Exercice [Dijon, Nancy-Metz, Strasbourg, 1998]

Soit un cercle *C* de centre *O* et de rayon *4* cm.

Les enfants de CM2 savent placer, à l'aide du compas seul, les sommets d'un hexagone régulier *ABCDEF* inscrit dans ce cercle.

1. Donnez le programme d'une telle construction et réalisez-la.

L'objet du problème qui suit est de démontrer quelques propriétés géométriques liées à cette configuration.

2. Démontrer que la droite *(AC)* est la médiatrice du segment *[BO]* et que la droite *(BO)* est la médiatrice du segment *[AC]*.

3. Démontrer que les points *A* et *D* sont diamétralement opposés.

4. Quelle est la nature du quadrilatère *ACDF* ? Justifier la réponse.

5. Calculez l'aire de ce quadrilatère.

Les droites *(AC)* et *(BF)* se coupent en *I*.

6. Démontrez que *A* et *B* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

7. Démontrez que *C* et *F* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

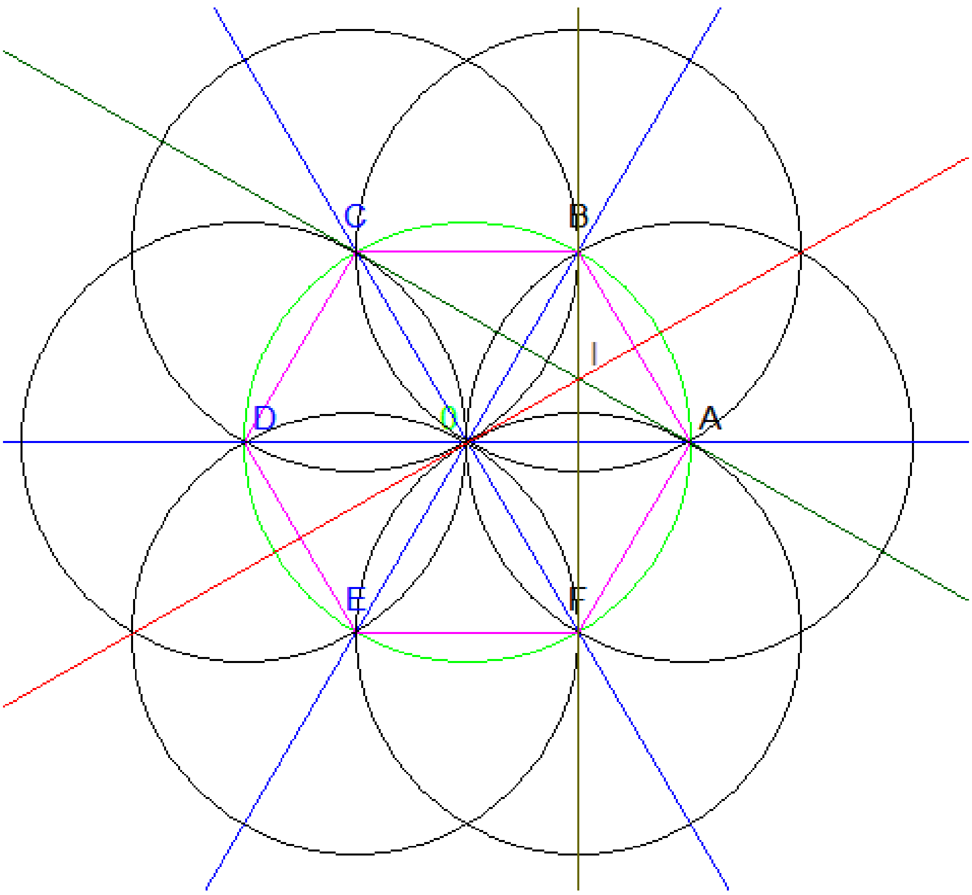
Solution [Dijon, Nancy-Metz, Strasbourg, 1998]

Soit un cercle *C* de centre *O* et de rayon *4* cm.

Les enfants de CM2 savent placer, à l'aide du compas seul, les sommets d'un hexagone régulier *ABCDEF* inscrit dans ce cercle.

1. Donnez le programme d'une telle construction et réalisez-la.

Ces fameuses rosaces ...



Voici une construction utilisant uniquement le compas (la règle graduée est seulement utilisée pour tracer l'hexagone régulier) ...

Je trace un cercle C_1 de centre 0 et de rayon 4 cm.

Je place un point A sur ce cercle.
Je trace un cercle C_2 de centre A et de rayon 4 cm.

Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points distincts B et F.

Je trace un cercle C_3 de centre B et de rayon 4 cm.

Les cercles C_1 et C_3 se coupent en deux points distincts C et A.

Je trace un cercle C_4 de centre C et de rayon 4 cm.

Les cercles C_1 et C_4 se coupent en deux points distincts D et B.

Je trace un cercle C_5 de centre D et de rayon 4 cm.

Les cercles C_1 et C_5 se coupent en deux points distincts E et C.

J'obtiens l'hexagone "régulier" *ABCDEF*.
Remarque : je suppose ne pas encore savoir que cet hexagone est régulier et je travaille uniquement à partir de la construction ...

2. Démontrer que la droite *(AC)* est la médiatrice du segment *[BO]* et que la droite *(BO)* est la médiatrice du segment *[AC]*.

O est centre du cercle C_1. Je déduis que $OA = OB = OC = OD = OE = OF$. A est centre du cercle C_2. Je déduis que $AO = AB$. B est centre du cercle C_3. Je déduis que $BA = BC$. Par suite, $AB = BC = CO = OA$ et *ABCO* est un losange. Les diagonales d'un losange en sont des axes de symétrie orthogonale, donc la droite *(AC)* est la médiatrice du segment *[BO]* et la droite *(BO)* est la médiatrice du segment *[AC]*.

3. Démontrer que les points A et D sont diamétralement opposés.

C est centre du cercle C_4. Je déduis que $CB = CD$. Par suite, $BC = CD = DO = OB$ et *BCDO* est un losange.

Comme *ABCO* est un losange, je déduis que les droites *(OA)* et *(BC)* sont parallèles. Comme *BCDO* est un losange, je déduis que les droites *(OD)* et *(BC)* sont parallèles. Par transitivité du parallélisme, les droites *(OA)* et *(OD)* sont parallèles. Ces droites *(OA)* et *(OD)* ayant le point O en commun, elles sont confondues. La droite *(AD)* passant par le centre O du cercle C_1, le segment *[AD]* est donc un diamètre du cercle C_1.

4. Quelle est la nature du quadrilatère *ACDF* ? Justifier la réponse.

A est centre du cercle C_2. Je déduis que $AF = AB$. Par suite, $FA = AB = BO = OF$ et *FABO* est un losange.

Comme *ABCO* est un losange, je déduis que les droites *(OC)* et *(AB)* sont parallèles. Comme *FABO* est un losange, je déduis que les droites *(OF)* et *(AB)* sont parallèles. Par transitivité du parallélisme, les droites *(OC)* et *(OF)* sont parallèles. Ces droites *(OC)* et *(OF)* ayant le point O en commun, elles sont confondues. La droite *(CF)* passant par le centre O du cercle C_1, le segment *[CF]* est donc un diamètre du cercle C_1.

Le quadrilatère *ACDF* est donc un rectangle car ses diagonales se coupent en leur milieu O (le centre du cercle est le milieu d'un diamètre) et sont de même longueur (le diamètre).

5. Calculez l'aire de ce quadrilatère.

Aire(ACDF) = *AC x CD* (formule de l'aire d'un rectangle). D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACD, rectangle en C, je déduis $AC^2 + CD^2 = AD^2$, puis que $AC = \sqrt{(AD^2 - CD^2)} = \sqrt{(8^2 - 4^2)}$ cm = $4 \times \sqrt{3}$ cm. Par suite, *Aire(ACDF)* = $AC \times CD = 4 \times \sqrt{3} \times 4$ cm^2 = $16 \times \sqrt{3}$ cm^2.

6. Démontrez que *A* et *B* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

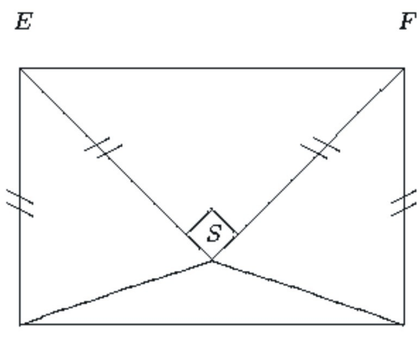
ABCO est un losange, donc la droite *(AC)* est médiatrice de *[OB]* (car les diagonales d'un losange est axe de symétrie). *FABC* est un losange, donc la droite *(FB)* est médiatrice de *[OA]* (car les diagonales d'un losange est axe de symétrie). Il s'ensuit que *I* est point de concours de deux des médiatrices du triangle *OAB*. *I* est donc aussi point de la médiatrice du segment *[AB]*. Comme le triangle *OAB* est équilatéral (par construction), la médiatrice du segment *[AB]* passe par *O* (car la médiatrice est aussi hauteur, médiane, bissectrice). Enfin, *A* et *B* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

