Exercice : cassettes vidéos

Chez A, l'abonnement au vidéo-club est de *10* Euros par mois, et la location d'une cassette vidéo coûte *1* Euro. Au distributeur B, on ne paye pas d'abonnement, mais on paye *2* Euros la location d'une cassette vidéo. Représenter graphiquement les prix en Euros chez A et B en fonction du nombre de cassettes vidéos louées par mois. A partir de combien de cassettes vidéos, le vidéo-club est-il moins cher que le distributeur ?

Solution : cassettes vidéos

Je vais proposer une résolution algébrique du problème.

Soit x le nombre de cassettes vidéos achetées.

Au vidéo-club, j'aurais alors payé $10 + x$ euros et, au distributeur, j'aurais payé $2 \times x$ euros.

Tant que $2 \times x < 10 + x$, je payerais moins cher au distributeur (i.e. pour moins de *10* cassettes vidéos), mais lorsque $2 \times x < 10 + x$, je payerais plus cher au vidéo-club (i.e. pour plus de *10* cassettes).

Remarque : pour *10* cassettes, les prix payés au vidéo-club et au distributeur sont identiques.

Exercice : celsius et Fahrenheit

32 Fahrenheit correspondent à *0* degrés celcius. *212* Fahrenheit correspondent à *100* degrés celcius. Ces échelles de mesures étant en relation affine, déduire à combien de Fahrenheit correspondent *40* degrés celcius et à combien de degrés celcius correspondent *122* Fahrenheit.

Solution : celsius et Fahrenheit

Une fonction affine lie ces deux quantités. Il est donc possible d'utiliser la règle des écarts proportionnels.

Je vais remplir le tableau suivant (qui n'est pas un tableau de proportionnalité) ...

Degrés celcius	0°C	100°C	40°C	
Fahrenheit	32F	212F		122F

Une augmentation de *100°C* (car $100 = 100 - 0$) correspond à une augmentation de *180F* ($180 = 212 - 32$).

Un retour à l'unité me donne qu'une augmentation de *1°C* correspond à une augmentation de *1,8F*.

$0°C + 40°C = 40°C$ correspond donc à $32F + 40 \times 1,8F = 104F$.

Et, $32F + 90\ F = 122F$ correspond donc à $0°C + 90°C/1,8 = 50°C$.

Exercice [Lille, 1999]

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle de hauteur $AD=4$ cm, de base $AB= 4$ cm et $CD=7$ cm et soit M un point du segment $[AD]$. On pose $DM=x$ cm.

1. Evaluer en fonction de x les mesures a_1 et a_2 des aires du triangle CDM et du quadrilatère $ABCM$ (mesures exprimées en centimètres carrés).

2. Représenter la variation de ces deux aires quand M varie sur le segment $[AD]$. On utilisera la feuille de papier millimétré et on prendra comme unités : *4* cm sur l'axe des abscisses (longueurs en centimètres), *1* cm sur l'axe des ordonnées (aires en centimètres carrés).

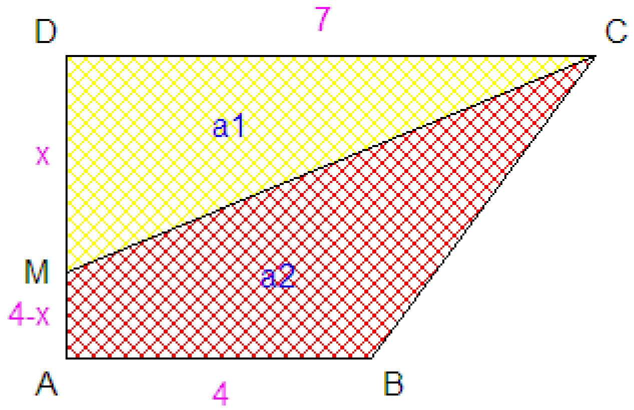
3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer M pour que $a_1=a_2$.

Solution [Lille, 1999]

1. Evaluer en fonction de x les mesures a_1 et a_2 des aires du triangle CDM et du quadrilatère $ABCM$

(mesures exprimées en centimètres carrés).

Je commence par tracer la figure.

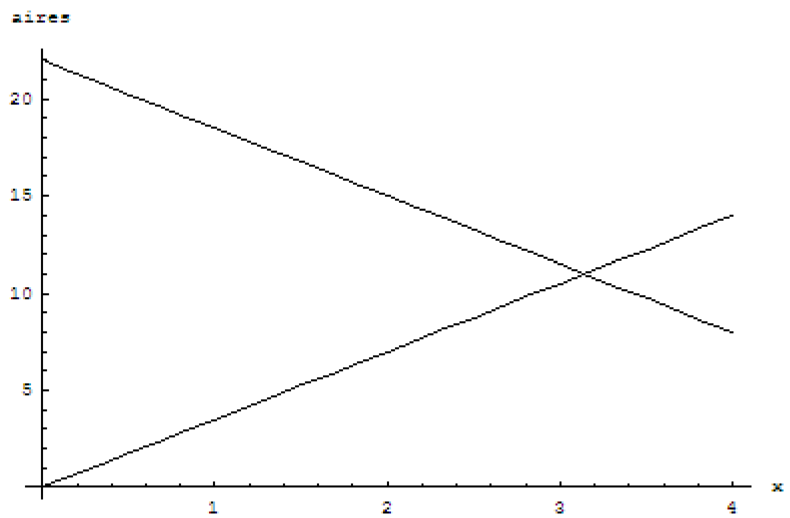


Le triangle *CDM* est rectangle en *D*, donc $a_1 = Aire(CDM) = (CD \times DM)/2 = (7 \times x)/2$ cm^2.

Le trapèze *ABCD* admet *[CD]* comme hauteur, donc $a_2 = Aire(ABCM) = Aire(ABCD) - Aire(CDM) = AD \times (AB + CD)/2 - (CD \times DM)/2 = 4 \times (4 + 7)/2 - (7 \times x)/2$ cm^2 $= 22 - (7 \times x)/2$ cm^2.

2. Représenter la variation de ces deux aires quand *M* varie sur le segment *[AD]*. On utilisera la feuille de papier millimétré et on prendra comme unités : *4* cm sur l'axe des abscisses (longueurs en centimètres), *1* cm sur l'axe des ordonnées (aires en centimètres carrés).

Représentation graphique des fonctions a_1 et a_2.



a_1 est une fonction linéaire et a_2 est une fonction affine. Ces deux fonctions sont restreintes au segment *[0,4 cm]* car *M* appartient au segment *[AD]* et car $AD = 4$ cm.

