Sujet de Toulouse, 2000.

Réponses

1.a) Ecrivez les relations qui définissent la division euclidienne d'un nombre entier naturel *a* par un nombre entier naturel *b* non nul.

Les programmes proposent explicitement le passage par l'écriture algébrique détaillée ci-dessous ...

Pour un nombre entier naturel *a* et un nombre entier naturel *b* non nul, on peut trouver un unique entier naturel *q* et un unique entier naturel *r* tels que

$$a = b \times q + r \qquad (1A)$$

avec

$$r < b. \qquad (1B)$$

Cependant, dans les manuels scolaires, la division euclidienne est souvent introduite à l'aide de la notion de "meilleur encadrement possible du dividende à l'aide de multiples du diviseur", comme suit ...

Pour un nombre entier naturel *a* et un nombre entier naturel *b* non nul, on peut trouver un unique entier naturel *q* tel que

$$b \times q \leq a < b \times (q + 1) \qquad (2A)$$

et on peut ensuite définir un entier naturel *r* par

$$r = a - b \times q. \qquad (2B)$$

Dans ce qui précède, et dans la division euclidienne de *a* par *b*, *a* est le dividende, *b* est le diviseur, *q* est le quotient et *r* est le reste.

1.b) Les divers résumés "Je retiens bien" correspondent-ils selon vous à ces relations ? Justifiez.

<u>Annexe 1</u>. L'explication schématique se réfère à (2A) où le quotient est vu comme un nombre de sauts et (2B) où le reste est probablement évalué par surcomptage.

La double-inégalité $6 \times 4 < 27 < 7 \times 4$ renvoie à (2A) bien que la première inégalité soit stricte au lieu de large.
L'égalité $27 = 6 \times 4 + 3$ renvoie à (1A).

<u>Annexe 2</u>. L'explication schématique se réfère à (2A) où le quotient est vu comme le nombre maximum de fois qu'on peut itérativement soustraire le diviseur du dividende tout en conservant un résultat positif et (2B) où le reste est obtenu explicitement entouré.

L'égalité $32 = 5 \times 6 + 2$ renvoie à (1A).

<u>Annexe 3</u>. L'explication schématique propose deux situations en référence avec la division euclidienne. Elles sont toutes deux en référence à (1A) pour les deux premières phrases et à (1B) pour les deux dernières.

L'égalité $35 = 8 \times 4 + 3$ renvoie également à (1A). Une référence à (1B) est également présente : "le reste" peut être "égal à *0*".

<u>Annexe 4</u>. L'algorithme de la division euclidienne présenté ici est basé sur la recherche du meilleur encadrement par des multiples du diviseur pour trouver les quotients partiels puis

les restes partiels, ce qui renvoie d'abord à (2A), puis à (2B).

L'égalité $597 = 149 \times 4 + 1$ renvoie à (1A).

2. Repérez et caractérisez les étapes suivies dans les quatre annexes pour l'étude de la division. Indiquez en particulier ce que les élèves apprennent de nouveau dans le passage de l'annexe 1 à l'annexe 2 puis dans le passage de l'annexe 3 à l'annexe 4. Vous justifierez vos réponses en vous appuyant sur trois exercices au maximum de chacune des annexes, que vous choisirez pour leur pertinence.

L'analyse qui suit est fondée sur la partie "Activité".

Annexe 1. Il s'agit de présenter la division euclidienne à l'aide de la notion de "meilleur encadrement possible du dividende à l'aide de multiples du diviseur". Cette vision de la division euclidienne permet de manipuler une double-inégalité avec une seule inconnue (q) alors que dans l'expression algébrique de la division euclidienne sont présentes deux inconnues (q et r). Ce passage donne du sens au q (nombre maximum de sauts (1-1) dont l'idée de "maximum" est revisitée ultérieurement dans les termes "pourra" (1-3) ou "peut" ... "seulement" (1-4)) et au r (l'idée de reste est bien présente dans chacun des items).

L'écriture (2A) est fortement présente.