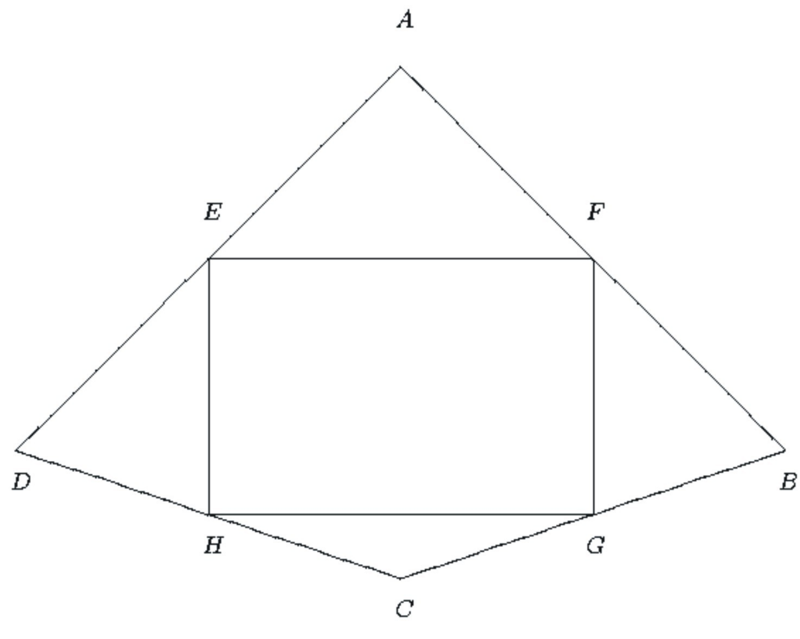
7. Démontrez que *C* et *F* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

La médiatrice du segment *[AB]* est perpendiculaire à la droite *(AB*) et je me rappelle avoir montré que les droite *(AB)* et *(FC)* étaient parallèles, je déduis donc que la médiatrice du segment *[AB]* est perpendiculaire à la droite *(FC)* (par composition de parallélisme et de perpendicularité). La médiatrice du segment *[AB]* passe également par *O*, milieu du segment *[CF]*. Ainsi, la médiatrice du segment *[AB]* est également la médiatrice du segment *[FC]* (car elle est perpendiculaire à la droite *(FC)* et passe par le milieu du segment *[FC]*). Enfin, *C* et *F* sont symétriques par rapport à la droite *(OI)*.

Exercice [Toulouse, 1998]

On décolle les quatre rabats d'une enveloppe rectangulaire afin d'en obtenir un modèle développé (on ne tient pas compte des languettes permettant de coller les rabats).





La première figure est appelée figure 1, la seconde, figure 2.

L'objectif de cet exercice est de déterminer certaines propriétés de la figure dépliée.

Tout résultat doit être démontré, toute réponse doit être justifiée.

On désigne par *a* la mesure du segment *[AE]*.

1. En vous aidant de la figure 1, montrer que *AE* = *ED*. On admettra de même que *DH* = *HC*, *CG* = *GB*, et *BF* = *FA*.

2. Démontrer que les points A, E et D sont alignés. On admettra de même que les points D, H et C sont alignés, que les points C, G et B sont alignés et que les points B, F et A sont alignés.

3. Démontrer que la figure 2 admet un axe de symétrie que l'on précisera.

4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EDH}$ et en déduire celle de l'angle $\widehat{FBG}$.

5. Calculer en fonction de a l'aire du quadrilatère $ABCD$.

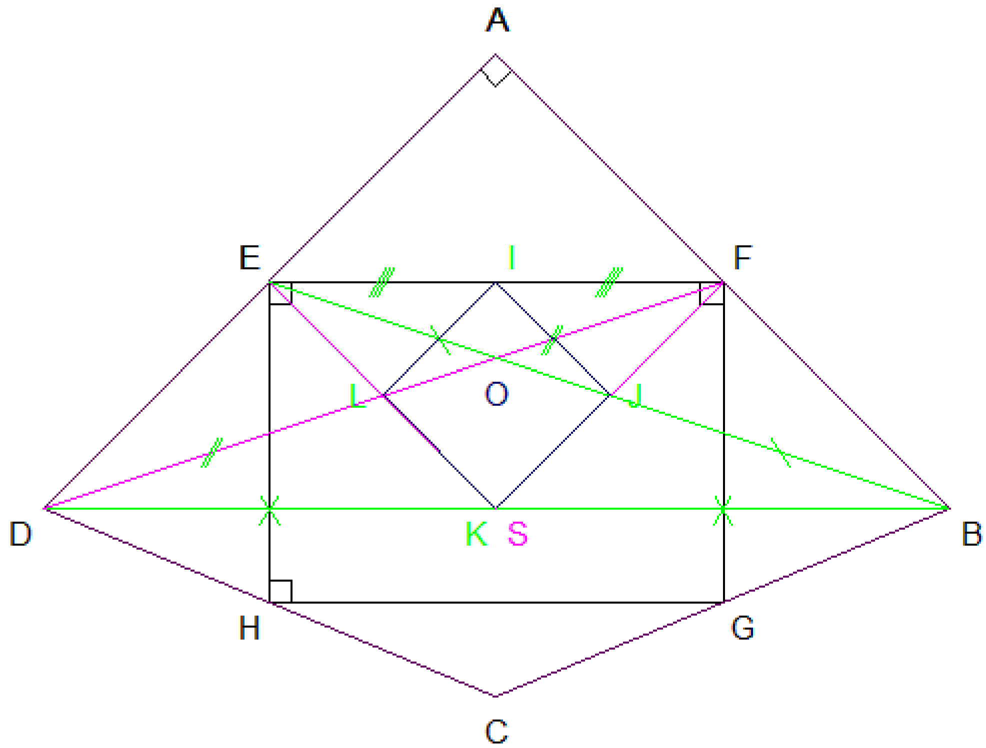
6. Exprimer en fonction de a les longueurs AC et BD.

7. Le fabricant d'enveloppes souhaite inscrire son logo en filigrane à l'intérieur de l'enveloppe. Il prévoit d'insérer celui-ci à l'intérieur d'un quadrilatère $IJKL$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[EB]$, $[BD]$ et $[DF]$. On appelle O le point d'intersection des droites (EB) et (DF).

> 7.a) Que représente le point O pour le triangle ABD ? Démontrer que $OJ/OB = OL/OD = ¼$.
> 7.b) Montrer que les droites (JL) et (BD) sont parallèles. En déduire la longueur JL en fonction de a.
> 7.c) Démontrer que $AI = IK = a \times \sqrt{2}/2$.
> 7.d) Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Solution [Toulouse, 1998]

La notion de pliage est immédiatement rattachée à la notion de symétrie orthogonale. Je vais donc, après avoir tracé une figure qui regroupe les informations des deux figures, utiliser les propriétés des différentes symétries orthogonales en acte dans ce sujet ...



1. En vous aidant de la figure 1, montrer que $AE = ED$. On admettra de même que $DH = HC$, $CG = GB$, et $BF = FA$.

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (EF), je déduis que $EA = ES$ (une isométrie conserve les distances).

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (EH), je déduis que $ES = ED$ (une isométrie conserve les distances).

Par suite, $EA = ED$.

2. Démontrer que les points A, E et D sont alignés. On admettra de même que les points D, H et C sont alignés, que les points C, G et B sont alignés et que les points B, F et A sont alignés.

Du fait que le triangle AEF est isocèle rectangle en A, je déduis $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} = 45°$ (car la somme des mesures des angles d'un triangle est de $180°$ et car les angles à la base principale d'un triangle isocèle sont égaux en mesure).

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (EF), je déduis que $\widehat{AEF} = \widehat{FES} = 45°$ (une isométrie conserve les angles).

Comme $EFGH$ est un rectangle, je déduis $\widehat{FES} + \widehat{SEH} = \widehat{FEH} = 90°$, puis $\widehat{SEH} = 45°$.

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (EH), je déduis que $\widehat{SEH} = \widehat{HED} = 45°$ (une isométrie conserve les angles).

Il s'ensuit que $\widehat{AED} = \widehat{AEF} + \widehat{FES} + \widehat{SEH} + \widehat{HED} = 180°$ et les points A, E et D sont alignés.

3. Démontrer que la figure 2 admet un axe de symétrie que l'on précisera.

Je vais montrer que la droite (AC) est axe de symétrie de la figure ...

Soit (d) la médiatrice du segment $[EF]$.

La droite (d) est axe de symétrie orthogonale du rectangle $EFGH$ (le rectangle admet deux axes de symétries orthogonales). Ainsi, la droite (d) est également médiatrice du segment $[GH]$.

Le triangle AEF est isocèle en A, donc la médiatrice de $[EF]$ passe par le point A.

Le triangle CGH est isocèle en C, donc la médiatrice de $[GH]$ passe par le point C.

Le triangle SEF est isocèle en S, donc la médiatrice de $[EF]$ passe par le point S.

Il s'ensuit que la droite (d) est la droite (AC).

En résumé, si on regarde la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (AC), $s(A) = A$, $s(E) = F$, $s(H) = G$, et $s(C) = C$.

Je déduis que $s((AE)) = (AF)$ et $s((CH)) = (CG)$ (une isométrie conserve l'alignement). Je déduis que $s(D) = B$ (car D est le point de concours des droites (AE) et (CH) et car B est le point de concours des droites (AF) et (CG)).

Par conséquent, la figure admet la droite (AC) pour axe de symétrie orthogonale.

4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EDH}$ et en déduire celle de l'angle $\widehat{FBG}$.

Le triangle EDH est isocèle, par conséquent $\widehat{EDH} = (180°- \widehat{DEH})/2 = (180° - 45°)/2 = 67{,}5°$ (car la somme des mesures des angles d'un triangle est de $180°$ et car les angles à la base principale d'un triangle isocèle sont égaux en mesure).

La symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) permet de conclure que $\widehat{FBG} = 67{,}5°$ (une isométrie conserve les angles).

5. Calculer en fonction de a l'aire du quadrilatère $ABCD$.

L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale au double de l'aire du rectangle $EFGH$ (d'après le dépliage de l'enveloppe), laquelle est égale à $2 \times EH \times EF$.

Or $EH = a$ et $EF = \sqrt{2} \times a$ (d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle AEF).

Il s'ensuit $Aire(ABCD) = 2 \times \sqrt{2} \times a^2$.

6. Exprimer en fonction de a les longueurs AC et BD.

Dans le triangle ADB, E est milieu du segment $[AD]$ et F est milieu du segment $[AB]$, donc, par le théorème de la droite des milieux, je déduis que $BD = 2 \times EF = 2 \times \sqrt{2} \times a$.

Dans le triangle ACD, E est milieu du segment $[AD]$ et H est milieu du segment $[CD]$, donc, par le théorème de la droite des milieux, je déduis que $AC = 2 \times EH = 2 \times a$.

7. Le fabricant d'enveloppes souhaite inscrire son logo en filigrane à l'intérieur de l'enveloppe. Il prévoit d'insérer celui-ci à l'intérieur d'un quadrilatère $IJKL$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[EB]$, $[BD]$ et $[DF]$. On appelle O le point d'intersection des droites (EB) et (DF).

7.a) Que représente le point O pour le triangle ABD ? Démontrer que $OJ/OB = OL/OD = ¼$.
7.b) Montrer que les droites (JL) et (BD) sont parallèles. En déduire la longueur JL en fonction de a.
7.c) Démontrer que $AI = IK = a \times \sqrt{(2)}/2$.
7.d) Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Avant de passer à cette question, j'aimerais bien montrer que les points S et K sont confondus.

La droite (DS) est perpendiculaire à la droite (EH) (car D et S sont symétriques orthogonalement par rapport à la droite (EH)). Et, comme la droite (EH) est parallèle à la droite (AC) (propriété d'une médiane d'un rectangle), la droite (DS) est perpendiculaire à la droite (AC).

La droite (DB) est perpendiculaire à la droite (AC) (car D et B sont symétriques orthogonalement par rapport à la droite (AC)).

Les droites (DB) et (DS) sont confondues car toutes deux perpendiculaires à la même droite (AC) et ayant le point D en commun.

Ainsi, S est sur les droites (AC) et (BD).

De même, K est sur les droites (AC) et (BD) car (AC) est axe de symétrie de la figure, et donc le milieu K du segment $[BD]$ est sur la droite (AC) (car D et B sont symétriques orthogonalement par rapport à la droite (AC)).

Puis, S et K sont confondus.

Je passe à la question 7.a).

Dans le triangle ADB, le segment $[EB]$ est une médiane (car E est milieu du segment $[AD]$) et le segment $[FD]$ est une médiane également (car F est milieu du segment $[AB]$). Par suite, O est le centre de gravité du triangle ABD (intersection de deux médianes de ce triangle).

D'après une propriété du centre de gravité d'un triangle, on déduit $EO = EB/3$. Et, ensuite, $OJ/OB = (EJ - EO)/(EB - EO) = (EB/2 - EB/3)/(EB - EB/3) = 1/4$.

De même, $OL/OD = 1/4$.

Je passe à la question 7.b).

Comme $OJ/OB = OL/OD = ¼$, et comme les points JOB et LOD sont lus dans le même ordre, la réciproque du théorème de Thalès me donne que les droites (JL) et (BD) sont parallèles.

Qui plus est, $JL/BD = ¼$, par le théorème de Thalès. Puis, $JL = \sqrt{2} \times a/2$.

Je passe à la question 7.c).

Le quadrilatère $AFKE$ est un carré (car $AF = FK = KE = EA$, donc $AFKE$ est un losange et comme l'angle $\widehat{EAF}$ est droit, je déduis que $AFKE$ est un losange qui possède un angle droit et $AFKE$ est, par conséquent, un carré).

Les diagonales de ce carré *AFKE* se coupent en *I* (car *I* est milieu du segment *[EF]*).

Par suite, *I* est milieu du segment *[AK]* et $AI = IK = \sqrt{2} \times a/2$.

Je passe à la question 7.d).

Dans le triangle *BDF*, *L* est milieu du segment *[DF]* et *K* est milieu du segment *[DB]*, donc, par le théorème de la droite des milieux, $KL = BF/2$.

Dans le triangle *BDE*, *J* est milieu du segment *[BE]* et *K* est milieu du segment *[DB]*, donc, par le théorème de la droite des milieux, $JK = DE/2$.

Dans le triangle *BEF*, *J* est milieu du segment *[BE]* et *I* est milieu du segment *[EF]*, donc, par le théorème de la droite des milieux, $IJ = BF/2$.

Dans le triangle *DEF*, *L* est milieu du segment *[DF]* et *I* est milieu du segment *[EF]*, donc, par le théorème de la droite des milieux, $IL = DE/2$.

Et, comme $DE = BF$, j'obtiens $IJ = JK = KL = LI$, puis *IJKL* est un losange (côtés égaux en longueur).

De plus, on a montré en 7.b) et en 7.c) que $JL = IK = \sqrt{2} \times a/2$, donc le quadrilatère *IJKL* est un rectangle (diagonales égales en longueur).

Enfin, *IJKL* est un carré (car à la fois losange et rectangle).

Exercice [Aix, Marseille, 1995]

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

Dans un livre de CM2 (collection diagonale, Editions Nathan), on trouve l'activité décrite ci-dessous :

Sur une feuille de carton mince, on dessine un carré dont le côté mesure 6 cm et un carré ABCD de côté mesurant 8 cm sur la figure 1. On prend sur [BC] et [CD] les points E et F tels que BE = CF = 2 cm. On trace les segments [DE] et [AF] pour obtenir la figure 2. On découpe alors les deux carrés et de plus, en découpant le long de [DE] et [AF], on partage le carré ABCD en quatre morceaux. En utilisant sans les retourner, les cinq morceaux numérotés sur les figures 1 et 2 comme pièces d'un puzzle, on forme un nouveau carré en s'inspirant du schéma.

Le schéma donné à l'élève est en fait la figure 3 (ci-après), sans les lettres servant à désigner les points :