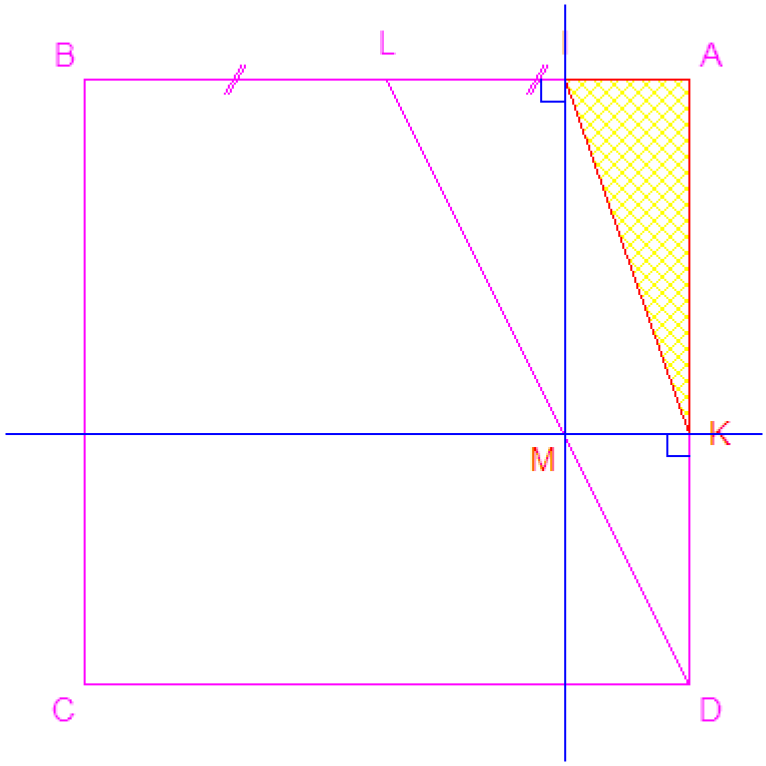
3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer *M* pour que $a_1=a_2$.

Graphiquement, je relève l'abscisse du point de concours des deux segments (qui représentent les fonctions a_1 et a_2). Je trouve $a_1=a_2$ lorsque *x* est voisin de *3,1* cm (la précision du graphique ne me permet pas de trouver une valeur exacte de *x*).

Par le calcul, $a_1=a_2$ s'écrit $(7 \times x)/2 = 22 - (7 \times x)/2$. La résolution de cette équation me donne $x = 22/7$ cm.

Exercice [Orléans, 1999]

Soit *x* un nombre réel vérifiant $0 \leq x \leq 3$. Soit *ABCD* un carré de côté *8*. Soit *I* le point du côté *[AB]* tel que $AI=x$. Soit L le milieu du segment $[AB]$. M est le point du segment $[LD]$ qui admet le point I comme projection orthogonale sur le segment $[AB]$ et le point K comme projection orthogonale sur le segment $[AD]$. On se propose d'étudier l'aire du triangle AKI.



1. Démontrer que $AK = 8 - 2 \times x$.

2. En déduire l'aire $\theta(x)$ du triangle AKI en fonction de x et démontrer que $\theta(x)=4-(x-2)^2$.

3. Quelle est la plus grande valeur de cette aire ? Justifier la réponse.

4. Calculer les aires $\theta(0)$ et $\theta(3)$ du triangle AKI associées aux valeurs extrêmes correspondant à $x = 0$ et à $x = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux "Si $0 \leq x \leq 3$, alors, $\theta(0) \leq \theta(x) \leq \theta(3)$" ? Justifier la réponse.

Solution [Orléans, 1999]

1. Démontrer que $AK = 8 - 2 \times x$.

Le théorème de Thalès appliqué aux sécantes (LA) et (LD) et aux parallèles (IM) et (AD) (toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) par propriété du projeté orthogonal, d'une part, et du carré, d'autre part), je déduis $IM/AD = LI/LA$ $(= LM/MD)$, puis $IM = 8 \times (4 - x)/4 = 8 - 2 \times x$.

Le quadrilatère $IAKM$ possède trois angles droits et est, par conséquent, un rectangle. Ensuite, $AK = IM = 8 - 2 \times x$, par propriété du rectangle.

2. En déduire l'aire $\theta(x)$ du triangle AKI en fonction de x et démontrer que $\theta(x)=4-(x-2)^2$.

$\theta(x) = (AI \times AK)/2$ car le triangle IAK est rectangle en A.

Ensuite $\theta(x) = x \times (8 - 2 \times x)/2 = 4 \times x - x^2$.

D'un autre côté, $4 - (x-2)^2 = 4 - (x^2 - 4 \times x + 4) = 4 - x^2 + 4 \times x - 4 = 4 \times x - x^2 = \theta(x)$.

3. Quelle est la plus grande valeur de cette aire ? Justifier la réponse.

Je sais que $\theta(x) = 4 - (x-2)^2$. De plus, un carré est toujours positif ou nul, ce qui induit que $\theta(x)$ est toujours inférieur ou égal à 4. Or, $\theta(2) = 4$ et donc la valeur maximale de $\theta(x)$ est 4 (le maximum est atteint lorsque x vaut 2).

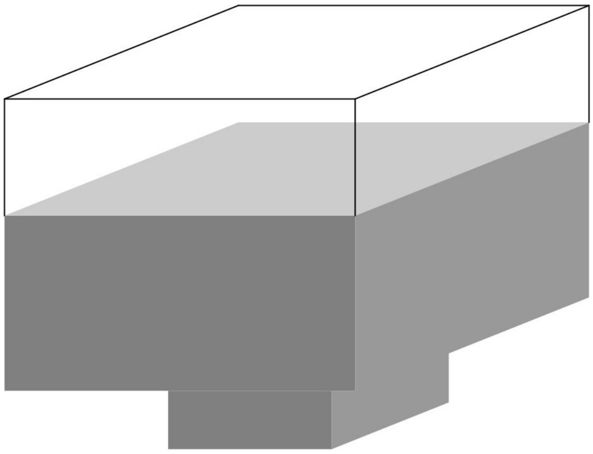
4. Calculer les aires $\theta(0)$ et $\theta(3)$ du triangle AKI associées aux valeurs extrêmes correspondant à $x =$

0 et à $x = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux "Si $0 \leq x \leq 3$, alors, $\theta(0) \leq \theta(x) \leq \theta(3)$" ? Justifier la réponse.

Le calcul me donne $\theta(0) = 0$ et $\theta(3) = 3$. L'énoncé "Si $0 \leq x \leq 3$, alors, $\theta(0) \leq \theta(x) \leq \theta(3)$" est faux car $\theta(2) = 4$ (et $4 = \theta(2) > \theta(3) = 3$).

