais utiliser le théorème de Thalès ... une nouvelle fois.

Soit δ la perpendiculaire à la droite (AR) passant par T. δ coupe la droite (AB) en U et la droite (DC) en V.

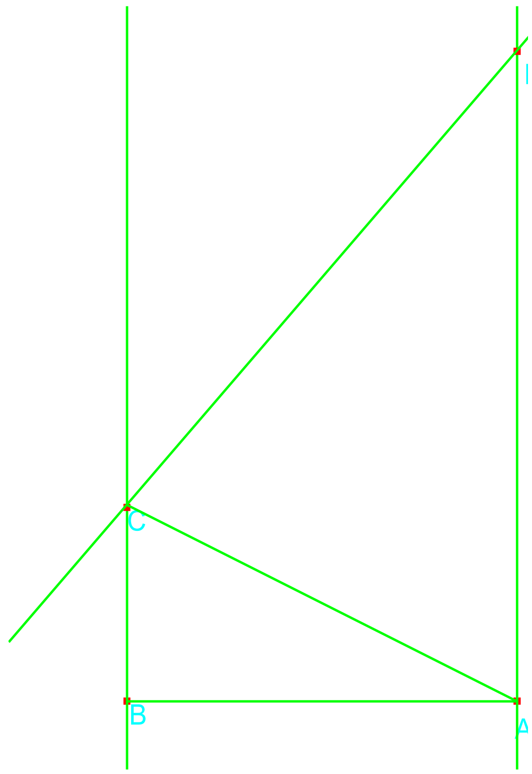
Je déduis $Aire(ABCD) = AB \times UV$ et $Aire(ARST) = AR \times UT$.

Cependant, en utilisant le théorème de Thalès (formulation forte) avec les sécantes (TA) et (TU) et les parallèles (AU) et (DV), j'obtiens alors $AD/UV = AT/UT$ $[= DT/VT]$, puis $UT = AT/AD \times UV$, et $UT = 4/3 \times UV$.

Enfin, $Aire(ARST) = AR \times UT = 4/3 \times AB \times 4/3 \times UV = (4/3)^2 \times Aire(ABCD) = 16/9 \times Aire(ABCD)$.

Note : en utilisant les agrandissements (que je n'ai pas encore vus), c'était immédiat.

Exercice [Amiens, 2000]



On donne le triangle ABC, rectangle en B tel que $AB = 4$ cm et $BC = 2$ cm.

La demi-droite $[Ax)$ est perpendiculaire à la droite (AB) (et est située du même côté que le point C, par rapport à la droite (AB)).

M est un point de la demi-droite $[Ax)$ et on note m la distance AM.

Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.

1. Calculez la distance AC.

2.a) Déterminez m pour que l'aire du triangle ACM soit égale au triple de l'aire du triangle ABC.

2.b) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en A.

2.c) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en C.

2.d) Le triangle ACM peut-il être isocèle en M ? Si oui, réalisez la construction et explicitez-la.

Sur une autre figure, placez la point M' de la demi-droite $[Ax)$ tel que $AM' = 2$ cm.

3.a) Quel est la nature du triangle ACM' ? Justifiez.

Sur la même figure, placez M tel que $AM = 10$ cm.

3.b) Calculez la distance CM.

3.c) Montrez que le triangle ACM est rectangle en C.

On note C' le point tel que la droite (AB) soit la médiatrice du segment $[CC']$.

4.a) Le triangle ACC' est-il équilatéral ? Justifiez.

4.b) Existe-t-il M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

Solution [Amiens, 2000]

1. Calculez la distance AC.

J'applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B. J'obtiens $AB^2 + BC^2 = AC^2$, puis $AC = 2 \times \sqrt{5}$ cm.

2.a) Déterminez m pour que l'aire du triangle ACM soit égale au triple de l'aire du triangle ABC.

$Aire(ABC) = (AB \times BC)/2$.

$Aire(AMC) = (AB \times MC)/2 = 3 \times Aire(ABC) = 3 \times (AB \times BC)/2$.

Ainsi, $MC = 3 \times BC = 3 \times 2$ cm $= 6$ cm.

Voir le point *M2a*.

2.b) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en A.

Il me suffit de faire le lien avec la question 1.

$AC = AM = 2 \times \sqrt{5}$ cm.

Voir le point *M2b*.

2.c) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en C.

Je vais utiliser une propriété des triangles isocèles.

Soit H le pied de la hauteur du triangle ACM.

Le quadrilatère $ABCH$ est donc un rectangle car il possède trois angles droits (en B, en A et en H) et $AH = BC$.

Or, dans un triangle ACM isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi médiane (d'où H est milieu du segment $[AM]$) et $AM = 2 \times AH = 2 \times 2$ cm $= 4$ cm.

Voir le point *M2c*.

2.d) Le triangle ACM peut-il être isocèle en M ? Si oui, réalisez la construction et explicitez-la.

Je vais encore utiliser une propriété des triangles isocèles.

La construction est possible.

Je vais tracer la médiatrice du segment $[AC]$ (*). Cette médiatrice coupe la droite (Ax) en un point que je peux baptiser M parce que ce point est équidistant de A et de C (le triangle ACM est alors isocèle en M).

(*) Pour tracer la médiatrice du segment $[AC]$: je trace un cercle C_1 de centre A et de rayon AC et un cercle C_2 de centre C et de rayon AC ; les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points distincts M et N tels que la droite (MN) soit la médiatrice du segment $[AC]$.

Note : en utilisant les triangles semblables (que je n'ai pas encore vus) $AH'M$ et CBA où H' est le milieu du segment $[AC]$, je pourrais calculer également AM.

Voir le point *M2d*.

3.a) Quel est la nature du triangle ACM' ? Justifiez.

Je peux comparer les points H et M'.

$H = M'$ car H et M' sont tous deux sur la demi-droite $[Ax)$ et car $AH = AM' = 2$ cm.

ACM' est donc un triangle rectangle en *M'*.

3.b) Calculez la distance *CM*.

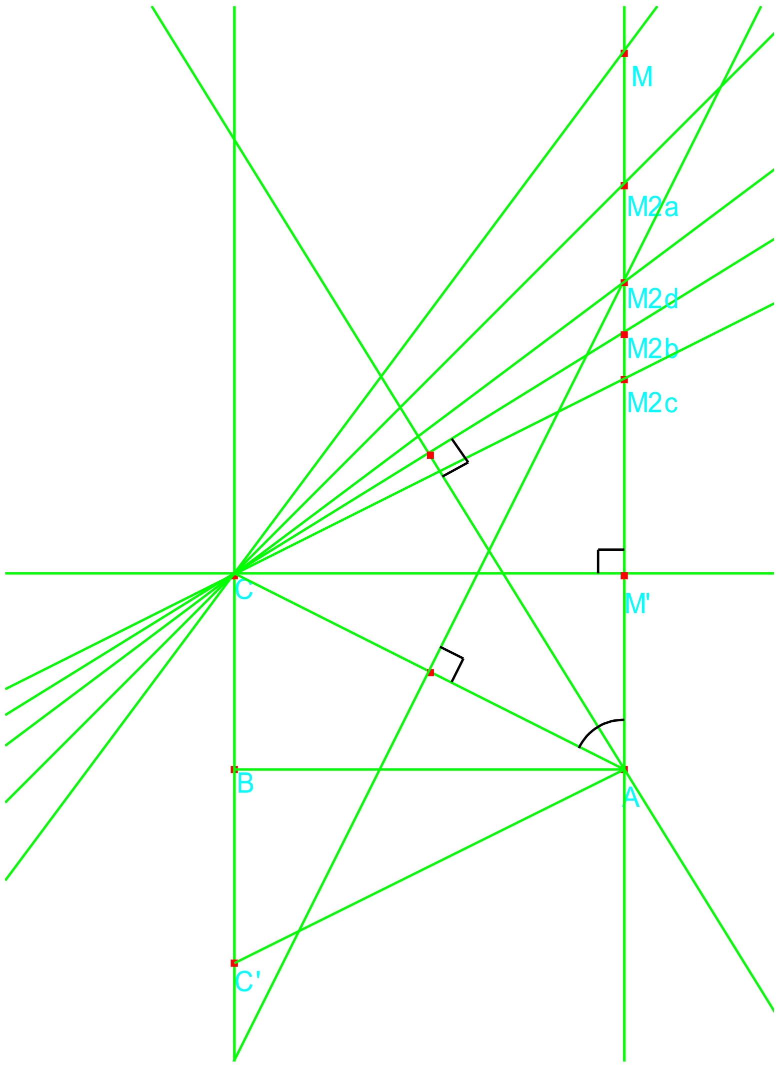
Le triangle *CM'M* est rectangle en *M'* (car $M' = H$). Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, je déduis $CM^2 = CM'^2 + M'M^2 = CH^2 + (AM - AM')^2 = AB^2 + (AM - BC)^2 = (4^2 + (10 - 2)^2)$ cm^2 = 80 cm^2 (car le quadrilatère *ABCH* est un rectangle).

Par suite, $CM = \sqrt{80}$ cm $= 4\sqrt{5}$ cm.

3.c) Montrez que le triangle *ACM* est rectangle en *C*.

Et, c'est maintenant au tour de la réciproque du théorème de Pythagore.

Je remarque que $AC^2 + CM^2 = (20 + 80)$ cm^2 = 100 cm^2 = AM^2. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle *ACM* est rectangle en *C*.



4.a) Le triangle *ACC'* est-il équilatéral ? Justifiez.

$CC' = 2 \times BC$ (car la droite *(AB)* est médiatrice du segment *[CC']*, puis les droites *(CC')* et *(BC')* sont confondues -toutes deux perpendiculaires à la droite *(AB)* et avec *C'* comme point commun-, et enfin *B* est milieu du segment *[CC']*). D'où, $CC' = 2 \times 2$ cm $= 4$ cm. Et maintenant, comme $AC \neq CC'$, le triangle *ACC'* n'est pas équilatéral.

4.b) Existe-t-il *M* tel que le triangle *ACM* soit équilatéral ? Justifiez.

Si l'angle $\widehat{CAB}$ était de $30°$, l'angle $\widehat{CAC'}$ serait de $60°$ (car la médiatrice du triangle *CAC'*

-isocèle en A- issue de A est également bissectrice issue de A) et le triangle CAC' -isocèle en A- serait équilatéral (car les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux). Ceci étant faux (voir question 4.a), l'angle $\widehat{CAB}$ n'est pas de $30°$.

Par complémentarité (l'angle $\widehat{MAB}$ étant droit), je déduis que l'angle $\widehat{MAC}$ n'est pas de $60°$ et puis que le triangle MAC n'est pas équilatéral (car dans un triangle équilatéral, tous les angles mesurent $60°$).

Exercice : le parallélogramme de Varignon

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soit I le milieu de $[AB]$. Soit J le milieu de $[BC]$. Soit K le milieu de $[CD]$. Soit L le milieu de $[DA]$.

1. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

2. Quelle condition nécessaire et suffisante donner (sur les diagonales du quadrilatère $ABCD$) pour que

a) le quadrilatère $IJKL$ soit un rectangle ?
b) le quadrilatère $IJKL$ soit un losange ?
c) le quadrilatère $IJKL$ soit un carré ?