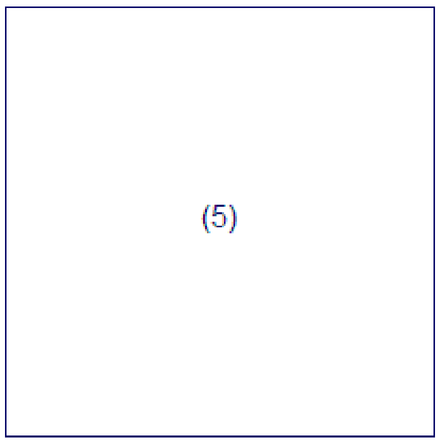


Figure 1

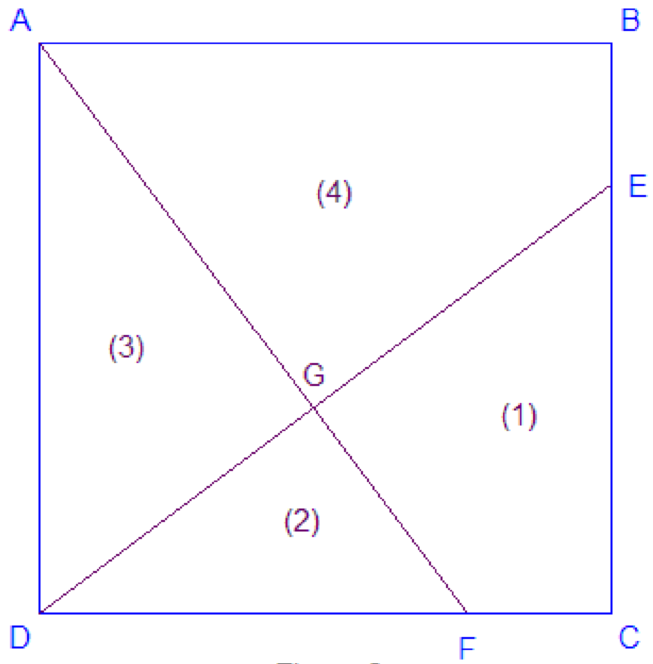


Figure 2

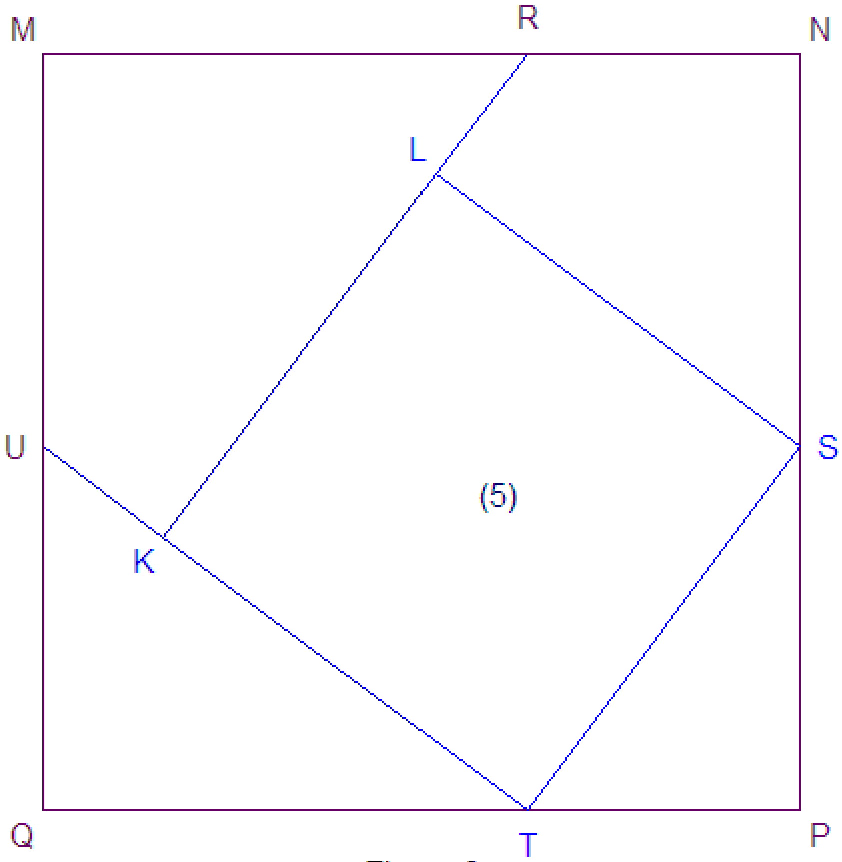


Figure 3

On admet qu'il est possible de réaliser un carré à l'aide de ces cinq pièces, comme c'est affirmé aux élèves dans l'activité.

Répondre aux questions suivantes :

1.a) Quelle est l'aire du carré *MNPQ* ?

1.b) En déduire la longueur de son côté.

1.c) Indiquer sur la figure 3, au moyen des numéros 1, 2, 3 et 4, la place occupée dans le carré *MNPQ* par chacune des pièces du puzzle. La pièce 5 est déjà placée.

Pour chacune des pièces 1, 2, 3 et 4, écrire la correspondance entre les sommets dans la figure 2 et ses sommets dans la figure 3. Utiliser pour cette réponse, le tableau ci-dessous :

Pièce	Sommet de la figure 2 vient en sommet de la figure 3
Pièce 1	C vient en …
Pièce 1	E vient en …
Pièce 1	F vient en …
Pièce 1	G vient en …
Pièce 2	D vient en …
Pièce 2	F vient en …
Pièce 2	G vient en …
Pièce 3	A vient en …
Pièce 3	D vient en …
Pièce 3	G vient en …
Pièce 4	A vient en …
Pièce 4	B vient en …
Pièce 4	E vient en …
Pièce 4	G vient en …

On se demande maintenant quelles propriétés de la figure 2 permettent de s'assurer qu'on obtiendra bien un carré dans la figure 3 avant d'avoir réalisé le puzzle. Dans les réponses aux questions ci-dessous, il s'agit seulement d'énoncer de telles propriétés sans chercher à les démontrer.

2.a) Pour que les points M, R et N soient alignés après la construction du puzzle, il faut que certains angles de la figure 2 vérifient une certaine relation. Quels sont ces angles et quelle est cette relation ?

2.b) Même question pour les alignements des points N, S et P, puis P, T et Q, puis Q, U et M.

2.c) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

2.d) Quelles relations entre les longueurs de la figure 2 impliquent les égalités : $MN = NP = PQ = QM$?

2.e) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

2.f) Quelle propriété dans la figure 2 implique que les angles du quadrilatère *MNPQ* sont droits ?

2.g) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

On y démontre quelques propriétés de la figure 2.

3.a) Démontrer que les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GFC}$ sont supplémentaires et que les angles $\widehat{GEC}$ et $\widehat{GDF}$ sont complémentaires.

3.b) Montrer également que les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{GFD}$ sont complémentaires.

3.c) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

4.Calculer dans la figure 2, les longueurs AF, DE, GD et GF.

Solution [Aix, Marseille, 1995]

1.a) Quelle est l'aire du carré *MNPQ* ?

J'utilise la conservation des aires.

$Aire(MNPQ) = (8^2 + 6^2)$ cm^2 $= 100$ cm^2.

1.b) En déduire la longueur de son côté.

Le côté du carré *MNPQ* est donc de $\sqrt{100}$ cm = 10 cm.

1.c) Indiquer sur la figure 3, au moyen des numéros 1, 2, 3 et 4, la place occupée dans le carré *MNPQ* par chacune des pièces du puzzle. La pièce 5 est déjà placée.

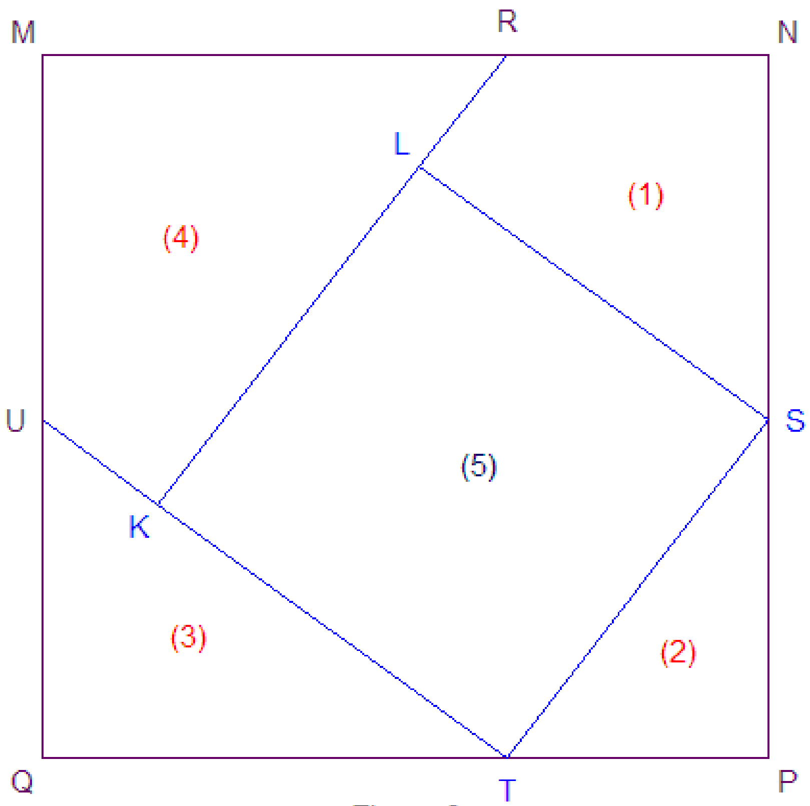


Figure 3

Pièce	Sommet de la figure 2 vient en sommet de la figure 3
Pièce 1	C vient en L
Pièce 1	E vient en S
Pièce 1	F vient en R
Pièce 1	G vient en N
Pièce 2	D vient en S
Pièce 2	F vient en T
Pièce 2	G vient en P
Pièce 3	A vient en T
Pièce 3	D vient en U
Pièce 3	G vient en Q
Pièce 4	A vient en R
Pièce 4	B vient en K
Pièce 4	E vient en U
Pièce 4	G vient en M

2.a) Pour que les points M, R et N soient alignés après la construction du puzzle, il faut que certains angles de la figure 2 vérifient une certaine relation. Quels sont ces angles et quelle est cette relation ?

2.b) Même question pour les alignements des points N, S et P, puis P, T et Q, puis Q, U et M.

2.c) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

2.d) Quelles relations entre les longueurs de la figure 2 impliquent les égalités : $MN = NP = PQ = QM$?

2.e) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

2.f) Quelle propriété dans la figure 2 implique que les angles du quadrilatère $MNPQ$ sont droits ?

2.g) Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

Pour chacune de ces questions, il me suffit d'utiliser la table des correspondances.

Pour que les points M, R et N soient alignés après la construction du puzzle, il faut que les angles $\widehat{MRK}$ de la pièce 4 et $\widehat{LRN}$ de la pièce 1 soient supplémentaires, ou encore, d'après le tableau des correspondances, que les angles $\widehat{GAB}$ de la pièce 4 et $\widehat{CFG}$ de la pièce 1 soient supplémentaires.

Pour que les points N, S et P soient alignés après la construction du puzzle, il faut que les angles $\widehat{NSL}$ de la pièce 1 et $\widehat{PST}$ de la pièce 2 soient complémentaires (l'angle $\widehat{LST}$ de la pièce 5 carrée étant droit), ou encore, d'après le tableau des correspondances, que les angles $\widehat{GEC}$ de la pièce 1 et $\widehat{GDF}$ de la pièce 2 soient complémentaires.

Pour que les points P, T et Q soient alignés après la construction du puzzle, il faut que les angles $\widehat{PTS}$ de la pièce 2 et $\widehat{QTU}$ de la pièce 3 soient complémentaires (l'angle $\widehat{STK}$ de la pièce 5 carrée étant droit), ou encore, d'après le tableau des correspondances, que les angles $\widehat{GFD}$ de la pièce 2 et $\widehat{GAD}$ de la pièce 3 soient complémentaires.

Pour que les points Q, U et M soient alignés après la construction du puzzle, il faut que les angles $\widehat{QTU}$ de la pièce 3 et $\widehat{KUM}$ de la pièce 4 soient supplémentaires, ou encore, d'après le tableau des correspondances, que les angles $\widehat{GDA}$ de la pièce 3 et $\widehat{BEG}$ de la pièce 4 soient supplémentaires.

Après les alignements des points M, R, N ; N, S, P ; P, T, Q ; et Q, U, M, il résulte que $MNPQ$ est un quadrilatère.