Exercice [Limoges, 1999]

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent entre eux. L'arête du cube supérieur (le grand cube) mesure 90 centimètres. L'arête du cube inférieur (le petit cube) mesure 50 centimètres.



La figure n'est pas à l'échelle.

Cette cuve contient un liquide. On note x la hauteur de liquide dans la cuve. On note $V(x)$ le volume en litres du liquide dans la cuve lorsque la hauteur de liquide dans la cuve est x (x étant exprimé en centimètres).

1. Calculer $V(30)$, $V(51)$, $V(90)$.

2. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

3. Construire sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $V(x)$.

4. Sur un segment $[AB]$, on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle $1:10$.

Solution [Limoges, 1999]

1. Calculer $V(30)$, $V(51)$, $V(90)$.

$V(30) = (30 \times 50 \times 50)$ cm^3 $= 75000$ cm^3 $= 75$ l (formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle).

$V(51) = (50 \times 50 \times 50) + 1 \times 90 \times 90$ cm^3 $= 133100$ cm^3 $= 133{,}1$ l (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).

$V(90) = (50 \times 50 \times 50) + 40 \times 90 \times 90$ cm^3 $= 449000$ cm^3 $= 449$ l (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).

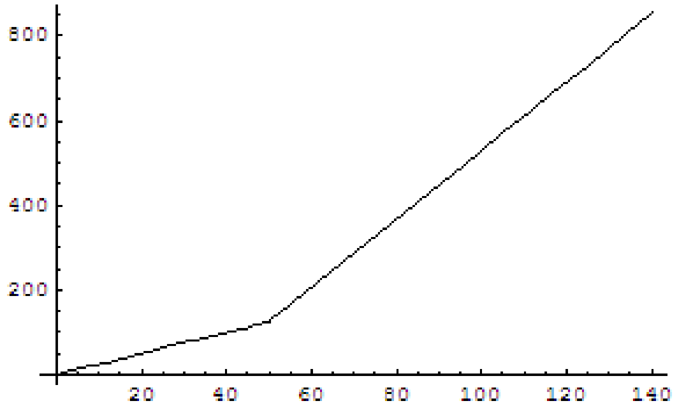
2. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

Si x est compris entre 0 cm et 50 cm, $V(x) = (x \times 50 \times 50)$ cm^3 $= x \times 2500$ cm^3 $= x \times 2{,}5$ l (formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle).

Si x est compris entre 50 cm et 140 cm ($140 = 50 + 90$), $V(x) = (50 \times 50 \times 50) + (x-50) \times 90 \times 90$ cm^3 $= x \times 8100 - 280000$ cm^3 $= x \times 8{,}1 - 280$ l (formule du calcul du volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle).

3. Construire sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $V(x)$.

Le tracé de la fonction vient immédiatement ... Il s'agit d'une fonction qui est définie sur l'intervalle $[0,140]$ cm : linéaire sur l'intervalle $[0,50]$ cm et affine sur $[50,140]$ cm.



4. Sur un segment *[AB]*, on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle *1:10*.

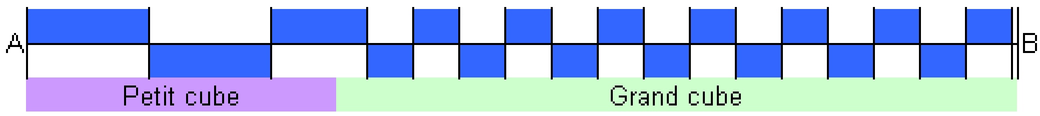
Il me faut maintenant fournir la valeur de x pour $V(x)$ donnée.

Je peux donc calculer les différentes valeurs de x en utilisant

pour $V(x)$ compris entre *0* et *125* l, $x = V(x)/2,5$ cm,
pour $V(x)$ compris entre *125* et *854* l, $x = (V(x) + 280)/8,1$ cm.

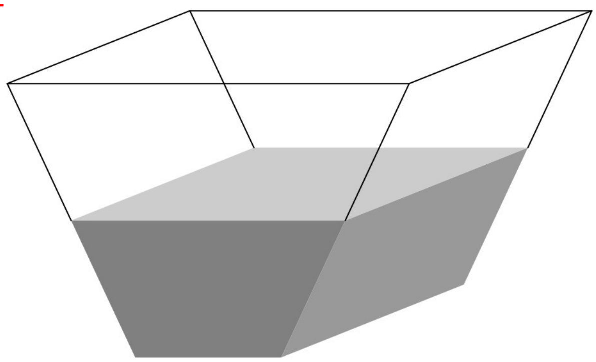
Ceci me fournit un tableau de valeurs en graduant tous les *50* litres ... (c'est un choix qui permet d'obtenir une graduation riche sans surcharger le graphique).

V(x)	x
0	0
50	20
100	40
150	53,1
200	59,3
250	65,4
300	71,6
350	77,8
400	84
450	90,1
500	96,3
550	102,5
600	108,6
650	114,8
700	121
750	127,2
800	133,3
850	139,5
854	140



Remarque : la graduation régulière n'est pas imposée et on aurait pu probablement se contenter de représenter *V(0)*, *V(50)* et *V(140)*.

Exercice : l'abreuvoir



La figure n'est pas à l'échelle.

L'abreuvoir est un prisme droit à base trapézoïdale de hauteur mesurant *4* m. Les trapèzes superposables ont une petite base mesurant *6* dm, une grande base mesurant *8* dm et la distance séparant les côtés parallèles est de *2* dm.

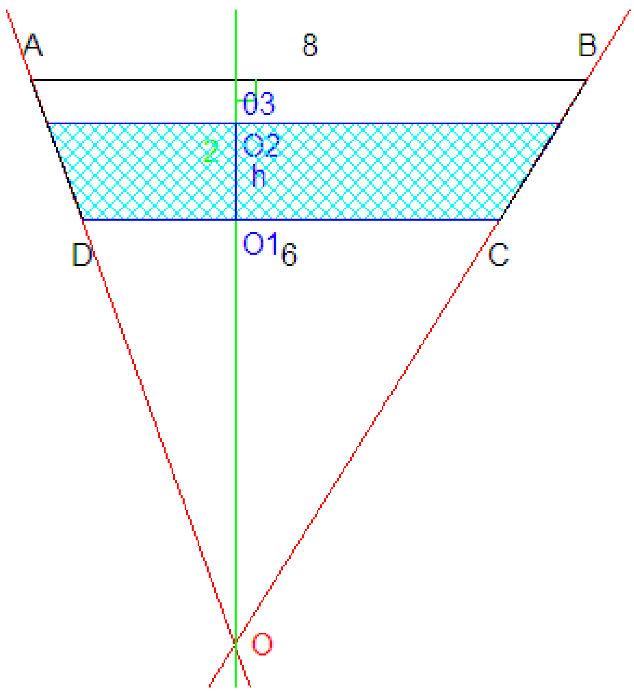
Note : la face contenant les petites bases des trapèzes et la face contenant les grandes bases des trapèzes sont horizontales.