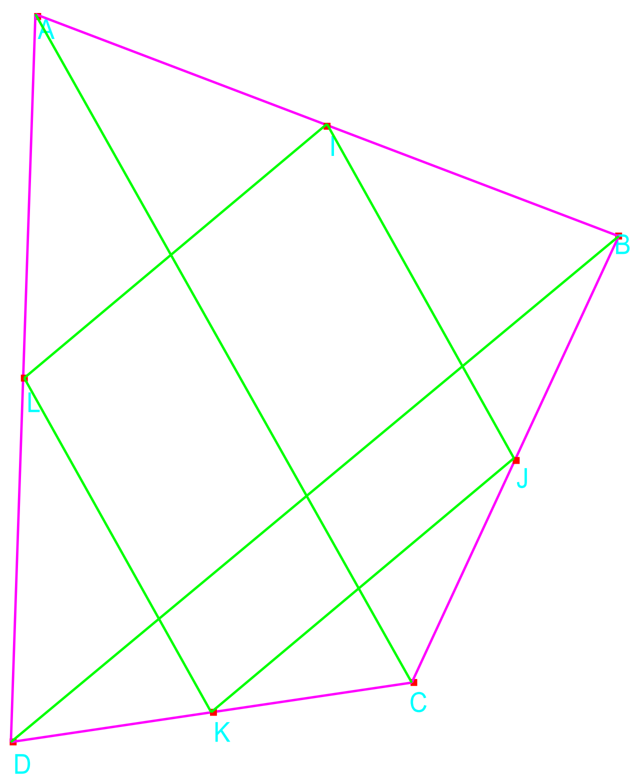
3. Soit $IJKL$ un parallélogramme (non aplati). Soit A un point du plan. Soit B tel que I soit milieu de $[AB]$. Soit C tel que J soit milieu de $[BC]$. Soit D tel que K soit milieu de $[CD]$. Soit A' tel que L soit milieu de $[DA']$. Montrer que $A = A'$.

Solution : le parallélogramme de Varignon

1. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Je vais utiliser le théorème de la droite des milieux ...

Je commence par la figure.



Dans le triangle ABC, I est milieu du segment $[AB]$ et J est milieu du segment $[BC]$. D'après le théorème de la droite des milieux, les droites (AC) et (IJ) sont parallèles[1] et $IJ = AC/2$[5]. De même, les droites (BD) et (JK) sont parallèles[2] et $JK = BD/2$[6] ; les droites (CA) et (KL) sont parallèles[3] et $KL = CA/2$[7] ; les droites (DB) et (LI) sont parallèles[4] et $LI = DB/2$[8].

D'après [1] et [3], je tire que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles (toutes deux parallèles à la droite (AC)). De même, d'après [2] et [4], je tire que les droites (JK) et (LI) sont parallèles (toutes deux parallèles à la droite (BD)).

Par suite, le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèles).

2.a) Quelle condition nécessaire et suffisante donner (sur les diagonales du quadrilatère $ABCD$) pour que le quadrilatère $IJKL$ soit un rectangle ?

Je vais d'abord supposer que le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle et voir ce qui découle comme propriété pour les diagonales.

Si $IJKL$ est un rectangle, alors les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

Mais, d'après [1], les droites (AC) et (IJ) sont parallèles, donc les droites (AC) et (JK) sont perpendiculaires (théorème de composition de parallélisme et de perpendicularité).

De même, d'après [2], les droites (BD) et (JK) sont parallèles, donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires (théorème de composition de parallélisme et de perpendicularité).

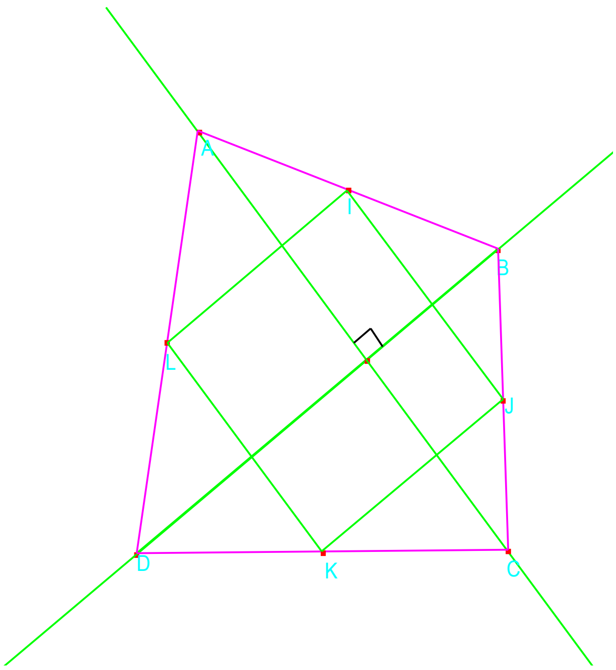
Conclusion : si $IJKL$ est un rectangle, alors les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires.

Réciproquement, si les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires, alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Mais, d'après [1], les droites (AC) et (IJ) sont parallèles, et comme les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, il vient que les droites (IJ) et (BD) sont perpendiculaires (théorème de composition de parallélisme et de perpendicularité).

Ensuite, d'après [2], les droites (BD) et (JK) sont parallèles, et comme les droites (IJ) et (BD) sont perpendiculaires, il vient que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires (théorème de composition de parallélisme et de perpendicularité).

Le parallélogramme $IJKL$ (c'est un parallélogramme d'après la question 1) a donc deux côtés perpendiculaires et est, par conséquent, un rectangle.



2.b) Quelle condition nécessaire et suffisante donner (sur les diagonales du quadrilatère *ABCD*) pour que le quadrilatère *IJKL* soit un losange ?

Je vais d'abord supposer que le quadrilatère *IJKL* est un losange et voir ce qui découle comme propriété pour les diagonales.

Si *IJKL* est un losange, alors $IJ = JK$.

Mais, d'après (5), $IJ = AC/2$ donc $JK = AC/2$.

De même, d'après (6), $JK = BD/2$ donc $BD/2 = AC/2$, puis $AC = BD$.

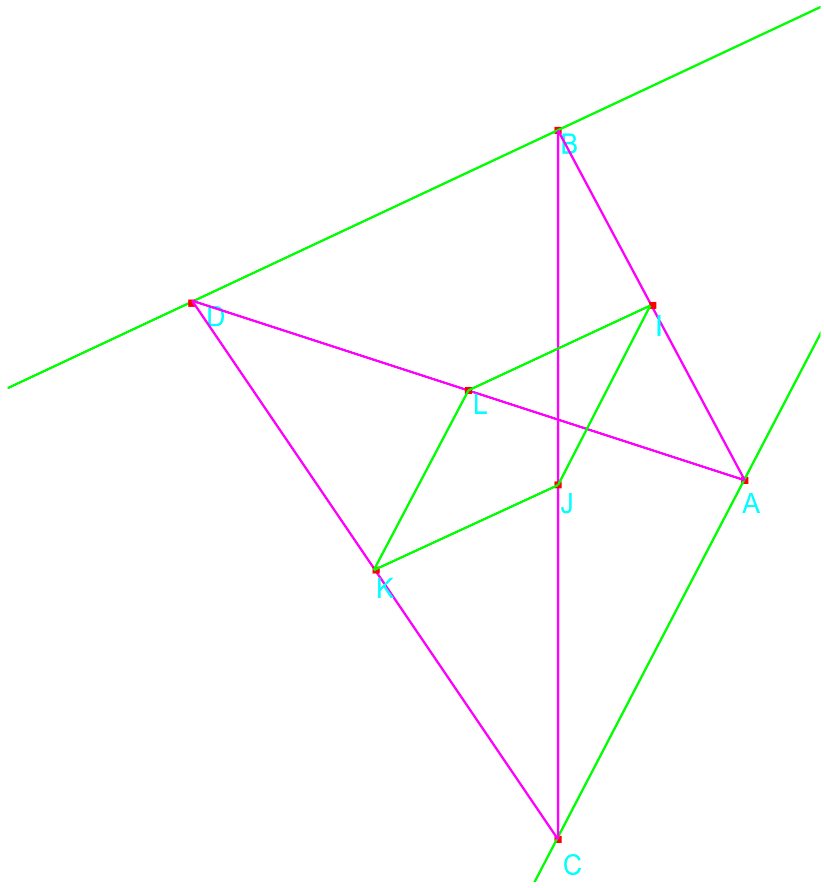
Conclusion : si *IJKL* est un losange, alors les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont de même longueur.

Réciproquement, si les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont de même longueur, alors $AC = BD$.

Mais, d'après (5), $IJ = AC/2$ donc $IJ = BD/2$.

De même, d'après (6), $JK = BD/2$ donc $IJ = JK$.

Le parallélogramme *IJKL* (c'est un parallélogramme d'après la question 1) a donc deux côtés consécutifs de même longueur et est, par conséquent, un losange.



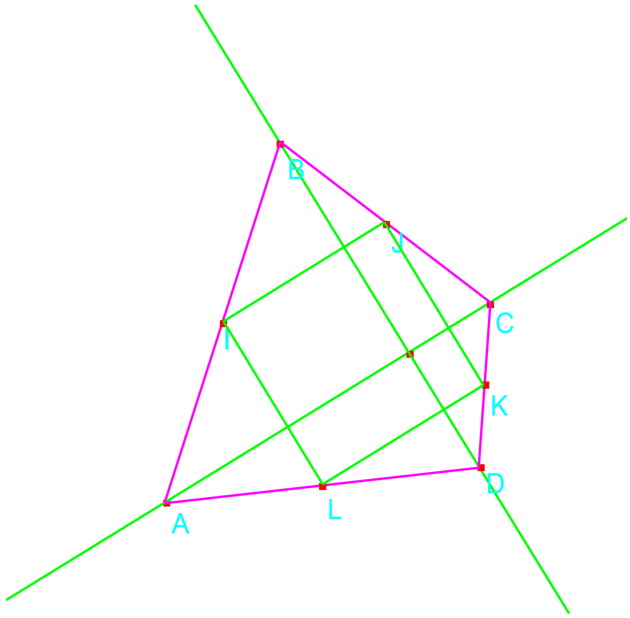
2.c) Quelle condition nécessaire et suffisante donner (sur les diagonales du quadrilatère *ABCD*) pour que le quadrilatère *IJKL* soit un carré ?

Il s'agit de bien résumer ce que je sais déjà.

Si *IJKL* est un carré, alors *IJKL* est un rectangle et donc les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont perpendiculaires, mais est également un losange et donc les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont de même longueur.

Ainsi, si *IJKL* est un carré, alors les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont perpendiculaires et de même longueur.

Réciproquement, si les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont perpendiculaires et de même longueur, alors *IJKL* est un rectangle (car les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont perpendiculaires), mais également un losange (car les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont de même longueur). Le quadrilatère *IJKL* est un rectangle et un losange et est, par conséquent, un carré.



3. Soit *IJKL* un parallélogramme non aplati. Soit *A* un point du plan. Soit *B* tel que *I* soit milieu de *[AB]*. Soit *C* tel que *J* soit milieu de *[BC]*. Soit *D* tel que *K* soit milieu de *[CD]*. Soit *A'* tel que *L* soit milieu de *[DA']*. Montrer que $A = A'$.