Pour que $MN = NP = PQ = QM$, il faut que $MR + RN = NS + SP = PT + TQ = QU + UM$, ou, d'après le tableau des correspondances, que $GA + FG = GE + DG = GF + AG = GD + EG$, ce qui revient à dire que $AF = DE$.

Le quadrilatère $MNPQ$ est alors un losange (car il a ses côtés égaux en longueur).

Pour que les angles $\widehat{MNP}$, $\widehat{NPQ}$, $\widehat{PQM}$ et $\widehat{QMN}$ soient droits, il faut que les angles $\widehat{RNS}$ de la pièce 1, $\widehat{SPT}$ de la pièce 2, $\widehat{TQU}$ de la pièce 3 et $\widehat{UMR}$ de la pièce 4 soient droits ou, d'après le tableau des correspondances, que les angles $\widehat{AGE}$ de la pièce 1, $\widehat{DGF}$ de la pièce 2, de $\widehat{AGD}$ la pièce 3 et $\widehat{EGA}$ de la pièce 4 soient droits, ce qui revient à dire que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

Le losange $MNPQ$ est alors un carré (car il a un angle droit).

3.a) Démontrer que les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GFC}$ sont supplémentaires et que les angles $\widehat{GEC}$ et $\widehat{GDF}$ sont complémentaires.

3.b) Montrer également que les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{GFD}$ sont complémentaires.

Je pars de l'hypothèse que la quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GFD}$ sont égaux car ces angles sont alternes internes et car les droites (AB) et (CD) sont parallèles (propriété du parallélogramme et, par conséquent, du carré). De plus, les angles $\widehat{DFG}$ et $\widehat{GFC}$ sont supplémentaires, car le point F appartient au segment $[DC]$. Par suite, les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GFC}$ sont supplémentaires.

Le triangle CDE est rectangle en C, donc les angles $\widehat{CDE}$ et $\widehat{CED}$ sont complémentaires, puis, les angles $\widehat{GEC}$ et $\widehat{GDF}$ sont complémentaires.

Le triangle ADF est rectangle en D, donc les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{DFA}$ sont complémentaires, puis, les angles $\widehat{DAG}$ et $\widehat{DFG}$ sont complémentaires.

3.c) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

Je vais commencer par montrer que les triangles DAF et CDE sont isométriques.

Je sais que $DA = CD = 8$ cm, que $FD = EC = 8 - 2$ cm $= 6$ cm et que les angles $\widehat{ADF}$ et $\widehat{DCE}$ sont égaux (car tous deux droits). Par conséquent, les triangles DAF et CDE sont isométriques (deux côtés et un angle communs).

Il s'ensuit que les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{CDE}$ sont égaux, puis les angles $\widehat{DFA}$ et $\widehat{CDE}$ sont complémentaires (car les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{DFA}$ sont complémentaires), donc les an $\widehat{GFD}$ gles et $\widehat{GDF}$ sont complémentaires, puis le triangle GDF est rectangle en G et les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

4.Calculer dans la figure 2, les longueurs AF, DE, GD et GF.

Je vais utiliser quelques propriétés des triangles rectangles.

Par le théorème de Pythagore appliqué au triangle DAF rectangle en D, je déduis que $AF^2 = DA^2 + DF^2$. Puis, $AF = \sqrt{(8^2 + 6^2)}$ cm $= 10$ cm.

Par le théorème de Pythagore appliqué au triangle CDE rectangle en C, je déduis que $DE^2 = CD^2 + CE^2$. Puis, $DE = \sqrt{(8^2 + 6^2)}$ cm $= 10$ cm.

$Aire(AFD) = (AF \times GD)/2$ (car les droites (GD) et (AF) sont perpendiculaires). D'autre part,

$Aire(AFD) = (AD \times DF)/2$. Ainsi, $GD = (AD \times DF)/AF = (8 \times 6)/10$ cm $= 4,8$ cm.

Et, maintenant que je sais que le triangle DFG est rectangle en G, j'utilise le théorème de Pythagore, et, $DF^2 = DG^2 + GF^2$, puis, $GF = \sqrt{(6^2 - 4,8^2)}$ cm $= 3,6$ cm.

Exercice [Reims, 1998]

Voici le programme de construction d'un pentagone $ABCDE$.

$[AB]$ est un segment de longueur 4 cm, de milieu O. (xy) est la médiatrice de $[AB]$. On appelle P le demi-plan de frontière (AB) qui contient la demi-droite $[Ox)$.

On construit la bissectrice de $\widehat{AOx}$; $[Ou)$ est la partie de cette bissectrice contenue dans P.

On construit la bissectrice de $\widehat{BOx}$; $[Ov)$ est la partie de cette bissectrice contenue dans P.

Le cercle centré en A et passant par B coupe $[Ou)$ en E.

Le cercle centré en B et passant par A coupe $[Ov)$ en C.

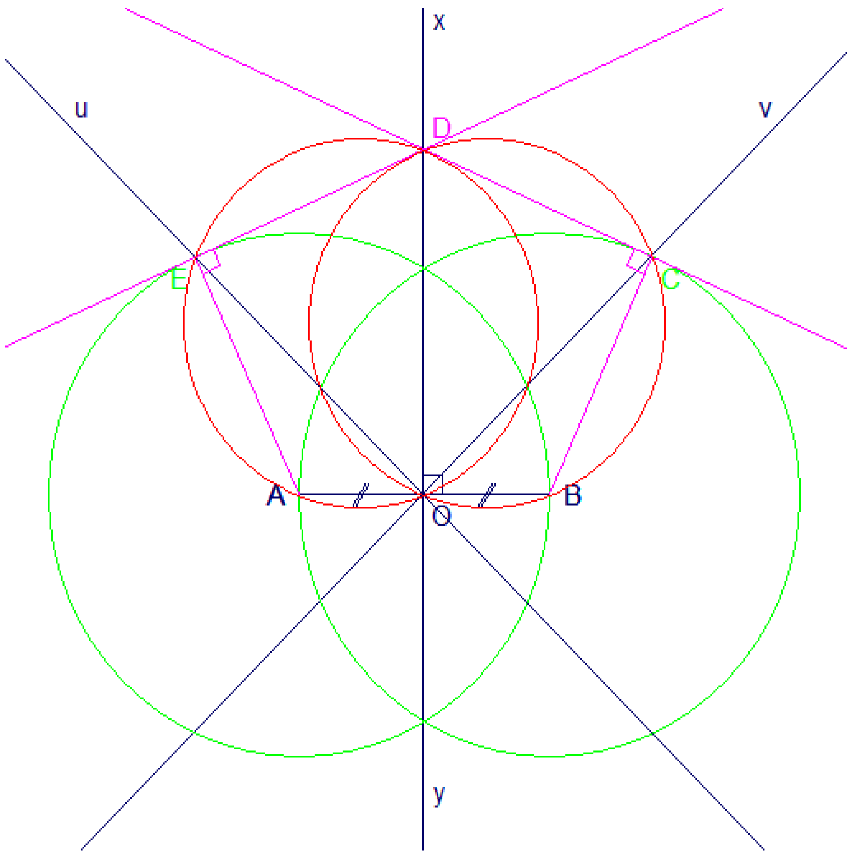
La perpendiculaire en E à (AE) coupe la perpendiculaire en C à (BC) en D.

1. Réaliser la figure avec soin.
2. Montrer que E et C sont symétriques par rapport à (xy), puis montrer que D est situé sur (xy).
3. Montrer que O et E sont sur le cercle de diamètre $[AD]$.
4. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADE}$.
5. Montrer que tous les côtés du pentagone $ABCDE$ ont même mesure.
6. Le pentagone $ABCDE$ est-il régulier ?

Rappel : Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc, ou des arcs égaux, ont même mesure.

Solution [Reims, 1998]

1. Réaliser la figure avec soin.



2. Montrer que E et C sont symétriques par rapport à (xy), puis montrer que D est situé sur (xy).

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite (xy).

(xy) est la médiatrice du segment $[AB]$, elle passe donc par le milieu O du segment $[AB]$. Ainsi, $s(O) = O$ et $s(A) = B$.

L'image par s du demi-plan P est le demi-plan P (par une isométrie, l'image du demi-plan contenant x, délimité par la droite (AB) est le demi-plan contenant x (x est invariant), délimité par la droite (AB) (la droite (AB) est globalement invariante)).

L'image par s du cercle C_1 de centre A et de rayon AB est le cercle C_2 de centre B et de rayon AB (par une isométrie, l'image du cercle de centre A et de rayon AB est un cercle de centre B (B est l'image de A) et de même rayon).

L'image par s de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOx}$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOx}$ (une isométrie conserve les angles).

En résumé, $s([Ox)) = [Oy)$ et $s(C_1) = C_2$, donc $s(E) = C$.

L'image par s de la perpendiculaire à la droite (AE) passant par E est la perpendiculaire (une isométrie conserve les angles) à la droite (BC) (image de la droite (AE)) passant par C (image de E). Ainsi, le point de concours D de ces deux droites est invariant par s.

Le pentagone $ABCDE$ admet donc un axe de symétrie orthogonale (xy).

3. Montrer que O et E sont sur le cercle de diamètre $[AD]$.

L'angle $\widehat{AED}$ est droit (par construction) et donc E est sur le cercle de diamètre $[AD]$.

L'angle $\widehat{AOD}$ est droit (car la droite (OD) est médiatrice du segment $[AB]$) et donc O est sur le cercle de diamètre $[AD]$.

4. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADE}$.

Je vais utiliser la cocyclicité des points A, E, D et O ...

$\widehat{ADE} = \widehat{AOE}$ (utilisation de la cocyclicité).

$\widehat{AOE} = \widehat{AOD}/2$ (la bissectrice partage un angle en deux angles égaux).

Donc, $\widehat{ADE} = 90°/2 = 45°$.

5. Montrer que tous les côtés du pentagone $ABCDE$ ont même mesure.

Le triangle AED est rectangle en E et est tel que $\widehat{ADE} = 45°$, je déduis alors que $\widehat{DAE} = 45°$ (car la somme des angles d'un triangle est de $180°$).

Par suite, le triangle AED est isocèle en E (il possède deux angles égaux) et $AE = ED$.

De même, $BC = CD$.

Or $AB = AE$ (car B et E appartiennent à C_1) et $BA = BC$ (car A et C appartiennent à C_2), donc $DE = EA = AB = BC = CD$ et les côtés du pentagone sont de même mesure.

6. Le pentagone $ABCDE$ est-il régulier ?

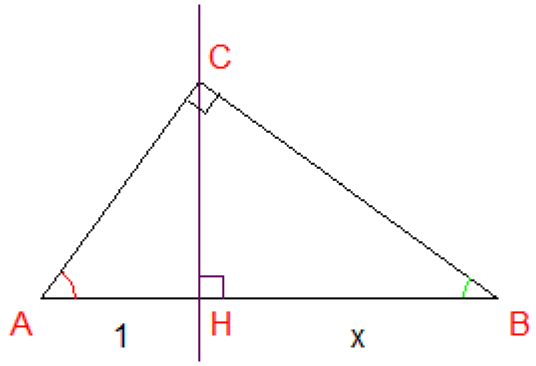
Le pentagone $ABCDE$ n'est pas régulier. En effet, s'il était régulier, chacun de ses angles mesurerait $(180° \times 3)/5 = 108°$. Mais, l'angle $\widehat{AED}$ est droit, ce qui contredit le fait que le pentagone soit régulier.

Exercice : triangles semblables (1)

Soit ABC un triangle rectangle en C et soit H le pied de la hauteur issue de C tel que $AH = 1$ et $HB = x$. Que vaut CH ?

Solution : triangles semblables (1)

Je trace tout d'abord la figure ...



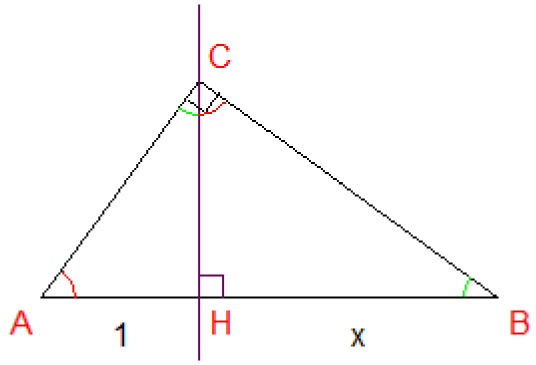
Les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{HCA}$ sont complémentaires au regard du triangle ACH rectangle en H.

Les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{HBC}$ sont complémentaires au regard du triangle ABC rectangle en C.

Les angles $\widehat{HCA}$ et $\widehat{HBC}$ sont donc égaux.

De même, les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux.

Je peux donc compléter la figure ...



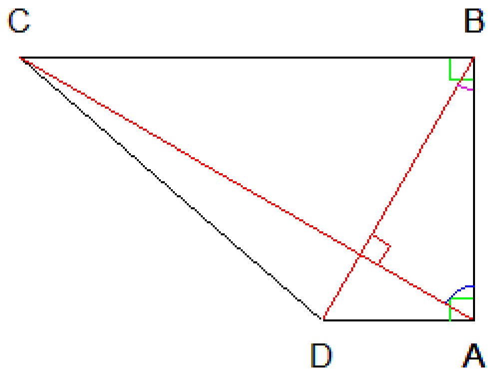
Les triangles HAC et HCB sont donc semblables (d'après les égalités angulaires) et $HA/HC = HC/HB$ $(= AC/CB)$, puis $HC^2 = HA \times HB = x$, et enfin, $HC = \sqrt{x}$.

Exercice : triangles semblables (2)

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et en B dont les diagonales sont perpendiculaires. On donne $AD = 1$ et $BC = 3$. Que vaut AB ?

Solution : triangles semblables (2)

Je trace tout d'abord la figure ...



Je nomme O le point de concours des diagonales.

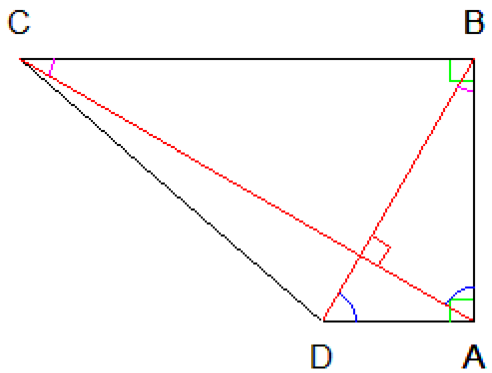
Le triangle OAB est rectangle en O car les diagonales du trapèze sont perpendiculaires. Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont donc complémentaires.

Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCB}$ sont complémentaires au regard du triangle ABC rectangle en B.

Les angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OCB}$ sont donc égaux.

De même, les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{ODA}$ sont égaux.

Je peux donc compléter la figure ...



Les triangles DAB et ABC sont donc semblables (d'après les égalités angulaires) et DA/AB (= DB/AC) = AB/BC, puis $AB^2 = AD \times BC = 3$, et enfin, $AB = \sqrt{3}$.

Exercice [Dijon, 1999]

Soit ABC un triangle quelconque. Soit O le centre du cercle Γ circonscrit à ABC.

Soit D le point diamétralement opposé à A sur Γ.

$[BB']$ et $[CC']$ sont des hauteurs du triangle ABC qui se coupent en H (l'orthocentre de ABC).

1. Montrer que $(DC) \perp (AC)$ et que $(BB')//(DC)$.

2. Montrer que $BHCD$ est un parallélogramme.

(HD) et (BC) se coupent en M. (AH) et Γ se coupent en H' distinct de A.

3.a) Quelle est la nature du triangle *HH'M* ?
3.b) Montrer que *M* est le centre du cercle circonscrit au triangle *HH'D*.

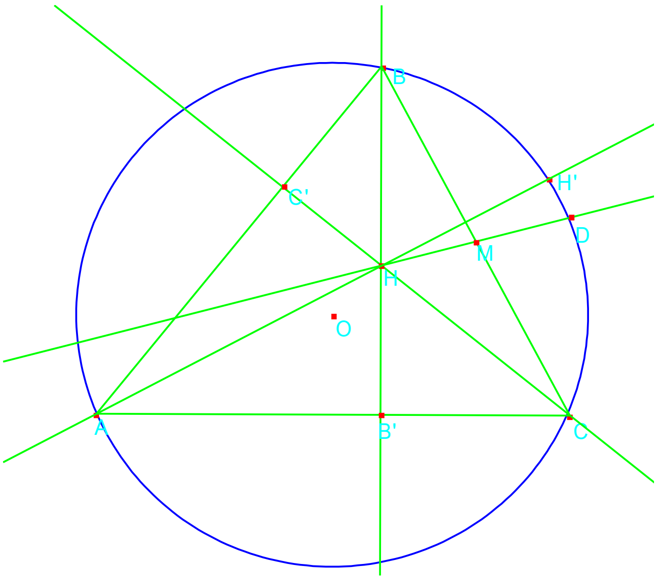
4. Montrer que *H'* est le symétrique de *H* par rapport à la droite *(BC)*.

5. Que dire des symétriques de *H* par rapport aux droites *(AB)* et *(AC)*.

Enoncer les propriétés démontrées dans cet exercice.

Solution [Dijon, 1999]

Je trace tout d'abord la figure ...



1. Montrer que *(DC)* ⊥ *(AC)* et que *(BB')//(DC)*.

[DC] est un diamètre de *Γ*. *A* appartient au cercle *Γ*, donc l'angle $\widehat{DAC}$ est droit et *(DC)* ⊥ *(AC)*.

D'autre part, *(BB')* ⊥ *(AC)* car *(BB')* est la hauteur issue de *B* du triangle *ABC*.

Les droites *(DC)* et *(BB')* sont toutes deux perpendiculaires à la droite *(AC)* et donc *(BB')//(DC)*.

2. Montrer que *BHCD* est un parallélogramme.

On a *(BH)//(DC)*. De même manière, on a *(CH)//(DB)*.

Le quadrilatère *BHCD* a donc ses côtés parallèles deux à deux et est donc un parallélogramme.

(HD) et *(BC)* se coupent en *M*. *(AH)* et *Γ* se coupent en *H'* distinct de *A*.

3.a) Quelle est la nature du triangle *HH'M* ?
3.b) Montrer que *M* est le centre du cercle circonscrit au triangle *HH'D*.

Je propose de traiter ces questions ensemble.

M est l'intersection des diagonales du parallélogramme BHCD, c'est donc le milieu des segments [BC] et [HD].

[DC] est un diamètre de *Γ*. *H'* appartient au cercle *Γ*, donc l'angle $\widehat{DH'C}$ est droit et *(DH')* ⊥ *(AH')*.