Exprimer le volume d'eau contenu dans l'abreuvoir en fonction de la hauteur d'eau dans cet abreuvoir. Pour quelle hauteur d'eau, la cuve est-elle à moitié pleine ?

Solution : l'abreuvoir

Je commence par étudier le trapèze ...

Je représente le trapèze pour lequel toutes les longueurs sont exprimées en dm.



Je définis les points de la figure : $ABCD$ est un trapèze tel que $(AB)//(DC)$, que $AB = 8$ dm, $CD = 6$ dm ; O est l'intersection des droites (AD) et (BC) ; (d) est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par O ; O_1 est le point de concours des droites (d) et (DC) ; O_3 est le point de concours des droites (d) et (AB) (tel aussi que $O_1O_3 = 2$ dm) ; et enfin O_2 est le point du segment $[O_1O_3]$ tel que $O_1O_2 = h$ dm (h est la hauteur d'eau dans l'abreuvoir) ; (d') est la parallèle à la droite (AB) passant par O_2 ; A' est le point de concours des droites (d') et (AD) ; B' est le point de concours des droites (d') et (BC) ;

Je cherche tout d'abord a exprimer $A'B'$ en fonction de h.

Tout est construit pour que je puisse maintenant utiliser le théorème de Thalès.

Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (AO_3) et $(D0_1)$ et aux sécantes (AD) et (O_3O_1) me donne $AO/DO = O_3O/O_1O$ $(= O_3A/O_1D)$. Cependant, le théorème de Thalès appliqué aux parallèles (AB) et (DC) et aux sécantes (AD) et (BC) me donne AO/DO $(= BO/CO) = AB/DC$. Par suite, $O_3O/O_1O = AB/DC$. Comme $OO_3 = OO_1 + O_1O_3$, je déduis $(OO_1 + O_1O_3)/O_1O = 1 + O_1O_3/O_1O = AB/DC$, puis $O_1O = 6$ dm.

En réitérant la démarche précédente en remplaçant A par A', B par B' et O_3 par O_2, je trouve $O_2O/O_1O = A'B'/DC$, puis $1 + O_1O_2/O_1O = A'B'/DC$. Enfin, $A'B' = 6 \times (1 + h/6)$ dm $= 6 + h$ dm.

Ensuite, $Aire(A'B'CD) = h \times ((6 + h) + 6)/2$ dm^2 $= 6 \times h + h^2/2$ dm^2 et le volume $V(h)$ d'eau dans l'abreuvoir est donné par $V(h) = 40 \times (6 \times h + h^2/2)$ dm^3 $= 240 \times h + 20 \times h^2$ dm^3.

$V(2) = 560$ dm^3 est le volume d'eau dans l'abreuvoir lorsque celui-ci est plein. Je cherche à connaître la hauteur d'eau h_0 dm pour laquelle cet abreuvoir est à moitié plein, c'est-à-dire h_0 tel que $240 \times h_0 + 20 \times h_0^2 = 560/2 = 280$ i.e. $12 \times h_0 + h_0^2 = 14$ i.e. $(h_0 + 6)^2 - 36 = 14$ i.e. $h_0 + 6 = \sqrt{50}$ car $h_0 + 6$ est positif. Enfin, $h_0 = \sqrt{50} - 6$.

Exercice : Saturne

Saturne est une planète située à une distance au Soleil de 1427 millions de kilomètres (supposée constante). La période de révolution sidérale de Saturne est de 10759 jours et 6 heures.

1. Quelle est la vitesse angulaire moyenne de Saturne (en degrés par heure) ?

2. Quelle est la vitesse moyenne de Saturne (en kilomètres par heure) ?

Solution : Saturne

Tout d'abord une conversion : $10\ 759$ jours et 6 heures $= 10\ 759 \times 24 + 6$ heures.

Je vais donc chercher consécutivement les valeurs de A, B et C dans le tableau de proportionnalité suivant.

Durée (en heures)	258222	1
Angle de déplacement (en degrés)	360	B
Distance parcourue (en kilomètres)	A	C

$A = 2 \times \pi \times 1427000000$ (formule du périmètre d'un cercle).

$A = 8966 \times 10^6$ à 10^6 près, par défaut.

$B = 360/258222$ (car le tableau est de proportionnalité).

$B = 0{,}001394$ à 10^{-6} près, par défaut.

$C = A/258222 = (2 \times \pi \times 1427000000)/258222$ (car le tableau est de proportionnalité).

$C = 34722$ à 1 près, par défaut.

La vitesse angulaire de Saturne est proche de *0,001394* degrés par heure (i.e. elle semble ne presque pas bouger depuis le soleil), et sa vitesse est proche de *34722* kilomètres par heure (i.e. elle se déplace relativement vite dans le système solaire).

Exercice : trains

Un train de voyageurs TGV part de A pour aller vers B (le parcours de A à B mesure *1000* kilomètres). Ce TGV part à *8h00* et roule sur *150* kilomètres à la vitesse de *150* kilomètres par heure. Puis, il roule pendant deux heures à la vitesse de *270* kilomètres par heure et finit à la vitesse de *155* kilomètres par heure.

De B part un train de marchandise pour aller vers A qui roule à *100* kilomètres par heure et qui est parti à *10h30*.

1. A quelle distance de A vont-ils se croiser ?

2. Quelle heure sera-t-il lorsqu'ils vont se croiser ?

Solution : trains

Les distances seront exprimées en kilomètres, les durées en heures et les vitesses en kilomètres par heure.

Je choisis pour origine des temps l'heure à laquelle démarre le TGV (i.e. *8h00*). Je choisis pour origine des lieux le point A d'où démarre le TGV.

Je porte sur l'axe des abscisses le temps passé t à partir de *8h00* (en heures). Sur l'axe des ordonnées, je porte la distance $d(t)$ qui sépare un véhicule du point A (en kilomètres).