Cette question n'est pas totalement indépendante des précédentes.

Il est encore vrai que les droites *(AC)* et *(IJ)* sont parallèles(1) et $IJ = AC/2$(5). De même, il est encore vrai que les droites *(BD)* et *(JK)* sont parallèles(2) et $JK = BD/2$(6) ; mais, maintenant, ce sont les droites *(CA')* et *(KL)* qui sont parallèles(3') et $KL = CA'/2$(7').

Cependant, comme les droites *(IJ)* et *(KL)* sont parallèles (*IJKL* étant un parallélogramme), puis les droites (AC) et (A'C) également (d'après (1) et (3'), par transitivité du parallélisme). Or les droites *(AC)* et *(A'C)* ont un point commun, *C*, donc ces droites sont confondues.

D'autre part, je sais également que $IJ = KL$ (car *IJKL* est un parallélogramme), puis $AC/2 = IJ = KL = A'C/2$ (d'après (5) et (7')), et $AC = A'C$.

A et *A'* sont équidistants de *C* et sont sur une même droite, donc

a) soit $A = A'$ (c'est effectivement le cas) ;
b) soit *A* et *A'* sont symétriques par rapport à *C* [ce cas est effectivement impossible, car en utilisant la réciproque de la formulation forte du théorème de Thalès -avec trois rapports égaux $AI/A'L = AB/A'D = IB/LD$-, j'obtiendrais que les droites *(AA')*, *(IL)* et *(BD)* sont parallèles, mais comme les droites *(AA')* et *(AC)* sont confondues, je pourrais déduire que les diagonales *(AC)* et *(BD)* du quadrilatère *ABCD* sont parallèles (par transitivité du parallélisme), puis que le quadrilatère *ABCD* est aplati, puis que *IJKL* est aplati également (remarque : on pourrait traiter algébriquement le cas du parallélogramme *IJKL* aplati, mais c'est inutile ici)].

Donc, $A = A'$.

Note : en utilisant une version algébrique du théorème de Thalès (que nous ne verrons pas !), c'était plus direct et n'utilisait pas l'hypothèse "*IJKL* non aplati".

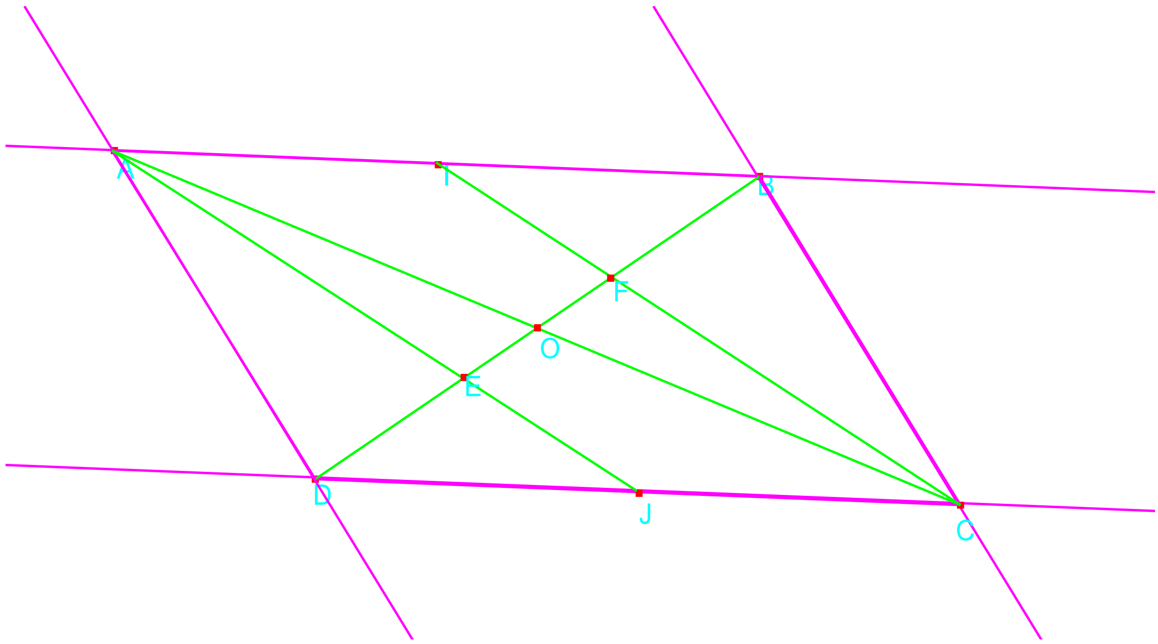
Exercice : la trisection de la diagonale d'un parallélogramme

Soit *ABCD* un parallélogramme. Soit *I* le milieu de *[AB]*. Soit *J* le milieu de *[CD]*. Les droites *(AJ)* et *(BD)* se coupent en *E*. Les droites *(IC)* et *(BD)* se coupent en *F*.

Montrer que $DE = EF = FB$.

Solution : la trisection de la diagonale d'un parallélogramme

Je commence par tracer la figure.



Première démonstration ...

Soit *O* l'intersection des diagonales du parallélogramme *ABCD*. *O* est milieu du segment *[AC]* car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Ainsi, *[DO]* est une médiane du triangle *ADC*.

D'autre part, *J* est milieu du segment *[CD]*. Ainsi, *[AJ]* est une médiane du triangle *ADC*.

Par suite, le point *E* est le point de concours de deux médianes du triangle *ADC* et est le centre de gravité de ce triangle.

Enfin, $DE = 2 \times EO$ (propriété du centre de gravité d'un triangle).

De la même façon, on obtiendrait $BF = 2 \times FO$ (avec *F* centre de gravité du triangle *ABC*).

Cependant, *O* est aussi milieu du segment *[BD]* car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc, $DO = DE + EO = OB = OF + FB$, puis $2 \times EO + EO = 3 \times EO = OF + 2 \times OF = 3 \times OF$, et $EO = OF$.

Ainsi, $DE = EF = FB$ $(= 2 \times EO)$.

Deuxième démonstration ...

Le quadrilatère *AICJ* est un parallélogramme (car $AI = AB/2 = CD/2 = CJ$ -puisque *I* est milieu du segment *[AB]*, $AB = CD$ car *ABCD* est un parallélogramme et *J* est milieu du segment *[CD]*- et car les droites *(AI)* et *(CJ)* sont parallèles -toujours car *ABCD* est un parallélogramme-).

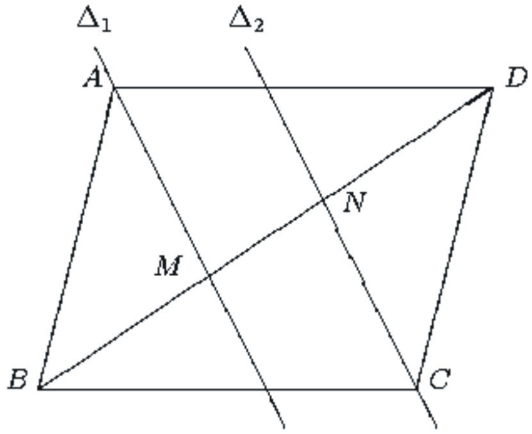
J'utilise maintenant le théorème de Thalès avec les sécantes *(BA)* et *(BD)* et les parallèles *(AJ)* et *(IC)* (ces droites sont parallèles car le quadrilatère *AICJ* est un parallélogramme) (cas a)), puis avec les sécantes *(DC)* et *(DA)* et les parallèles *(AJ)* et *(IC)* (ces droites sont parallèles car le quadrilatère *AICJ* est un parallélogramme) (cas b)), et j'obtiens

a) *BI/BA = BF/BE [= IF/AE]*, puis *BF = BE/2* et *BF = FE*,
b) *DJ/DC = DE/DF [= JE/CF]*, puis *DE = DF/2* et *DE = EF*,
et, au final, *DE = EF = FB*.

Exercice [Orléans, 1999]

Soit *ABCD* un parallélogramme de centre *O* et Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles qui passent respectivement par *A* et *C*.

Les droites Δ_1 et Δ_2 coupent respectivement la droite *(BD)* en *M* et en *N*.



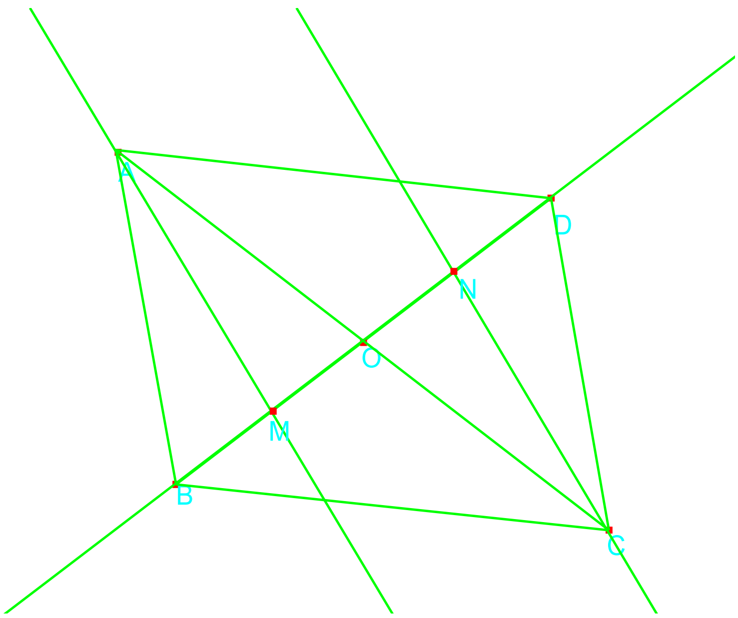
1. Préciser la nature du quadrilatère *AMCN*. Justifier la réponse.

2. Prouver qu'il existe une position des droites Δ_1 et Δ_2 pour laquelle *AMCN* est un rectangle. Donner dans ce cas, le programme de construction du rectangle *AMCN*. Le construire dans les deux cas *AC* < *BD* et *AC* > *BD*.

3. Le quadrilatère *AMCN* peut-il être un losange ? Pourquoi ? Modifier les données de l'énoncé pour que *AMCN* soit un losange.

Solution [Orléans, 1999]

Je commence par tracer la figure.



1. Préciser la nature du quadrilatère *AMCN*. Justifier la réponse.

Et, pour montrer que le quadrilatère *AMCN* est un parallélogramme, je me propose de montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Le théorème de Thalès utilisé avec les séantes *(AC)* et *(BD)* et les parallèles Δ_1 et Δ_2, me donne $OA/OC = OM/ON$ [$= MA/NC$].

Cependant, *O* est le milieu du segment *[AC]* (car *ABCD* est un parallélogramme et ses diagonales se coupent donc en leur milieu), donc $OA/OC = 1$, puis $OM/ON = 1$ et donc *O* est milieu du segment *[MN]*.

Enfin, les diagonales du quadrilatère *AMCN* se coupent en leur milieu et *AMCN* est un parallélogramme.

2. Prouver qu'il existe une position des droites Δ_1 et Δ_2 pour laquelle *AMCN* est un rectangle. Donner dans ce cas, le programme de construction du rectangle *AMCN*. Le construire dans les deux cas $AC < BD$ et $AC > BD$.