Le triangle *DHH'* est donc rectangle en *H'* et, par conséquent, *H'* appartient au cercle de diamètre *[DH]* (i.e. au cercle de centre *M* et de rayon *DH/2*).

En conclusion, *M* est le centre du cercle circonscrit au triangle *HH'D*. Aussi, *MH* = *MH'* et donc le triangle *MHH'* est isocèle en *M*.

4. Montrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite *(BC)*.

Puisque MHH' est isocèle en M et puisque la droite *(HH')* est perpendiculaire à la droite *(BC)* (car *(AH)* est la hauteur issue de A du triangle ABC), la droite *(BC)* est axe de symétrie du triangle MHH' (car dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est également axe de symétrie).

5. Que dire des symétriques de H par rapport aux droites *(AB)* et *(AC)*.

Le symétrique de H par rapport à la droite *(BC)* est H' et est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

De même, les symétriques de H par rapport aux droites *(AB)* et *(AC)* sont également sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

6. Enoncer les propriétés démontrées dans cet exercice.

Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de ce triangle sont situés sur le cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice [Guadeloupe, Guyane, 2001]

Soit un segment *[MA]* et soit a la mesure, en centimètres, de ce segment.

1. Tracer le cercle C_1 de centre M et de rayon a, et le cercle C_2 de centre A et de rayon a. Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points, dont l'un, O, est tel que le triplet *(M, O, A)* soit décrit dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Démontrer que le triangle MOA est équilatéral.

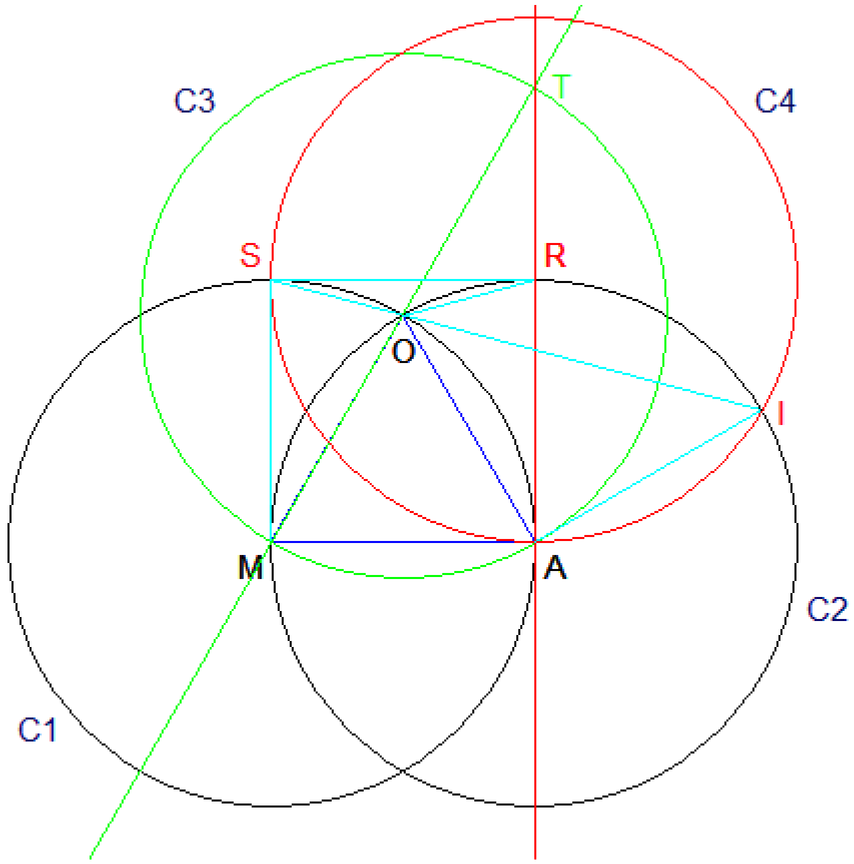
2. Tracer le cercle C_3 de centre O et de rayon a. Le cercle C_3 recoupe la demi-droite *[MO)* au point T. Démontrer que le triangle MAT est rectangle en A.

3. Soit R le point d'intersection du cercle C_2 et du segment *[AT]*. Tracer le cercle C_4 de centre R et de rayon a. Le cercle C_4 recoupe le cercle C_1 au point S (distinct de A) et le cercle C_2 au point I (tel que le triplet *(I, A, R)* soit décrit dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre).

   3.a) Démontrer que le quadrilatère $MARS$ est un carré.
   3.b) Démontrer que le triangle SOR est isocèle de sommet O. Calculer SO en fonction de a.
   3.c) Démontrer que le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A. Calculer OI en fonction de a.
   3.d) Démontrer que les points S, O et I sont alignés et calculer SI en fonction de a.

Solution [Guadeloupe, Guyane, 2001]

Je commence par tracer la figure.



1. Démontrer que le triangle MOA est équilatéral.

$MA = MO$ car A et O sont sur le cercle C_1.

$AM = AO$ car M et O sont sur le cercle C_2.

Ainsi $AM = MO = OA$ et le triangle MOA est équilatéral.

2. Démontrer que le triangle MAT est rectangle en A.

$[MT]$ est un diamètre du cercle C_3 (car M et T sont sur C_3 et car le segment $[MT]$ passe par le centre O du cercle C_3).

Comme A est sur le cercle de diamètre $[MT]$, le triangle MAT est rectangle en A.

3.a) Démontrer que le quadrilatère $MARS$ est un carré.

$MA = MS$ car A et S sont sur le cercle C_1.

$AM = AR$ car M et R sont sur le cercle C_2.

$RA = RS$ car A et S sont sur le cercle C_4.

Ainsi, $SM = MA = AR = RS$ et $MARS$ est un losange.

De plus, l'angle $\widehat{MAR}$ est droit (d'après la question 2).

Le losange $MARS$ possède un angle droit et est, par conséquent, un carré.

3.b) Démontrer que le triangle SOR est isocèle de sommet O. Calculer SO en fonction de a.

La médiatrice du segment $[MA]$ est axe de symétrie du carré $MARS$ (car les médianes sont axes de symétrie d'un carré). La médiatrice du segment $[MA]$ est axe de symétrie du triangle MAO.

Par conséquent, la médiatrice du segment $[MA]$ est axe de symétrie du triangle SOR. Ensuite le triangle SOR est isocèle en O.

Soit H le milieu du segment $[MA]$ et soit K le milieu du segment $[RS]$. On a $HK = a = HO + OK$. HO est hauteur d'un triangle équilatéral de côté a et, par application directe du théorème de Pythagore, je déduis $HO = a \times \sqrt{3}/2$. Ensuite, $OK = a \times (1 - \sqrt{3}/2)$. Maintenant, le théorème de Pythagore appliqué au triangle OKS rectangle en K, j'obtiens $SO^2 = KS^2 + KO^2$ et $SO = \sqrt{(1-\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} \times a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times a$.

3.c) Démontrer que le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A. Calculer OI en fonction de a.

3.d) Démontrer que les points S, O et I sont alignés et calculer SI en fonction de a.

$AI = AR$ car I et R sont sur le cercle C_2.

$RI = RA$ car I et A sont sur le cercle C_4.

Ainsi $IA = AR = RI$ et le triangle AIR est équilatéral.

Pour la démonstration que le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A et pour celle de l'alignement des points S, O et I, on se référera à l'exercice : alignement.

Il reste à évaluer OI et SI en fonction de a.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OAI isocèle rectangle en A donne $OI = \sqrt{2} \times a$.

L'alignement des points S, O et I donne $SI = SO + OI = (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}) \times a$.

Exercice : extrait du sujet [Amiens, 2001]

Soit $ABCD$ un carré de 5 cm de côté.

Tracez la parallèle à la droite (AC) passant par B.

Soit F l'intersection de cette droite avec la droite (AD).

Soit G l'intersection de cette droite avec la droite (DC).

Tracez la parallèle à la droite (AC) passant par D.

Soit E l'intersection de cette droite avec la droite (AB).

Soit H l'intersection de cette droite avec la droite (BC).