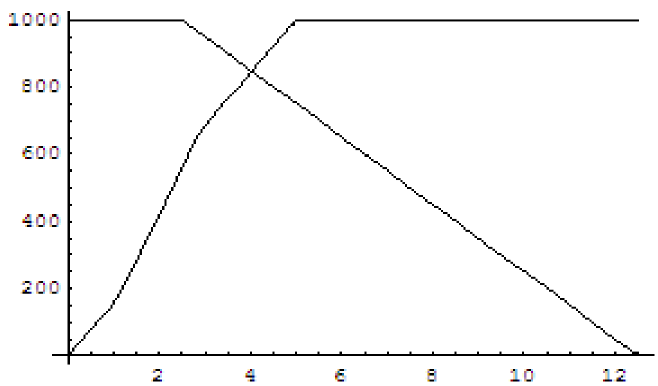
Représentation du parcours du TGV (en utilisant la formule bien connue V = d(t)/t) :

Premier régime // pour t variant de *0h* à *1h* (le TGV met bien *1h* pour parcourir *150* km à la vitesse de *150* km/h), la fonction d est linéaire et s'écrit $d(t) = 150 \times t$: je trace le segment d'extrémités (0;0) et (1;150) ;
Deuxième régime // pour t variant de *1h* à *3h* (le TGV passe bien deux heures dans le second régime), la fonction d est affine et s'écrit $(d(t) - 150) = 270 \times (t - 1)$: je trace le segment d'extrémités (1;150) et (3;690) ;
Troisième régime // pour t variant de *3h* à *5h* (le TGV met bien *2h* pour parcourir les *310* km restants à la vitesse de *155* km/h), la fonction d est affine et s'écrit $(d(t) - 690) = 155 \times (t - 3)$: je trace le segment d'extrémités (3;690) et (5;1000).

Représentation du parcours du train de marchandise (en utilisant la formule bien connue V = d(t)/t) :

Pour t variant de *2,5h* (le train de marchandise part bien *2,5h* après le TGV) à *12,5h* (le train de marchandise met bien *10h* pour parcourir *1000* km à la vitesse de *100* km/h), la fonction d est affine et s'écrit $(1000 - d(t)) = 100 \times (t - 2,5)$: je trace le segment d'extrémités (2,5;1000) et (12,5;0).

Voici le graphique correspondant ...



Il est prévisible que les trains vont se croiser durant le troisième régime du TGV. Je résous donc l'équation suivante :

$$1250 - 100 \times t = 155 \times t + 225$$

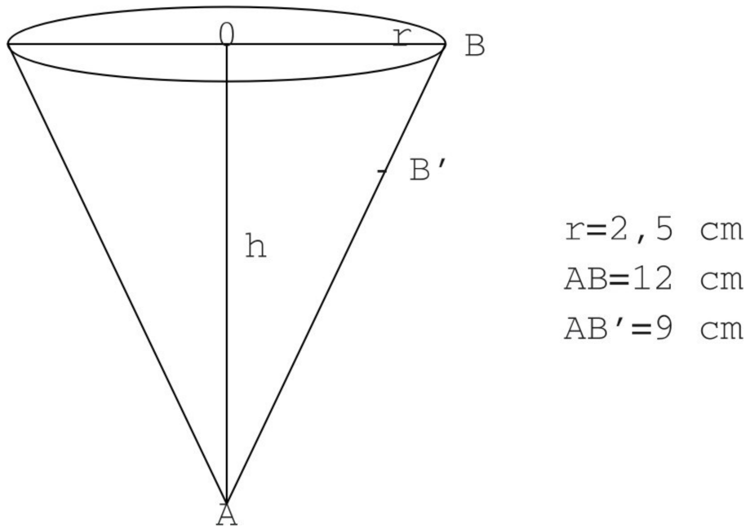
Je trouve comme solution $t = 205/51$ h qui est bien une valeur de t comprise entre $3h$ et $5h$ (i.e. qui appartient au troisième régime du TGV) : les trains se rencontrent approximativement pour t entre *4h 1min* et *4h 2 min*, i.e. entre *12h01* et *12h02*.

Les trains se croisent à $1250 - 100 \times (205/51)$ km = $43250/51$ km du point A : approximativement à *848* km (à *1* km près par défaut) du point A.

Exercice [Grenoble, 1998]

Soit le cône de révolution ci-dessous.

Le rayon du cercle de base a une longueur de *2,5* cm ; la génératrice *[AB]* a une longueur de *12* cm ; le point B' sur la génératrice *[AB]* est situé à une distance de *9* cm de A ; on désigne par h la hauteur de ce cône.



1. Donner le meilleur encadrement possible de h en cm avec des décimaux ayant au plus un chiffre après la virgule.

2. En prenant $3,14 < \pi < 3,15$ et l'encadrement de h trouvé ci-haut, déduire le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des entiers, en cm^3. On rappelle que le volume du cône est le produit de l'aire de la base par la hauteur, divisé par trois.

3. Pour cette question, si nécessaire, on utilisera les valeurs approchées par défaut que l'on peut déduire des deux questions précédentes. En disposant le cône pointe en bas et hauteur verticale, on le remplit de liquide jusqu'au point B'. Quel est le volume de ce liquide ? Exprimer ce volume en cm^3, puis en cl.

4. Le patron de ce cône (rayon : *2,5* cm, génératrice : *12* cm) est constitué d'un secteur de disque.

4.a) Démontrer que l'angle de ce secteur mesure *75* degrés.
4.b) Construire ce secteur en vraie grandeur avec règle non graduée et compas (laisser apparents les traits de construction ; justifier cette construction).
4.c) Calculer l'aire de ce secteur.

5. Des cônes ayant tous un volume de *10* cl, mais étant plus ou moins évasés, ont pour hauteurs respectives : *5* cm, *10* cm, *15* cm, *20* cm et *25* cm.

5.a) Calculer leurs aires de bases.
5.b) La suite des aires est-elle proportionnelle à la suite des hauteurs ? Justifier la réponse sans argument graphique.

5.c) Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal, les points dont l'abscisse est la hauteur et dont l'ordonnée est l'aire correspondante. En quoi cette représentation confirme-t-elle la réponse donnée dans la question précédente ?

Solution [Grenoble, 1998]

1. Donner le meilleur encadrement possible de h en cm avec des décimaux ayant au plus un chiffre après la virgule.

Je peux appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en O (la hauteur $[OA]$ est perpendiculaire au plan contenant le disque de base). Ainsi, $OA^2 + OB^2 = AB^2$, i.e. $h = \sqrt{(12^2 - 2,5^2)}$ cm $= 11,73$ cm à $0,01$ cm près par défaut. Il s'ensuit l'encadrement $11,7$ cm $< h < 11,8$ cm.

2. En prenant $3,14 < \pi < 3,15$ et l'encadrement de h trouvé ci-haut, déduire le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des entiers, en cm^3. On rappelle que le volume du cône est le produit de l'aire de la base par la hauteur, divisé par trois.