Je continue à tourner ma réflexion autour des diagonales du parallélogramme *AMCN*.

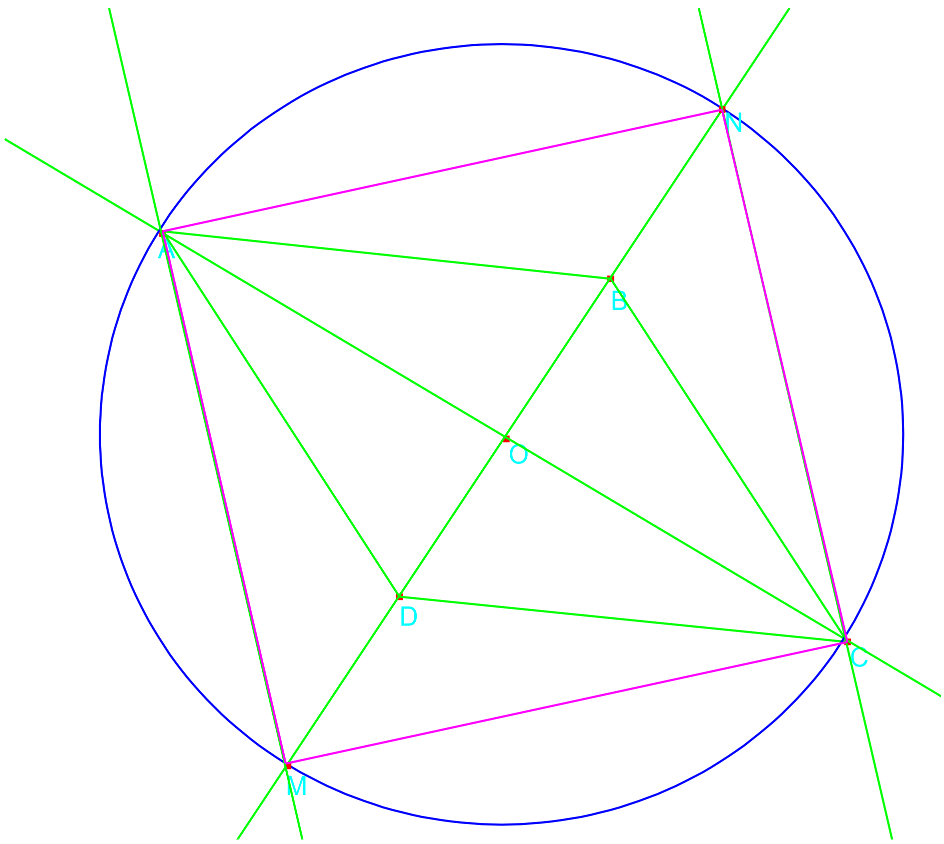
Soit le programme de construction suivant : je suppose le parallélogramme *ABCD* tracé ; je trace la droite *(BD)* ; je trace la droite *(AC)* ; je nomme *O* le point de concours des droites *(AC)* et *(BD)* ; je trace le cercle Γ de centre *O* et de rayon *OA* ; le cercle Γ coupe la droite *(BD)* en deux point distincts que je nomme *M* et *N*.

J'explique alors pourquoi le quadrilatère *AMCN* est un rectangle.

J'ai $AC = MN$ (car *[AC]* et *[MN]* sont deux diamètres du cercle), et donc le parallélogramme *AMCN* a ses diagonales de même longueur et est, par conséquent, un rectangle.

Tracé lorsque $AC < BD$ ou lorsque $AC > BD$.

Dans l'animation ci-dessous, les points *A*, *B* et *D* sont mobiles dé façon à ce que $AC < BD$ ou $AC > BD$.



3. Le quadrilatère *AMCN* peut-il être un losange ? Pourquoi ? Modifier les données de l'énoncé pour que *AMCN* soit un losange.

Je continue toujours à tourner ma réflexion autour des diagonales du parallélogramme *AMCN*.

Le parallélogramme *AMCN* n'est un losange que si ses diagonales sont perpendiculaires. Or, les diagonales du parallélogramme *AMCN* ne seront perpendiculaires que si celles du parallélogramme *ABCD* le sont aussi (en effet, les droites *(MN)* et *(BD)* sont confondues), ce qui n'est le cas que si le parallélogramme *ABCD* est aussi un losange (ce qui n'est pas dit dans l'énoncé, mais que je peux modifier pour traiter cette question).

En résumé, si le quadrilatère *ABCD* est un losange, alors le quadrilatère *AMCN* l'est aussi. Et, réciproquement, si le quadrilatère *AMCN* est un losange, alors le quadrilatère *ABCD* l'est aussi.

Note : si le quadrilatère *ABCD* est un losange, alors lorsque le quadrilatère *AMCN* est un rectangle, il est également un carré.

Exercice [Amiens, 1999]

Chaque réponse doit être justifiée. Chaque construction doit être accompagné d'un texte explicatif. L'unité considérée est le centimètre.

Tracer en utilisant une règle graduée et un compas, un triangle *ABC* rectangle en *A* tel que $AB = 4$ et $BC = 8$.

On considère *O* le milieu de *[BC]*.

1.a) Comparer *OA* et *BC*.
1.b) Calculer l'aire exacte du triangle *ABC*.
1.c) Donner une valeur approchée de cette aire à $0,1$ cm^2 près ($1,732$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $0,001$ près).

Placer *E* tel que *C* soit milieu de *[AE]*.

2.a) Quelle est la nature du triangle *ABE* ?
2.b) Déterminer le rapport des aires des triangles *ABE* et *ABC*.
2.c) Déterminer l'aire exacte du triangle *BCE*.

On considère *H* le point d'intersection du cercle de centre *O* et de diamètre *[BC]*, avec la droite *(BE)*.

3.a) Démontrer que *[CH]* est une hauteur du triangle *BCE*.

Placer *F* tel que *C* soit milieu de *[BF]*.

3.b) Quelle est la nature du quadrilatère *AFEB* ?
3.c) Quelle est son aire exacte ?
3.d) Exprimer l'aire d'un losange en fonction de la mesure des diagonales.
3.e) Construire un losange *MPNQ* à partir de ses diagonales qui ait la même aire que *AFEB*. Pour cela, vous utiliserez uniquement le compas (qui vous permettra de reporter les longueurs de la première figure) et une règle non graduée.

Solution [Amiens, 1999]

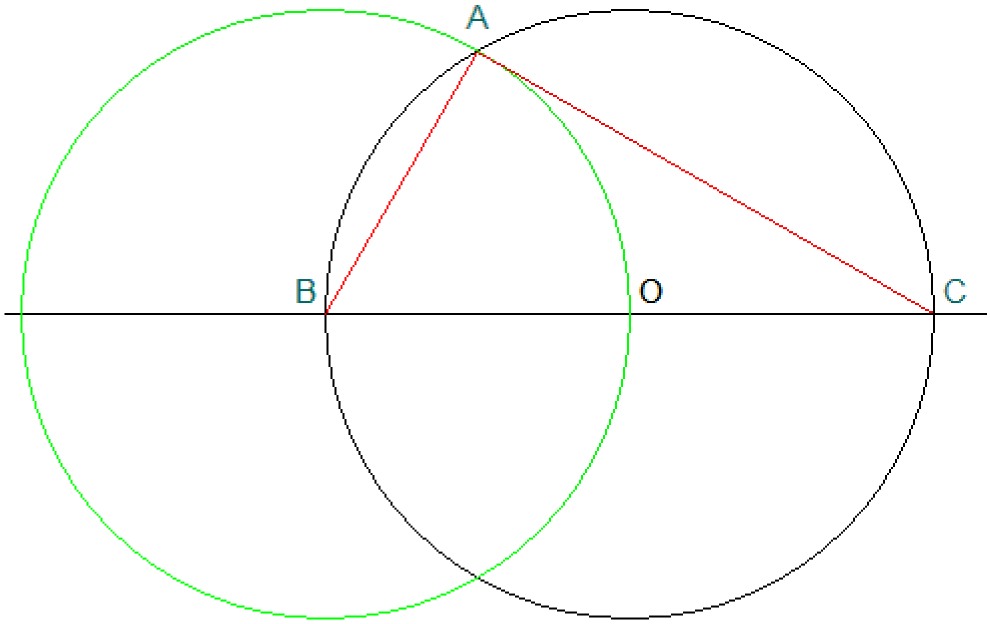
Tracer en utilisant une règle graduée et un compas, un triangle *ABC* rectangle en *A* tel que $AB = 4$ cm et $BC = 8$ cm.

Je me propose de donner un algorithme de construction et de le justifier.

Je trace un segment *[OB]* de 4 cm. Je trace le cercle C_1 de centre *O* et de rayon *OB* et le cercle C_2

de centre B et de rayon BO. Je trace la droite (OB). La droite (OB) coupe le cercle C_1 en deux points distinct B et C. Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points dont l'un que je nomme A.

Voici la figure ...



J'ai bien $AB = 4$ cm (car A appartient au cercle C_2) ; j'ai bien également $BC = 8$ cm (car $[BC]$ est un diamètre du cercle C_1 puisque B et C appartiennent à C_1 et $[BC]$ contient le centre du cercle C_1) ; et j'ai aussi le fait que le triangle ABC est rectangle en A (car A appartient au cercle de diamètre $[BC]$).

On considère O le milieu de $[BC]$.

1.a) Comparer OA et BC.
1.b) Calculer l'aire exacte du triangle ABC.
1.c) Donner une valeur approchée de cette aire à $0,1$ cm^2 près ($1,732$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $0,001$ près).

Je peux commencer par remarquer que le triangle OAB est équilatéral ...

Le triangle OAB est équilatéral (en effet, $OB = 4$ cm -voir construction- ; $OA = 4$ cm car A appartient au cercle C1 ; $AB = 4$ cm -c'est déjà vu-). Ainsi, $0A = BC/2$.