Annexe 2. Il s'agit de présenter la division euclidienne à l'aide de la notion de "meilleur encadrement possible du dividende à l'aide de multiples du diviseur". Cependant, si lors de l'activité 1, la procédure utilisée à cet effet concernait l'addition (itérée), lors de l'activité 2, la procédure utilisée concerne la soustraction (itérée). Ce passage est très important car les élèves retrouveront l'usage de la soustraction dans l'algorithme d'Euclide de la division euclidienne.

L'écriture (2A) est rappelée, mais l'écriture (1A) apparaît. Il est à noter l'intention des auteurs de donner du sens à l'écriture algébrique en faisant le lien avec le quotient obtenu par (2A) et celui à fournir dans (1A) (se référer à la partie "Complète").

Annexe 3. Il s'agit cette fois d'améliorer la méthode vue à l'annexe 2 : à l'aide des personnages d'Anna et de Ronald, la méthode de Nicolas (celle de l'annexe 2) est rendue plus rapide.

La méthode d'Anna est basée sur une recherche directe du "meilleur encadrement possible du dividende à l'aide de multiples du diviseur", mais sa recherche est obtenue par tâtonnement (ce n'est pas encore automatisé même si c'est déjà très efficace).
La méthode de Ronald utilise des paquets de dix ou des unités (c'est déjà très efficace même s'il n'utilise pas encore les tables de multiplication du diviseur : le quotient *12* est calculé par $10 + 1 + 1$ et pas encore par $10 + 2$).
Bien que l'écriture (2A) soit encore présente (procédure d'Anna), il semble que les auteurs insistent un peu plus grossièrement maintenant sur l'écriture (1A).
Note : avec un quotient de 19, par exemple, il est probable que la méthode proposée par Anna aurait été plus rapide que celle proposée par Ronald.

Annexe 4. Il s'agit cette fois d'améliorer la méthode vue à l'annexe 3 avec Ronald en la rendant plus performante en utilisant les tables de multiplication (la méthode de Ronald était déjà automatisée, mais Ronald aurait décomposé le quotient *42* par $10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1$ alors que l'algorithme présenté ici décompose *42* par $40 + 2$) : le manuel propose ici une forme assez détaillée de l'algorithme usuel de la division euclidienne (écriture des tables, écritures intégrales des quotients partiels et des restes partiels, décomposition canonique du quotient liée avec les quotients partiels, ...).

La méthode s'appuie sur l'écriture (2A) mais le résultat met en évidence l'écriture (1A).

3. Résolvez la situation 1-4 du paragraphe "1. Activité" de l'annexe 1 en appliquant la technique utilisée par Audrey dans le 1-1. Indiquez l'intérêt de cette technique pour les élèves.

Tout d'abord levons une ambiguïté de l'énoncé. Il est dit "Audrey se rend compte qu'elle n'aura pas assez de papillotes pour en donner *12* à chacun." [...] "Elle peut donner un sachet à chaque invité si elle met seulement *7* papillotes par sachet", mais il n'est pas dit qu'elle a essayé de faire de sachets de *11*, de *10*, de *9*, puis de *8* papillotes sans succès. On supposera cela fait.

Audrey a *82* papillotes.

Les sauts de *7* en *7* font visiter les nombres suivants (schéma) :
$0 \overset{+7}{} 7 \overset{+7}{} 14 \overset{+7}{} 21 \overset{+7}{} 28 \overset{+7}{} 35 \overset{+7}{} 42 \overset{+7}{} 49 \overset{+7}{} 56 \overset{+7}{} 63 \overset{+7}{} 70 \overset{+7}{} 77 \overset{+7}{} 84 \overset{+7}{} \ldots$
De ce schéma, elle déduit $11 \times 7 < 82 < 12 \times 7$.
Elle pourra donc remplir *11* sachets de *7* papillotes. Il lui restera *5* papillotes.

Intérêts de cette technique :

- cette technique permet de lier le problème à la méthode de résolution par l'intermédiaire d'un schéma qui est lui-même proche de la situation ;
- au niveau de la procédure, celle-ci est sûre (i.e. les savoirs sont maîtrisés) et efficace dans ce cas (le nombre de sauts est relativement petit).