Soit *Aire* l'aire du disque de centre O et de rayon $[OA]$. J'ai $Aire = \pi \text{ x } r^2$. Le volume *Volume* du cône est alors $Volume = (Aire \text{ x } h)/3 = (\pi \text{ x } r^2 \text{ x } h)/3$. Numériquement, ceci donne l'encadrement $(3,14 \text{ x } 2,5^2 \text{ x } 11,7)/3$ cm^3 $< Volume <$ $(3,15 \text{ x } 2,5^2 \text{ x } 11,8)/3$ cm^3. Il s'ensuit que le meilleur encadrement possible avec des entiers est 76 cm^3 $< Volume <$ 78 cm^3.

3. Pour cette question, si nécessaire, on utilisera les valeurs approchées par défaut que l'on peut déduire des deux questions précédentes. En disposant le cône pointe en bas et hauteur verticale, on le remplit de liquide jusqu'au point B'. Quel est le volume de ce liquide ? Exprimer ce volume en cm^3, puis en cl.

r est le rayon du disque de base du cône lorsque celui-ci est rempli jusqu'au point B d'une hauteur $AO = h$ de liquide.

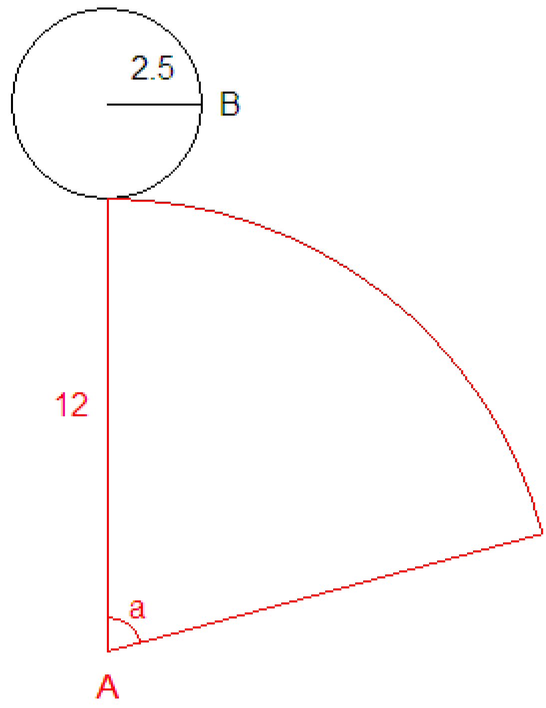
Je nomme alors r' est le rayon du disque de base du cône lorsque celui-ci est rempli jusqu'au point B' d'une hauteur $AO' = h'$ de liquide.

D'après le théorème de Thalès appliqué en utilisant les parallèles (OB) et $(O'B')$ et les sécantes (AO) et (AB), je déduis $AO/AO' = AB/AB' = OB/O'B'$. Or $AB/AB' = 12/9 = 4/3$, donc $r' = 3/4 \text{ x } r$ et $h' = 3/4 \text{ x } h$. Par suite, le volume *Volume'* de liquide dans le cône est $Volume' = (\pi \text{ x } r'^2 \text{ x } h')/3 = (\pi \text{ x } (4/3 \text{ x } 2,5)^2 \text{ x } (4/3 \text{ x } \sqrt{(12^2 - 2,5^2)}))/3$ cm^3 $= (\pi \text{ x } 225 \text{ x } \sqrt{551})/512$ cm^3 $= (\pi \text{ x } 45 \text{ x } \sqrt{551})/1024$ cl (car 1 cm^3 $= 0,001$ dm^3 $= 0,001$ l $= 0,1$ cl).

4. Le patron de ce cône (rayon : $2,5$ cm, génératrice : 12 cm) est constitué d'un secteur de disque.

4.a) Démontrer que l'angle de ce secteur mesure 75 degrés.
4.b) Construire ce secteur en vraie grandeur avec règle non graduée et compas (laisser apparents les traits de construction ; justifier cette construction).
4.c) Calculer l'aire de ce secteur.

Je trace d'abord un patron de ce cône.



D'après la représentation du patron, ci-dessus, je construis un tableau de proportionnalité en considérant que le périmètre du petit disque est égal au périmètre de l'arc du secteur angulaire d'angle *a*.

Mesure de l'angle en degrés	*a*	*360°*
Longueur de l'arc en centimètres	$2 \times \pi \times 2{,}5$	$2 \times \pi \times 12$

Ainsi, par l'utilisation de la règle de trois, j'obtiens $a = 2{,}5/12 \times 360° = 75°$.

Pour la construction du patron, il me suffit de savoir construire un angle de *75°*.

Je trace un cercle C_1 de centre *A* et de rayon *12* cm.

Je place un point *V* sur ce cercle C_1.

Je trace la perpendiculaire *d* à la droite *(AV)* passant par *A* : je trace le cercle C_2 de centre *A* et de rayon *s* qui coupe la droite *(AV)* en deux points *X* et *Y* distincts ; je trace le cerlce C_3 de centre *X* et de rayon *s'* (tel que $s' > s$) et le cerlce C_4 de centre *Y* et de rayon *s'* ; les cercles C_3 et C_4 se coupent en deux points distincts *Z* et *Z'* ; je nomme *d* la droite *(ZZ')*.

Je nomme *W* une des deux intersections de C_1 et de *d*.

Je trace le cercle C_5 de centre *V* et de rayon *12* cm.

Les cercles C_1 et C_5 se coupent en deux points distincts dont l'un, *L*, tel que *AVLW* soit un quadrilatère convexe.

Je trace la médiatrice *d'* du segment *[LW]* : je trace le cercle C_6 de centre *L* et de rayon *t* (tel que $t > LW/2$) et un cercle C_7 de centre *L* et de même rayon *t* ; les cercles C_6 et C_7 se coupent en deux points distincts *M* et *M'* ; je nomme *d'* la droite *(MM')*.

Le cercle C_1 et la droite *d'* se coupent en deux points distincts dont l'un, *Q*, tel que *ALQW* soit un quadrilatère convexe.

Le secteur angulaire cherché est composé des segments *[AV]* et *[AQ]* et du petit-arc de cercle sur C_1 délimité par *V* et *Q*.

Explications :

la droite *(AV)* est perpendiculaire à la droite *(AW)* donc l'angle $\widehat{VAW}$ mesure *90°* ;
le triangle *AVL* est équilatéral, donc l'angle $\widehat{VAL}$ mesure *60°* ;
le triangle *ALW* est isocèle en *A* et donc la médiatrice du segment *[LW]* est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{LAW}$, puis l'angle $\widehat{LAQ}$ mesure *(90° - 60°)/2 = 15°* et enfin, l'angle $\widehat{VAQ}$ mesure *60° + 15° = 75°*.

Je calcule alors l'aire *Aire''* du secteur en utilisant le tableau de proportionnalité suivant.