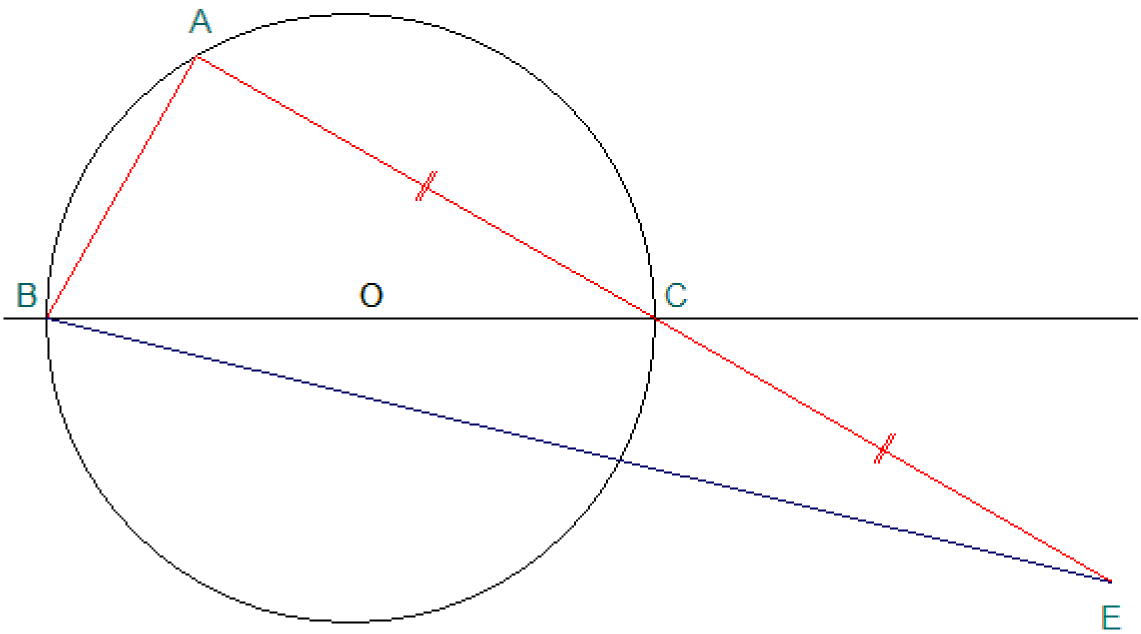
Ensuite, la hauteur h du triangle OAB est $4 \times \sqrt{3}/2$ cm $= 2 \times \sqrt{3}$ cm (voir application directe du théorème de Pythagore). Enfin, l'aire du triangle ABC est $Aire(ABC) = (h \times BC)/2 = (2 \times \sqrt{3} \times 8)/2$ cm^2 = $8 \times \sqrt{3}$ cm^2.

L'énoncé me dit que $1,732$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $0,001$ près, je déduis donc que $1,731 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$. Par conséquent, $1,731 \times 8$ cm^2 $\leq Aire(ABC) \leq 1,733 \times 8$ cm^2, puis $13,848$ cm^2 $\leq Aire(ABC) \leq 13,864$ cm^2, et enfin, $Aire(ABC) = 13,8$ cm^2 à $0,1$ cm^2 près, par défaut.

Placer E tel que C soit milieu de $[AE]$.

2.a) Quelle est la nature du triangle ABE ?
2.b) Déterminer le rapport des aires des triangles ABE et ABC.
2.c) Déterminer l'aire exacte du triangle BCE.

Je complète d'abord la figure ...



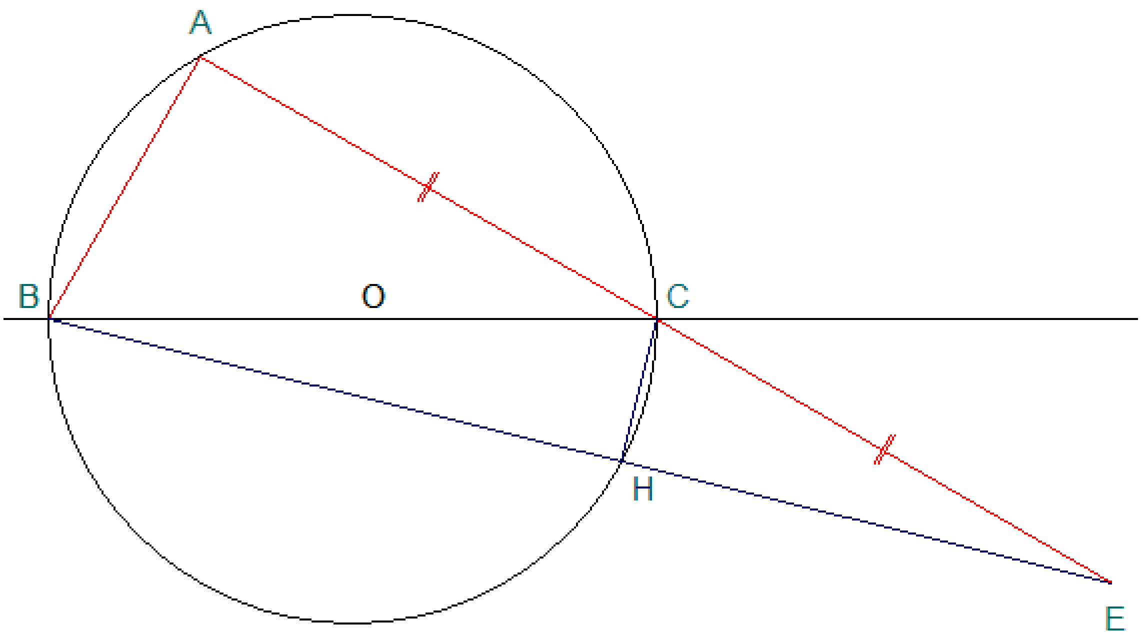
La droite *(AC)* est perpendiculaire à la droite *(AB)* car le triangle *ABC* est rectangle en *A*. Or, les droites *(AC)* et *(AE)* sont confondues, donc les droites *(AE)* et *(AB)* sont perpendiculaires et le triangle *ABE* est rectangle en *A*.

J'obtiens alors *Aire(ABC) = (AB x AC)/2* et *Aire(ABE) = (AB x AE)/2*, et, par conséquent, *Aire(ABE)/Aire(ABC) = AE/AC = 2* (car *C* est milieu du segment *[AE]*).

On considère *H* le point d'intersection du cercle de centre *O* et de diamètre *[BC]*, avec la droite *(BE)*.

3.a) Démontrer que *(CH)* est une hauteur du triangle *BCE*.

Je poursuis l'avancement de la figure.

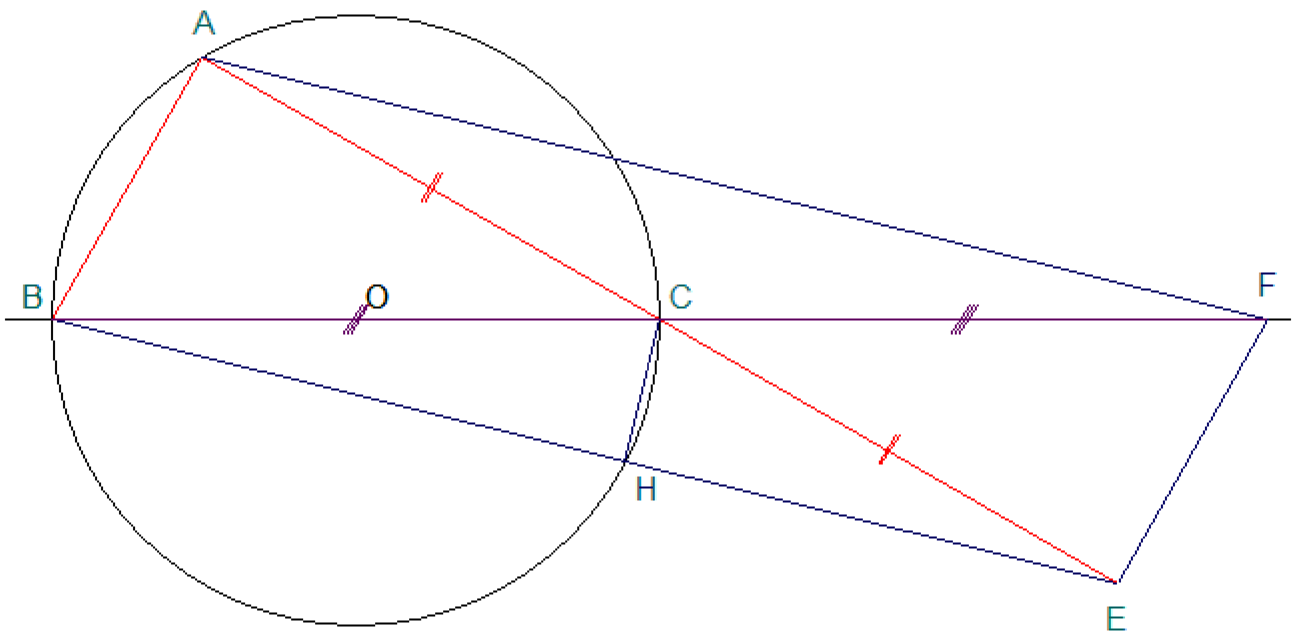


H appartient au cercle C_1 et *[BC]* est un diamètre du cercle C_1, donc le triangle *HCB* est rectangle en H. La droite (CH) est donc perpendiculaire à la droite (BE) et est la hauteur du triangle BCE issue de C.

Placer F tel que C soit milieu de $[BF]$.

3.b) Quelle est la nature du quadrilatère $AFEB$?
3.c) Quelle est son aire exacte ?
3.d) Exprimer l'aire d'un losange en fonction de la mesure des diagonales.
3.e) Construire un losange $MPNQ$ à partir de ses diagonales qui ait la même aire que $AFEB$. Pour cela, vous utiliserez uniquement le compas (qui vous permettra de reporter les longueurs de la première figure) et une règle non graduée.

J'achève la figure.



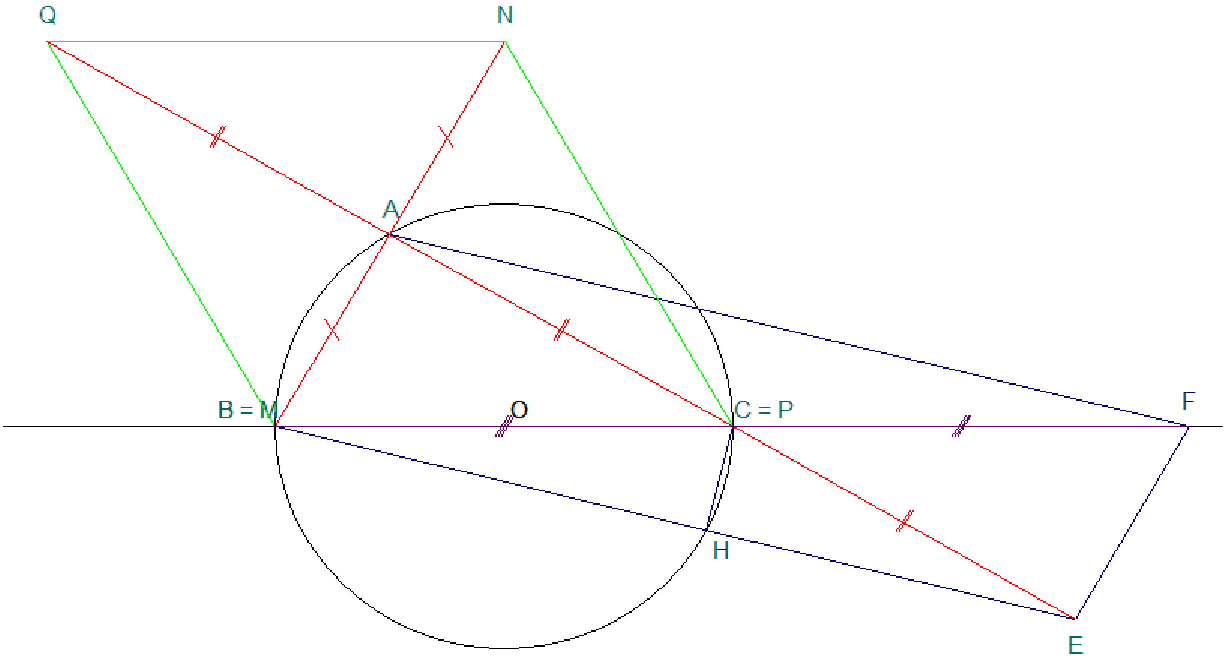
Le quadrilatère $AFEB$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu C (C est milieu du segment $[AE]$ et du segment $[BF]$). Le quadrilatère $AFEB$ est donc un parallélogramme.