4. Pour l'annexe 2, le livre du maître conseille de ne pas donner le livre aux élèves dans un premier temps mais de copier le texte au tableau jusqu'à "le nombre de glaces que chacun aura pendant les vacances." afin de résoudre la situation. Quel est l'intérêt de cette démarche ? Justifiez. Rédigez deux solutions différentes de celle du livre que pourraient donner les élèves.

Levons tout d'abord une autre ambiguïté : il est dit "Chaque enfant aura au maximum ___ glaces", ce qui ne fait pas forcément référence à un partage équitable ... Nous pourrions remplacer cette phrase par "Un partage équitable des glaces laisserait ___ glaces à chacun".

La proposition du livre du Maître permet de s'assurer que les élèves ont bien intégré la situation-problème. En effet, la situation est difficile car le vocabulaire ne se rapporte pas directement à une situation de division euclidienne.

Pour proposer d'autres procédures que celles de Nicolas dans l'annexe 3, on peut s'inspirer de celles d'Anna et de Ronald.

A. Comme Anna, recherche de (2A) par tâtonnement :
$6 \times 10 = 60$ trop petit.
$6 \times 15 = 90$ trop grand.
$6 \times 14 = 84$ trop petit.
Donc, $88 = 6 \times 14 + 4$, ce qui donne *14* glaces à chacun.

B. Comme Ronald, recherche de (2A) par soustractions itérées, en groupant certaines soustractions :
$88 - 60 = 28$ pour *10* glaces,
$28 - 6 = 22$ pour *1* glace,
$22 - 6 = 16$ pour *1* glace,
$16 - 6 = 10$ pour *1* glace,
$10 - 6 = 4$ pour *1* glace,
ce qui donne *14* glaces à chacun et un reste de *4* glaces (et avec *4* glaces, il n'y en a plus assez pour en donner une à chacun).

5. Expliquez, analysez et commentez les procédures de calculs utilisées par Nicolas, Anna et Ronald dans l'annexe 3.

La réponse à cette question est détaillée dans la question 2.

6. Faites une analyse critique de l'étude de la division telle qu'elle est présentée dans cet ouvrage en vous appuyant sur les projets des textes d'application des nouveaux programmes présentés dans l'annexe 5.

La progression du manuel n'est pas en désaccord avec le document présenté en annexe 5.

Premier paragraphe : il est à souligner la volonté des auteurs à faire comprendre l'algorithme usuel de la division euclidienne.
Tiret de la première colonne : la technique utilisant les soustractions successives est présentée (activité de l'annexe 2, par exemple).
Deuxième paragraphe : les inconnues ne sont pas toujours q et r, mais quelquefois a (exercice 4 de l'annexe 2, par exemple) ou b (c'est moins visible car du point de vue de l'écriture (1A), b et q jouent un rôle symétrique, et ce n'est que du point de vue de l'écriture de (1B) que leurs rôles respectifs diffèrent, dans la situation 1-4 de l'annexe 1, qui est résolue dans la question 3, l'inconnue est bien le diviseur b : *7* est le quotient et non le diviseur[(*)]). Aussi, l'algorithme usuel de division euclidienne est présenté sous forme de potence.
Premier tiret de la seconde colonne : présenter la division euclidienne à l'aide de la notion de "meilleur encadrement possible du dividende à l'aide de multiples du diviseur" est largement visité dans l'annexe 1. De plus, les écritures (1A) et (2A) sont présentées et liées.
Second tiret de la seconde colonne : hormis la phrase "Si j'ai *36* jetons, le reste est égal à *0*", les divisions exactes ne sont pas suggérées dans ce manuel.

[(*)] Explications sur d'autres valeurs numériques car celles du texte ne permettent pas facilement de comprendre la suite :

Audrey a *99* papillotes, elle ne peut donner *5* papillotes à chacun, mais elle parvient à en donner *4* à chacun. Combien d'amis d'Audrey vont bénéficier de papillotes ?
Réponse : tout nombre compris strictement entre *19* et *25* convient (i.e. *20*, *21*, *22*, *23*, *24*)
Mais, si on prend par exemple *20*, l'égalité qui découle de cette situation est $99 = 20 \times 4 + 19$ et il reste *19* papillotes et on comprend alors aisément que ceci ne traduit pas la division euclidienne de *99* par *4* (voir égalité (1B)).