	Disque plein	Secteur
Mesure de l'angle en degrés	*360*	*75*
Aire en cm^2	$\pi \times 12^2$	*Aire''*

Je déduis que $Aire'' = 75/360 \times \pi \times 12^2$ cm^2 $= 30 \times \pi$ cm^2.

5. Des cônes ayant tous un volume de *10* cl, mais étant plus ou moins évasés, ont pour hauteurs respectives : *5* cm, *10* cm, *15* cm, *20* cm et *25* cm.

5.a) Calculer leurs aires de bases.
5.b) La suite des aires est-elle proportionnelle à la suite des hauteurs ? Justifier la réponse sans argument graphique.
5.c) Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal, les points dont l'abscisse est la hauteur et dont l'ordonnée est l'aire correspondante. En quoi cette représentation confirme-t-elle la réponse donnée dans la question précédente ?

Je traduis en cm^3 la donnée de *10* cl : *10* cl = *0,1* l = *0,1* dm^3 = *100* cm^3.

Soient $h_i = 5 \times i$ cm les différentes hauteurs pour *i* choisi parmi *1*, *2*, *3*, *4* ou *5*.

Soient A_i les aires correspondantes en cm^2.

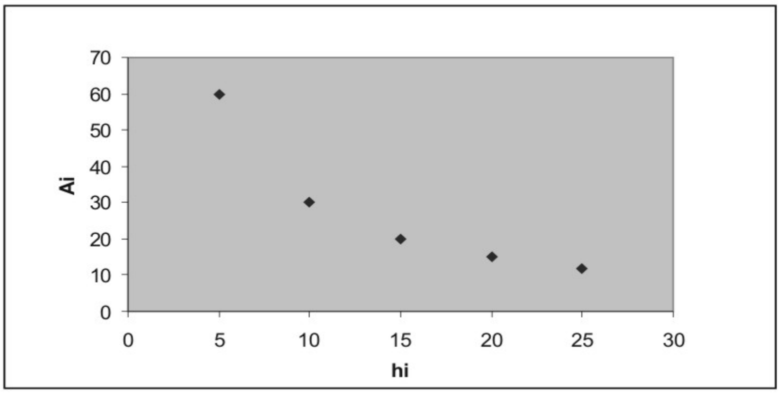
Ainsi, *100* cm^3 $= (h_i \times A_i)/3$.

A l'aide de cette formule, je peux remplir le tableau de valeurs suivant ...

h_i en cm	5	10	15	20	25
A_i en cm^2	60	30	20	15	12

La suite des hauteurs n'est évidemment pas proportionnelle à la suite des aires. Pour le justifier, je peux dénoncer, par exemple, le fait que lorsque la hauteur double, ce n'est pas le cas de l'aire.

Voici un nuage de points représentant les deux séries de nombres ...



Ce nuage de points ne présente pas des points alignés sur une droite passant par l'origine, ce qui serait le cas si les séries étaient proportionnelles (propriété de la fonction linéaire).

Exercice : volume

Soit *ABCDS* une pyramide (à base carrée *ABCD*) dont tous les côtés mesurent *20* centimètres. Cette pyramide est posée sur sa face carrée *ABCD* sur une table horizontale. Soit *[SH]* la hauteur de cette pyramide issue de *S*.

1. Que vaut *SH* ?

2. Quel est le volume total de la pyramide *ABCDS*, en litres (résultat arrondi par troncature au dixième de litre) ?

3. On remplit la pyramide d'un liquide. Soit *x* la hauteur de liquide dans la pyramide *ABCDS*. Exprimer le volume de liquide (exact) en fonction de *x*, en litres.

4. Représenter la hauteur *[SH]* de la pyramide *ABCDS*, graduée de *0,2* litre en *0,2* litre en taille réelle.

Solution : volume

1. Que vaut *SH* ?

Par définition de pyramide régulière, *H* est le centre du carré *ABCD* et le triangle *SHA* est rectangle en *H*. Le théorème de Pythagore appliqué dans ce triangle *SHA* me donne alors $SH^2 + HA^2 = SA^2$. Or, par une application directe du théorème de Pythagore, on sait que $AC = 20 \times \sqrt{2}$ cm et, comme le centre d'un carré est au milieu de chacune de ses diagonales, $AH = AC/2 = 10 \times \sqrt{2}$ cm. Enfin, $SH = 10 \times \sqrt{2}$ cm.

2. Quel est le volume total de la pyramide *ABCDS*, en litres (résultat arrondi par troncature au dixième de litre) ?

$Aire(ABCD) = 400$ cm^2. Ainsi, $Volume(ABCDS) = (Aire(ABCD) \times SH)/3$. Numériquement, ceci me donne $Volume(ABCDS) = (4000 \times \sqrt{2})/3$ cm^3 $= 4x\ \sqrt{2})/3$ l $= 1,8$ l à $0,1$ l par troncature.

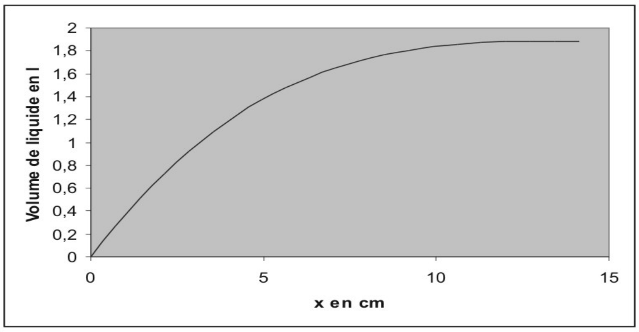
3. On remplit la pyramide d'un liquide. Soit *x* la hauteur de liquide dans la pyramide *ABCDS*. Exprimer le volume de liquide (exact) en fonction de *x*, en litres.

Je commence par tracer la pyramide en perspective cavalière et je définis les points *A'*, *B'*, *C'*, *D'* et *H'* de la façon suivante ... Soit *h* l'homothétie de centre *S* et de rapport $(SH - x)/SH = 1 - x/SH$, $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$, $D' = h(D)$ et $H' = h(H)$. *A'B'C'D'* représente la surface de l'eau car $HH' = x$, et d'après le théorème de Thalès, cette surface est bien horizontale.

Or, une homothétie agit au simple sur les longueurs, au carré sur les aires et au cube sur les volumes, donc $Volume(A'B'C'D'S) = (1 - x/(10 \times \sqrt{2}))^3 \times Volume(ABCDS) = (1 - x/(10 \times \sqrt{2}))^3 \times (4 \times \sqrt{2})/3$ l.

Puis, $Volume(ABCDA'B'C'D') = Volume(ABCDS) - Volume\ (A'B'C'D'S) = (4 \times \sqrt{2})/3 - (1 - x/(10 \times \sqrt{2}))^3 \times (4 \times \sqrt{2})/3$ l $= (1 - (1 - x/(10 \times \sqrt{2}))^3) \times (4 \times \sqrt{2})/3$ l.