1. Déterminer la nature du quadrilatère $EFGH$.

2. Calculer l'aire du quadrilatère $EFGH$.

3. Soit O l'intersection des diagonales du carré $ABCD$.

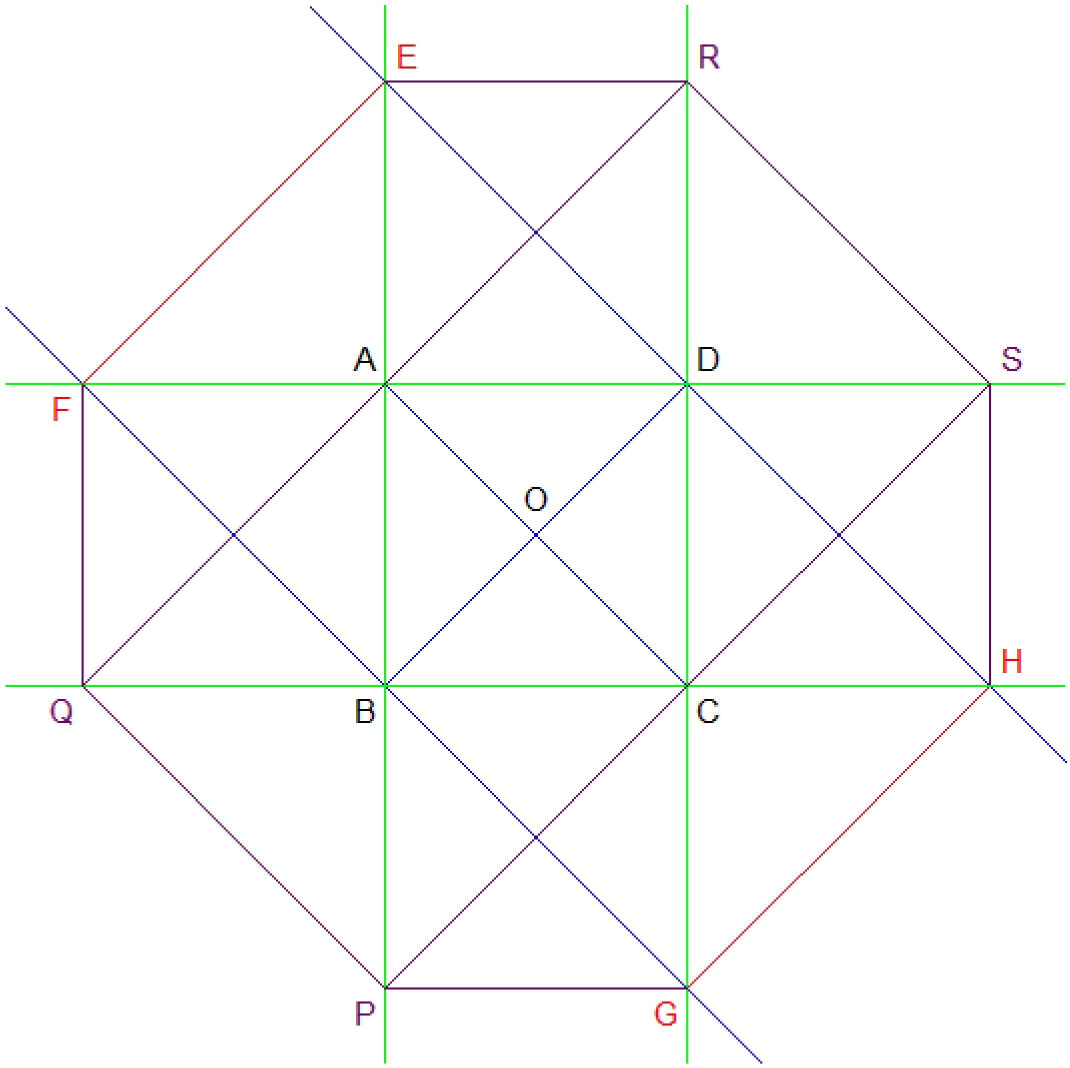
Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.

4. Soit P le symétrique de A par rapport à B. Soit Q le symétrique de C par rapport à B. Soit R le symétrique de C par rapport à D. Soit S le symétrique de A par rapport à D.

Démontrer que P, Q, R et S sont sur le cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.

Solution : extrait du sujet [Amiens, 2001]

Je commence par tracer la figure.



1. Déterminer la nature du quadrilatère *EFGH*.

Je vais montrer qu'il s'agit d'un rectangle.

Soit s la symétrie de centre O (O est l'intersection des diagonales du carré *ABCD*).

J'ai $s(A) = C$ et $s(B) = D$ (d'après la propriété concernant les isométries du carré).

Les diagonales du carré *ABCD* sont perpendiculaires (propriété des diagonales d'un carré). Donc, les droites *(FG)* et *(EH)* sont toutes deux perpendiculaires à la droite *(BD)* (car les droites *(FG)* et *(EH)* sont toutes deux parallèles à la droite *(AC)*). Ainsi, $s((FG)) = (HE)$ (car une isométrie conserve les angles et donc l'image de la perpendiculaire à la droite *(BD)* passant par B est la perpendiculaire à la droite *(BD)* (globalement invariante par s) passant par D (image de B par s)).

J'ai montré que $s((FG)) = (HE)$, mais je sais également que $s((AD)) = (CB)$ (car $s(A) = C$ et $s(D) = B$). Donc, $s(F) = H$ (car l'image par s du point de concours des droites *(FG)* et *(AD)* est le point de concours des droites *(HE)* et *(CB)*).

J'ai montré que $s((FG)) = (HE)$, mais je sais également que $s((CD)) = (AB)$ (car $s(C) = A$ et $s(D) = B$). Donc, $s(G) = E$ (car l'image par s du point de concours des droites *(FG)* et *(CD)* est le point de concours des droites *(HE)* et *(AB)*).

Le quadrilatère *EFGH* admet donc O comme centre de symétrie (car $s(F) = H$ et car $s(G) = E$) et est par conséquent un parallélogramme (d'après la propriété concernant les isométries du parallélogramme).

Soit t la symétrie orthogonale par rapport à la droite *(AC)*.

J'ai $t(A) = A$, $t(C) = C$ et $t(B) = D$ (d'après la propriété concernant les isométries du carré).

J'ai déjà vu que les droites (FG) et (EH) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BD). Ainsi, $t((FG)) = (HE)$ (car une isométrie conserve les angles et donc l'image de la perpendiculaire à la droite (BD) passant par B est la perpendiculaire à la droite (BD) (globalement invariante par t) passant par D (image de B par t)).

J'ai montré que $t((FG)) = (HE)$, mais je sais également que $t((AD)) = (AB)$ (car $t(A) = A$ et $t(D) = B$). Donc, $t(F) = E$ (car l'image par t du point de concours des droites (FG) et (AD) est le point de concours des droites (HE) et (AB)).

J'ai montré que $t((FG)) = (HE)$, mais je sais également que $t((CD)) = (CB)$ (car $t(C) = C$ et $t(D) = B$). Donc, $t(G) = H$ (car l'image par t du point de concours des droites (FG) et (CD) est le point de concours des droites (HE) et (CB)).

Le quadrilatère $EFGH$ admet donc (AC) (qui n'est pas une diagonale de $EFGH$) comme axe de symétrie orthogonale (car $t(F) = E$ et car $t(G) = H$) et est par conséquent un trapèze isocèle (d'après la propriété concernant les isométries du trapèze isocèle).

Le quadrilatère $EFGH$ admet (AC) (qui n'est pas une diagonale de $EFGH$) comme axe de symétrie orthogonale et O comme centre de symétrie, est donc un rectangle (d'après la propriété concernant les isométries du rectangle).

2. Calculer l'aire du quadrilatère $EFGH$.

La réciproque du théorème des milieux appliqué au triangle DBF où les droites (AO) et (FB) sont parallèles et où O est milieu du segment $[BD]$ (propriété du centre d'un carré) me donne que $BF = 2 \times OA$.

De la même manière, $BG = 2 \times OC$.

Par suite, $FG = FB + BG = 2 \times OA + 2 \times OC = 2 \times (OA + OC) = 2 \times AC$.

L'aire du rectangle $EFGH$ est donc $Aire(EFGH) = FG \times BD = 2 \times AC \times BD = 2 \times \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2} \times 5$ cm^2 $= 100$ cm^2 (la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (FG), BD est donc bien une hauteur du parallélogramme $EFGH$).

3. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.

D'après la définition de s et l'utilisation de la conservation des distances, j'ai $OF = OH$ et $OG = OE$.

D'après la définition de t et l'utilisation de la conservation des distances, j'ai $OF = OG$ et $OE = OH$.

D'où $OE = OF = OG = OH$ et O est centre du cercle circonscrit au rectangle $EFGH$.

4. Démontrer que P, Q, R et S sont sur le cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.

Je montre d'abord que le quadrilatère $ACPQ$ est un carré de centre B. En utilisant la symétrie de centre B, il est immédiat que le quadrilatère $ACPQ$ est un parallélogramme où B est le point de concours des diagonales. De plus, en utilisant les propriétés du carré $ABCD$, j'obtiens que ses diagonales sont égales (car les côtés du carré $ABCD$ sont égaux) et perpendiculaires (car les côtés du carré $ABCD$ sont perpendiculaires). Par conséquent, le quadrilatère $ACPQ$ est un carré.

De même, le quadrilatère $CARS$ est un carré de centre D.

Je montre maintenant que le quadrilatère $DBFE$ est un carré de centre A. J'ai déjà montré que $ED = DB = BF$ (question 2) et que les angles $\widehat{EDB}$ et $\widehat{DBF}$ étaient droits (question 1). Le quadrilatère $DBFE$ possède deux côtés opposés parallèles (car (ED) et (BF) sont parallèles) et égaux en mesure, c'est donc un parallélogramme. De plus, ce parallélogramme $DBFE$ possède un angle droit $\widehat{EDB}$, c'est donc un rectangle. De surcroît, ce rectangle $DBFE$ a deux côtés consécutifs égaux, c'est donc un carré.

De même, le quadrilatère $BDHG$ est un carré de centre C.

Soit r la rotation de centre O et qui envoie A sur B, B sur C, C sur D et D sur A (voir la propriété concernant les isométries du carré).

Cette rotation r envoie le carré $DBFE$ sur le carré $ACPQ$ (car une isométrie transforme un carré en un carré, car $r([DB]) = [AC]$ (donc le carré image admet $[AC]$ comme côté) et car $r(A) = B$ (donc le carré image admet B comme centre)). Par suite, $r(F) = P$ et $r(E) = Q$.

De même, $r(H) = R$ et $r(G) = S$.

Ainsi, l'image par r du cercle circonscrit à $EFGH$ est le cercle circonscrit à $PQRS$.

Comme ce cercle de centre O (voir question 3) est globalement invariant par r, les points E, F, G, H, P, Q, R et S sont cocycliques.