$Aire(AFEB) = AB \times AE$ (car le quadrilatère $AFEB$ est un parallélogramme et car la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (AB)). Puis $Aire(AFEB) = 2 \times AB \times AC = 4 \times Aire(ABC) = 32 \times \sqrt{3}$ cm^2.

Soient d_1 et d_2 les longueurs des deux diagonales d'un losange, alors, l'aire de ce losange est donnée par $(d_1 \times d_2)/2$ (c'est du cours !).

Pour construire un losange $MPNQ$ de même aire que le parallélogramme $AFEB$, je pose $B = M$ et $C = P$, puis je construis le point N tel que A soit milieu du segment $[MN]$ et enfin Q tel que A soit milieu du segment $[PQ]$ (les diagonales $[MN]$ et $[PQ]$ se coupent donc en leur milieu A et sont perpendiculaires -car le triangle ABC est rectangle en A-, ce qui induit que $MPNQ$ est un losange ; de plus, ce losange $MPNQ$ a une aire donnée par $Aire(MPNQ) = 4 \times Aire(ABC)$ et est donc égale à celle du parallélogramme $AFEB$).

La construction du losange ...



Exercice [Toulouse, 2000]

Soit *ABCD* un rectangle tel que $AB = 12$ cm et $AD = 9$ cm.

Sur *[AB]*, *M* et *N* sont tels que $AM = MN = 3$ cm et $N \neq A$.

Sur *[AD]*, *P* et *Q* sont tels que $AP = PQ = 3$ cm et $Q \neq A$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère *MNQP* ?

Par le point *M*, on trace la droite *d* parallèle à *(AD)*.

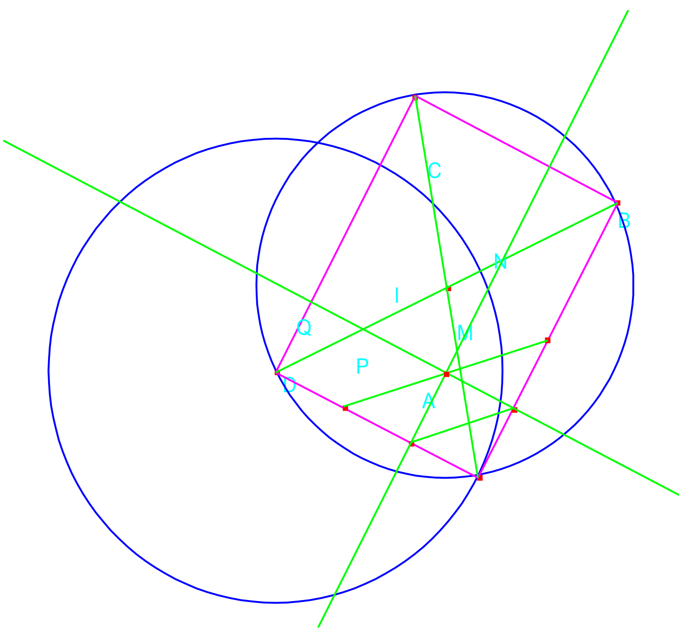
Par le point *P*, on trace la droite *d'* parallèle à *(AB)*.

Les droites *d* et *d'* se coupent en *I*.

2. Les points *Q*, *I* et *N* sont-ils alignés ?

Solution [Toulouse, 2000]

Je commence par tracer la figure ...



Et maintenant, je tente de montrer que le quadrilatère *MNQP* est un trapèze isocèle.

Dans le triangle *ANQ*, *P* est milieu du segment *[AQ]* (car $AP = PQ = 3$ cm) et *M* est milieu du segment *[AN]* (car $AM = MN = 3$ cm). Par le théorème des milieux, je déduis que les droites *(PM)* et *(QN)* sont parallèles ou que le quadrilatère *MNQP* est un trapèze. Le triangle *AQN* étant isocèle en *A* (car $AQ = AN = 6$ cm), j'obtiens que le trapèze *MNQP* a trois de ses côtés (considérés comme droites) qui forment un triangle isocèle et, par conséquent, le trapèze *MNQP* est isocèle.

Pour la suite, je pense à montrer que le quadrilatère *AMIP* est un carré.

Les droites *(AP)* et *(MI)* sont parallèles, par construction. De même, les droites *(AM)* et *(PI)* sont également parallèles. Par suite, le quadrilatère *AMIP* est un parallélogramme (car ses côtés opposés sont parallèles). L'angle $\widehat{PAM}$ est droit (car le quadrilatère *ABCD* est un rectangle) et, par conséquent, le parallélogramme *AMIP* est un rectangle (un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle). Enfin, $AP = AM = 2$ cm et le rectangle *AMIP* est un carré (un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré).

Maintenant, le triangle *QPI* est isocèle rectangle en *P* (en effet : $PI = 3$ cm car le quadrilatère *AMIP* est un carré de côté *3* cm et donc $PI = PQ$; l'angle $\widehat{QPI}$ est droit car le quadrilatère *AMIP* est un carré et a donc ses angles droits). De même façon, j'obtiens que le triangle *IMN* est isocèle rectangle en *M*.

Ainsi, je peux évaluer l'angle $\widehat{QIN}$!

$\widehat{QIN} = \widehat{QIP} + \widehat{PIM} + \widehat{MIN} = 45° + 90° + 45° = 180°$ (car dans un triangle isocèle rectangle, les angles à la base mesurent *45°* -du fait que la somme des angles d'un triangle vaut *180°* et que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux en mesure- et car dans un carré, les angles mesurent *90°*). Il s'ensuit que les points *Q*, *I* et *N* sont alignés.

Exercice : puzzle

On définit une figure :

> *ABCD* est un rectangle ; $AD = BC = 5$; $AB = DC = 10$;
> *X* est un point du segment *[BC]* tel que $BX = 3$;
> *Y* est un point du segment *[AB]* tel que $YB = x$;
> *I* est le point d'intersection des droites *(AX)* et *(DY)* ;
> Les quadrilatères *YBXI* et *DTSL* sont superposables ; *T* est un point du segment *[DC]* ; les points *L* et *S* sont dans le demi-plan délimité par la droite *(DC)*, ne contenant pas le point *A* ;
> Les triangles *AID* et *XJR* sont superposables ; *C* est un point du segment *[XR]* ; le point *J* est dans le demi-plan délimité par la droite *(BC)*, ne contenant pas le point *A* ;
> Les triangles *AYI* et *SZK* sont superposables ; *Z* est un point de la demi-droite *[SR)* ; le point *K* est dans le demi-plan délimité par la droite *(SR)*, ne contenant pas le point *A*.

Ces renseignements sur la figure sont les seuls qui soient utilisables.

1. Montrer que le quadrilatère *TCRS* est un rectangle (on supposera acquis le fait que le quadrilatère *TCRS* est convexe).

2. En déduire que les points *R* et *Z* sont confondus.

3. Montrer que les points *I*, *D* et *L* sont alignés.

4. Montrer que les points *I*, *X* et *J* sont alignés.

5. Montrer que les points *L*, *S* et *K* sont alignés.

6. Montrer que les points *K*, *R* et *J* sont alignés.

Les questions 3, 4, 5 et 6 induisent que *IJKL* est un quadrilatère tracé sur la figure.

7. Quelle est l'aire du quadrilatère *IJKL* en fonction de x ?

8. Montrer que le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme (on supposera acquis le fait que le quadrilatère *IJKL* est convexe).

9. Donner la valeur de x lorsque le quadrilatère *IJKL* est un losange.

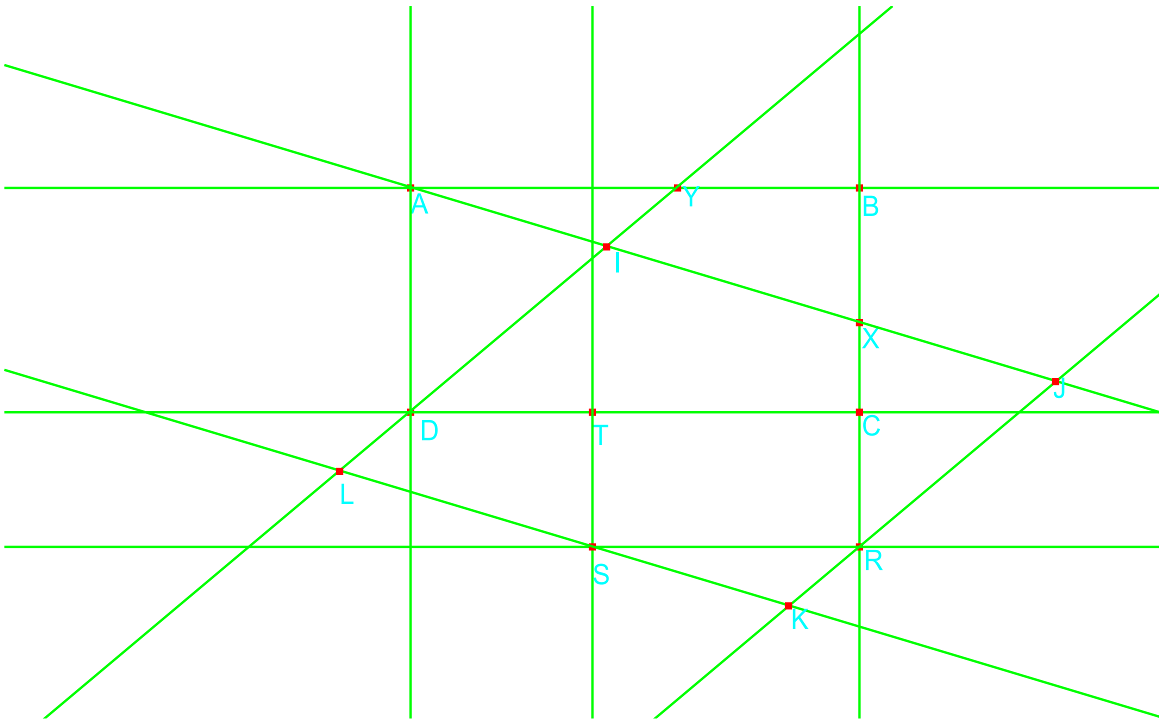
10. Lorsque I est le milieu du segment $[AX]$. Quelle est alors la valeur de x ?

> 10.a) Montrer que I est un point de la médiatrice du segment $[BX]$.
> 10.b) Soient E le milieu du segment $[AB]$ et F le milieu du segment $[DC]$. Montrer que le point I est sur la droite (EF).
> 10.c) Quelles sont les mesures des segments $[EI]$ et $[IF]$?
>
> 10.d) Soit Δ la parallèle à la droite (AB) passant par J. Δ coupe la droite (EF) en G et la droite (YD) en H.
> 10.d)i. Quelles sont les mesures des segments $[IG]$ et $[GF]$?
> 10.d)ii. Déduire la mesure du segment $[HG]$, puis celle de $[HJ]$.
> 10.d)iii. Déduire la mesure du segment $[AY]$.
> 10.d)iv. Conclure.