Voici un graphique représentant le volume de liquide en l en fonction de *x* en cm.



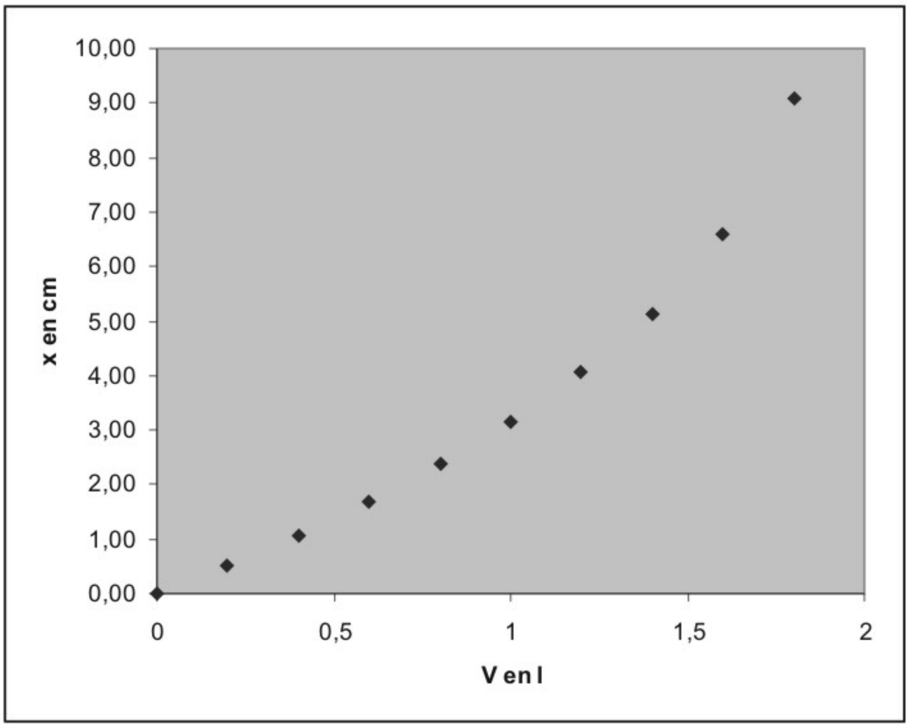
4. Représenter la hauteur *[SH]* de la pyramide *ABCDS*, graduée de *0,2* litre en *0,2* litre en taille réelle.

Soit V le volume de liquide exprimé en litres, il me semble plus facile d'exprimer x en fonction de V pour représenter la hauteur *[SH]* de la pyramide *ABCDS*, graduée de *0,2* litre en *0,2* litre en taille réelle que de lire le graphique précédent ... $x = 10 \times \sqrt{2} \times (1 - \sqrt[3]{1 - (3 \times V)/(4 \times \sqrt{2})})$ cm.

Ceci fournit le tableau de valeurs suivant ... dans lequel les valeurs de x ont été arrondies à *0,01* cm près.

Volume(ABCDA'B'C'D') en l	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
x en cm	0	0,52	1,08	1,7	2,38	3,15	4,05	5,14	6,6

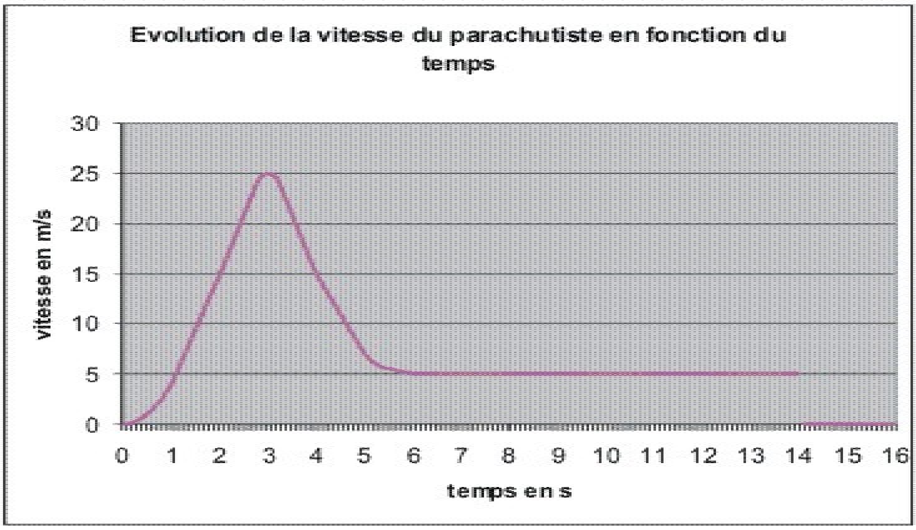
Ce qui donne également le graphique suivant ...



Et le segment [SH] gradué ...

Exercice [Aix, Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse, 2004]

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.



1) Pendant la chute, sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?

2) Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?

3) Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses *3* s et *6* s.

4) Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?

5) Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de *115* m, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

Solution [Aix, Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse, 2004]

Dans tout cet exercice, on supposera qu'il est permis d'appuyer un raisonnement sur une perception graphique.

1) Pendant la chute, sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?

On cherche donc le lieu où la courbe représentative est réduite à un segment "parallèle" à l'axe des abscisses.

Entre les points d'abscisses *6* s et *14* s, on peut considérer que la vitesse du parachutiste est constante et vaut *5* m/s.

2) Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?

On cherche donc le lieu à partir duquel la vitesse va commencer à diminuer (à supposer que l'ouverture du parachute ait un effet immédiat).

Il s'agit du point d'abscisse *3* s et d'ordonnée *25* m/s.

3) Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses *3* s et *6* s.

On cherche à qualifier qualitativement et quantitativement l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses *3* s et *6* s.

La vitesse du parachutiste décroît sur cet intervalle de temps : elle passe de *25* m/s à *5* m/s (diminution de *20* m/s).

4) Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?

Le parcours durant *14* secondes, il s'agit donc de calculer la distance parcourue pendant les *7* dernières secondes.

La vitesse étant alors constante et égale à *5* m/s, la distance parcourue pendant les *7* dernières secondes peut donc être calculée par *7 x 5* m = *35* m.

5) Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de *115* m, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

Il s'agit ici d'utiliser la définition même de vitesse moyenne. Cependant, il faut aussi penser à convertir les données métriques en km et les données temporelles en h.

14 s = *14/3600* h ; et *115* m = *0,115* km.

La vitesse moyenne vaut donc exactement *0,115/(14/3600)* km/h et approximativement *29,571* km/h, que l'on peut arrondir à *29,57* km/h au centième.