Solution : puzzle

1. Montrer que le quadrilatère *TCRS* est un rectangle (on supposera acquis le fait que le quadrilatère *TCRS* est convexe).

Je trace la figure et je démontre ce premier résultat.



Tout d'abord, $TS = BX = 3$. Aussi, $XR = AD = BC$ (car *ABCD* est un rectangle et ses côtés opposés sont donc de même longueur), donc $CR = XR - XC = BC - XC = BX = 3$. Par conséquent, $TS = CR$.

$\widehat{STC} = 180° - \widehat{STD}$ (car T appartient au segment $[DC]$). Or $\widehat{STD} = \widehat{XBY} = 90°$ (car *ABCD* est un rectangle et ses angles sont droits). Donc, $\widehat{STC} = 180° - 90° = 90°$. Par ailleurs, $\widehat{TCR} = 180° - \widehat{TCX}$ (car C appartient au segment $[XR]$). Or $\widehat{TCX} = 90°$ (car *ABCD* est un rectangle et ses angles sont droits). Donc $\widehat{TCR} = 180° - 90° = 90°$. Les droites (CR) et (TS) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (TC), donc les droites (CR) et (TS) sont parallèles (par composition de perpendicularité et de perpendicularité).

Comme les côtés $[CR]$ et $[TS]$ sont parallèles et de même longueur, je déduis que le quadrilatère $TCRS$ est un parallélogramme (on a supposé acquis le fait que le quadrilatère $TCRS$ était convexe). Enfin, comme l'angle $\widehat{TCR}$ est droit, j'obtiens que le parallélogramme $TCRS$ est un rectangle (un parallélogramme possédant un angle droit est un rectangle).

2. En déduire que les points R et Z sont confondus.

Je vais utiliser le fait que le quadrilatère $TCRS$ est un rectangle.

R et Z sont sur la même demi-droite $[SR)$. De plus, $SZ = AY = AB - BY$ (car Y appartient au segment $[AB]$), puis $SZ = DC - TD$ (car $ABCD$ est un rectangle et ses côtés opposés sont donc de même longueur), puis $SZ = TC = 10 - x$ (car T appartient au segment $[DC]$), et $SZ = SR$ (car $TCRS$ est un rectangle). Par conséquent, $Z = R$.

3. Montrer que les points I, D et L sont alignés.

4. Montrer que les points I, X et J sont alignés.

5. Montrer que les points L, S et K sont alignés.

6. Montrer que les points K, R et J sont alignés.

Je vais, pour ces questions, travailler sur les angles ...

$\widehat{IDL} = \widehat{IDT} + \widehat{TDL}$, puis $\widehat{IDL} = \widehat{IDT} + \widehat{BYI} = \widehat{IDT} + 180° - \widehat{AYI}$ (car Y appartient au segment $[AB]$), puis $\widehat{IDL} = 180°$ (car les angles alternes internes $\widehat{IDT}$ et $\widehat{AYI}$ sont égaux puisque dans le rectangle $ABCD$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles) et les points I, D et L sont alignés.

$\widehat{IXJ} = \widehat{IXR} + \widehat{RXJ}$, puis $\widehat{IXJ} = \widehat{IXR} + \widehat{DAI} = (180° - \widehat{IXB}) + (90° - \widehat{IAY})$ (car X appartient au segment $[BR]$ et car l'angle $\widehat{DAB}$ du rectangle $ABCD$ est droit), puis $\widehat{IXJ} = 180°$ (car les angles $\widehat{IXB}$ et $\widehat{IAY}$ sont complémentaires puisque le triangle ABX est rectangle en B, du fait que $ABCD$ est un rectangle) et les points I, X et J sont alignés.

$\widehat{LSK} = \widehat{LST} + \widehat{TSR} + \widehat{RSK}$, puis $\widehat{LSK} = \widehat{IXB} + 90° + \widehat{YAI}$ (car l'angle $\widehat{TSR}$ est droit puisque le quadrilatère $TCRS$ est un rectangle), puis $\widehat{LSK} = 180°$ (car les angles $\widehat{IXB}$ et $\widehat{YAI}$ sont complémentaires puisque le triangle ABX est rectangle en B, du fait que $ABCD$ est un rectangle) et les points L, S et K sont alignés.

$\widehat{JRK} = \widehat{JRC} + \widehat{CRS} + \widehat{SRK}$, puis $\widehat{JRK} = \widehat{IAD} + 90° + \widehat{YAI}$ (car l'angle est $\widehat{CRS}$ droit puisque le quadrilatère $TCRS$ est un rectangle), puis $\widehat{JRK} = 180°$ (car les angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{AYI}$ sont complémentaires puisque le triangle AYD est rectangle en A, du fait que $ABCD$ est un rectangle) et les points J, R et K sont alignés.

7. Quelle est l'aire du quadrilatère $IJKL$ en fonction de x ?

J'utilise la conservation des aires par déplacement.

$Aire(IJKL) = Aire\ (IXCD) + Aire\ (DTSL) + Aire\ (SRK) + Aire(XJR) + Aire(TCRS) = Aire\ (IXCD) + Aire(YBXI) + Aire(AYI) + Aire(AID) + Aire(TCRS) = Aire(ABCD) + Aire(TCRS) = 10 \times 5 + 3 \times (10 - x) = 80 - 3 \times x$.

8. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme (on supposera acquis le fait que le quadrilatère $IJKL$ est convexe).

Je peux peut-être utiliser la caractérisation du parallélogramme par ses angles opposés ...

$\widehat{SKR} = \widehat{AIY} = \widehat{XID}$ (car les angles $\widehat{AIY}$ et $\widehat{XID}$ sont opposés par le sommet I).

$\widehat{DLS} = \widehat{YIX} = \widehat{AID} = \widehat{XJR}$ (car les angles $\widehat{YIX}$ et $\widehat{AID}$ sont opposés par le sommet I).

Ainsi, le quadrilatère $IJKL$, supposé convexe, a ses angles opposés égaux, et le quadrilatère $IJKL$ est, par conséquent, un parallélogramme.

9. Donner la valeur de x lorsque le quadrilatère $IJKL$ est un losange.

Je poursuis ...

Pour que le parallélogramme $IJKL$ soit un losange, il faut que $IJ = IL$.

Mais, $IL = ID + DL = ID + YI = YD = \sqrt{(AD^2 + AY^2)} = \sqrt{(25 + (10\text{-}x)^2)}$ (car le triangle AYD est rectangle en A du fait que $ABCD$ est un rectangle et je peux donc utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle).

D'autre part, $IJ = IX + XJ = IX + AI = AX = \sqrt{(AB^2 + BX^2)} = \sqrt{(10^2 + 3^2)} = \sqrt{109}$ (car le triangle ABX est rectangle en B du fait que $ABCD$ est un rectangle et je peux donc utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle).

Je déduis $\sqrt{(25 + (10 - x)^2)} = \sqrt{109}$, puis $25 + (10 - x)^2 = 109$ ou encore $10 - x = \sqrt{(109 - 25)} = \sqrt{84} = 2 \text{ x } \sqrt{21}$ et $x = 10 - 2 \text{ x } \sqrt{21}$.

10. Lorsque I est le milieu du segment $[AX]$. Quelle est alors la valeur de x ?

10.a) Montrer que I est un point de la médiatrice du segment $[BX]$.
10.b) Soient E le milieu du segment $[AB]$ et F le milieu du segment $[DC]$. Montrer que le point I est sur la droite (EF).
10.c) Quelles sont les mesures des segments $[EI]$ et $[IF]$?

10.d) Soit Δ la parallèle à la droite (AB) passant par J. Δ coupe la droite (EF) en G et la droite (YD) en H.
10.d)i. Quelles sont les mesures des segments $[IG]$ et $[GF]$?
10.d)ii. Déduire la mesure du segment $[HG]$, puis celle de $[HJ]$.
10.d)iii. Déduire la mesure du segment $[AY]$.
10.d)iv. Conclure.

Ces questions méritent bien une nouvelle figure ...

Dans l'animation ci-dessus, il suffit de déplacer correctement le point Y.

Je nomme d la médiatrice du segment $[BX]$. La droite d et la droite (AB) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BX) (utilisation d'une propriété de la médiatrice et du fait que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle), puis les droites d et (AB) sont parallèles (par composition de perpendicularité et de perpendicularité) et enfin, par la réciproque du théorème des milieux, la droite d coupe le segment $[AX]$ en son milieu, qui est I et I est sur la médiatrice du segment $[BX]$.

Je nomme d' la médiatrice du segment $[AB]$. La droite d' est la droite (EF) car ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (AB) ((EF) étant une médiane du rectangle $ABCD$) et passent par le point E. La droite d' et la droite (BX) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) (utilisation d'une propriété de la médiatrice et du fait que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle), puis les droites d' et (BX) sont parallèles (par composition de perpendicularité et de perpendicularité) et enfin, par la réciproque du théorème des milieux, la droite d' coupe le segment $[AX]$ en son milieu, qui est I et I est sur la droite (EF).

I est milieu du segment $[AX]$ et E est milieu du segment $[AB]$, donc, par le théorème des milieux, $EI = BX/2 = 3/2$. Je sais également que $EF = AD = BC$ (propriété de la médiane d'un rectangle), puis $IF = EF - EI = 5 - 3/2 = 7/2$.

Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (AE) et (JG) et aux sécantes (EG) et (AJ) donne $IE/IG = IA/IJ$ $(= EA/GJ)$, mais comme $IA/IJ = IA/AX = 1/2$, je déduis que $IG = 2 \text{ x } IE = 2 \text{ x } 3/2 = 3$. Enfin, $GF = IF - IG = 7/2 - 3 = 1/2$.

Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles *(HG)* et *(DF)* et aux sécantes *(ID)* et *(IF)* donne *HG/DF = IG/IF (= IH/ID)*, mais comme *F* est milieu du segment *[DC]* (d'après une propriété de la médiatrice), je déduis que *HG = 5 x 3/(7/2) = 30/7*. De même, le théorème de Thalès appliqué aux parallèles *(EA)* et *(GJ)* et aux sécantes *(EG)* et *(AJ)* donne *GJ/EA (= IJ/IA) = IG/IE*, mais comme *E* est milieu du segment *[AB]* (d'après une propriété de la médiatrice), je déduis que *GJ = 5 x 3/(3/2) = 10*. Enfin, *HJ = HG + GJ* (car *G* appartient au segment *[HJ]*) et *HJ = 10 + 30/7 = 100/7*.

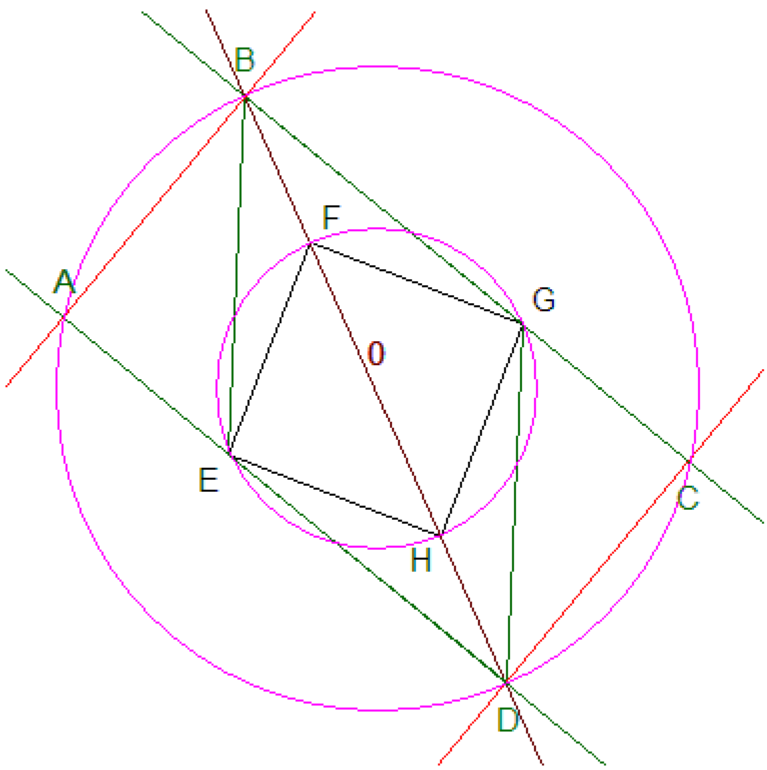
Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles *(AY)* et *(HJ)* et aux sécantes *(AJ)* et *(YH)* donne *AY/HJ = IA/IJ (= IY/IH)*, mais comme *IA/IJ = IA/AX = 1/2*, je déduis que *IA = 1/2 x IJ = 1/2 x 100/7 = 50/7*.

Comme *AB = AY + YB* (car *Y* appartient au segment *[AB]*), je déduis que *x = 10 - 50/7 = 20/7*.

Exercice [Lille, 1998]

L'activité "Découverte" ci-dessous est extraite du "Nouvel Objectif Calcul CM2".

DECOUVERTE



Reproduis la figure ci-contre sur du papier uni.

Décalque dans cette figure un rectangle, un carré, un trapèze, un losange et un quadrilatère qui n'est aucune des figures précédentes.

Il ne vous est pas demandé de réaliser cette activité telle quelle !

Les lettres désignant les sommets ne faisaient pas partie de l'original.

1. Donnez, en les désignant par la suite de leurs sommets, quatre quadrilatères tracés sur la figure (sommets et côtés présents), et qui ne sont ni un rectangle, ni un carré, ni un trapèze, ni un losange.

Une personne ayant observé le dessin, en fait la description (incomplète) suivante : "Il y a un cercle et *4* points *A*, *B*, *C* et *D* sur ce cercle (dans le sens des aiguilles d'une montre) ; *ABCD* est un rectangle et *EFGH* est un carré ; *E* est sur le segment *[AD]* et *G* sur le segment *[BC]* ; *(EB)//(GD)*.

2. Que peut-on affirmer de *EBGD* d'après cette description et d'après elle seule ? (on pourra s'aider d'un dessin à main levée). Justifiez.

3. Quel(s) renseignement(s) supplémentaire(s) peut-on ajouter à la description pour garantir que *EBGD* est un losange ? (On n'utilisera pas les mots "parallélogrammes", "rectangle", "carré" et "losange".) Justifiez.

4. Lorsque *EBGD* est un losange, que peut-on affirmer des points *D*, *H*, *F* et *B* ? Justifiez.

5. Prouvez que les cercles ont même centre.

6. Donnez un programme de construction de cette figure, en prenant au maximum deux mesures sur le dessin original, et reproduisez-la en suivant ce programme. Indiquez clairement quelles sont les mesures que vous avez prises, et les instruments utilisés (rapporteur exclu).

7. On imagine une autre figure, vérifiant tous les renseignements de cette description -y compris le fait que *EBGD* est un losange-, et dans laquelle le triangle *AEB* est rectangle isocèle. Quel est alors le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ? Justifiez.

Solution [Lille, 1998]

1. Donnez, en les désignant par la suite de leurs sommets, quatre quadrilatères tracés sur la figure (sommets et côtés présents), et qui ne sont ni un rectangle, ni un carré, ni un trapèze, ni un losange.

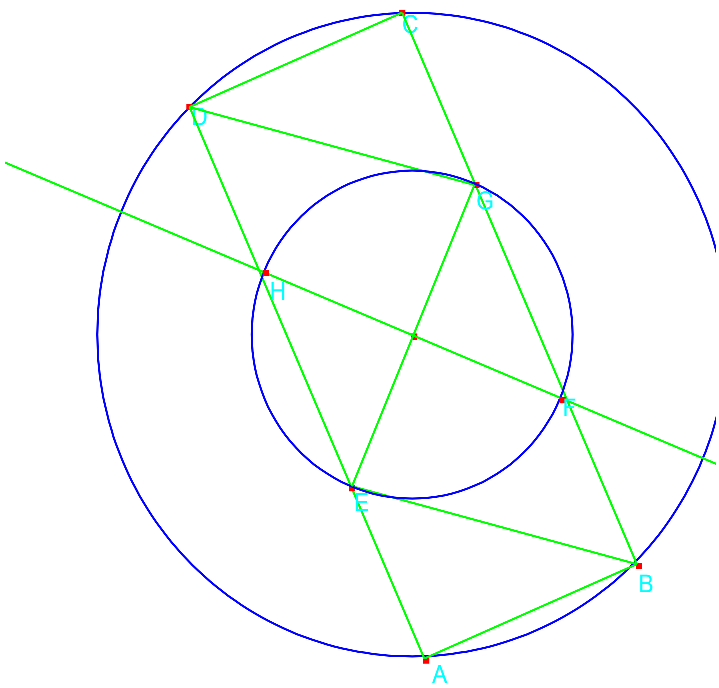
En voici six : *BGFE* ; *BGHE* ; *DGFE* ; *DGHE* ; *ABFE* ; *CDHG*.

Une personne ayant observé le dessin, en fait la description (incomplète) suivante : "Il y a un cercle et *4* points *A*, *B*, *C* et *D* sur ce cercle (dans le sens des aiguilles d'une montre) ; *ABCD* est un rectangle et *EFGH* est un carré ; *E* est sur le segment *[AD]* et *G* sur le segment *[BC]* ; *(EB)//(GD)*.

2. Que peut-on affirmer de *EBGD* d'après cette description et d'après elle seule ? (on pourra s'aider d'un dessin à main levée). Justifiez.

Je commence par tracer une figure qui tient compte uniquement de la description précédente ...

Dans l'animation suivante, les points *C*, *D* et *E* sont mobiles. Je pourrai notamment déplacer le point *C* ou le point *D* pour que les points *D*, *H*, *F* et *B* soient alignés.



EBGD est un parallélogramme car *(EB)//(GD)* (d'après la description ci-haut) et car *(BG)//(DE)* (puisque *ABCD* est un rectangle et donc *(BC)//(DA)*).

3. Quel(s) renseignement(s) supplémentaire(s) peut-on ajouter à la description pour garantir que *EBGD* est un losange ? (On n'utilisera pas les mots "parallélogrammes", "rectangle", "carré" et "losange".) Justifiez.

"Le triangle *EBG* est isocèle en *B*". Avec cette condition supplémentaire, le parallélogramme *EBGD* a deux côtés consécutifs égaux et est donc un losange.

4. Que peut-on affirmer des points *D*, *H*, *F* et *B* ? Justifiez.

.La droite *(FH)* est médiatrice du segment *[EG]* (propriété du carré *EFGH*). La droite *(BD)* est médiatrice du segment *[EG]* (propriété du losange *EBGD*). Les droites *(FH)* et *(BD)* sont donc confondues (car toutes deux médiatrices du même segment *[EG]*). Les points *D*, *H*, *F* et *B* sont, par conséquent, alignés.

5. Prouvez que les cercles ont même centre.

.Soit *O* l'intersection des diagonales du rectangle *ABCD* (c'est également le centre du cercle circonscrit au rectangle *ABCD*). *O* est alors milieu du segment *[BD]* (par propriété des diagonales d'un rectangle).
Soit *O'* l'intersection des diagonales du losange *EBGD*. *O'* est alors milieu du segment *[BD]* (par propriété des diagonales d'un losange). *O'* est également milieu du segment *[EG]* (par propriété des diagonales d'un losange).
Soit *O''* l'intersection des diagonales du carré *EFGH* (c'est également le centre du cercle circonscrit au carré *EFGH*). *O''* est alors milieu du segment *[EG]* (par propriété des diagonales d'un carré).
Par suite, *O* et *O'* sont confondus (tous deux milieux du même segment *[BD]*) et *O'* et *O''* sont confondus (tous deux milieux du même segment *[EG]*).

Les cercles ont donc même centre.

6. Donnez un programme de construction de cette figure, en prenant au maximum deux mesures sur le dessin original, et reproduisez-la en suivant ce programme. Indiquez clairement quelles sont les mesures que vous avez prises, et les instruments utilisés (rapporteur exclu).

Un exemple de construction, parmi d'autres :

Mesures : $BD = a$ et $EG = b$.

Je trace deux droites *d* et *d'* perpendiculaires qui se coupent en *O* (utilisation de l'équerre). Sur *d*, je place *D* et *B* de part et d'autre de *O* tels que $OD = a/2$ et $OB = a/2$ (utilisation de la règle graduée). Sur *d'*, je place *E* et *G* de part et d'autre de *O* tels que $OE = b/2$ et $OG = b/2$ (utilisation de la règle graduée). Je trace le cercle *(C)* de centre *O* et de rayon *a* (utilisation du compas et de la règle graduée pour la prise de mesure du rayon). Je trace la droite *(DE)* qui coupe le cercle *(C)* en deux points distincts *D* et *A* (utilisation de la règle non graduée). Je trace la droite *(BG)* qui coupe le cercle *(C)* en deux points distincts *B* et *C* (utilisation de la règle non graduée). Je trace le cercle *(C')* de centre *O* et de rayon *b* (utilisation du compas et de la règle graduée pour la prise de mesure du rayon). Le cercle *(C')* coupe la droite *d* en les deux points distincts *H* et *F*. Je complète la figure en traçant les droites *(AB)*, *(DC)*, *(EB)*, *(GD)*, *(EF)*, *(FG)*, *(GH)*, *(HE)*.

7. On imagine une autre figure, vérifiant tous les renseignements de cette description -y compris le fait que *EBGD* est un losange-, et dans laquelle le triangle *AEB* est rectangle isocèle. Quel est alors le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ? Justifiez. .

Par application directe du théorème de Pythagore dans le triangle *AEB* rectangle en *A*, je déduis que $AE^2 + AB^2 = EB^2$, et comme $AB = AE$ (le triangle est isocèle), il s'ensuit que $EB = AB \times \sqrt{2}$. Enfin, $DA = DE + EA$ (car *E* appartient au segment *[DA]*), puis $DA = EB + AB$ (car $DE = EB$ puisque *DEBG* est un losange et car $AE = AB$ puisque *AEB* est un triangle isocèle en *A*), et enfin $DA = (1 + \sqrt{2}) \times AB$ (i.e. $AD/AB = 1+ \sqrt{2}$).