Support de cours de préparation au concours de Professeur des Ecoles

Denis Vekemans [1]

1. Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

On peut diviser le programme en trois grands axes disciplinaires : les nombres, la géométrie et la proportionnalité.

Auto-promo ... Le site http ://vekemans.free.fr/public_html/index.html regroupe ce cours et ces exercices, mais on peut aussi trouver sur ce site les corrigés des exercices, des analyses de productions corrigées, et des volets didactiques corrigés.

Bibliographie

[1] Roland Charnay et Michel Mante, *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles*, tome 1 et tome 2 Hatier Concours, 1998.

[2] Alain Descaves, *Les Mathématiques au concours de Professeurs des Ecoles*, Hachette, 2004.

[3] Muriel Fénichel et Marcelle Pauvert , *L'épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles - Notions fondamentales et exercices corrigés* -, Bordas, 2003.

[4] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 1995, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 1995.

[5] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 1996, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 1996.

[6] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 1997, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 1997.

[7] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 1998, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 1998.

[8] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 1999, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 1999.

[9] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2000, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2000.

[10] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2001, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2001.

[11] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2002, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2002.

[12] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2003, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2003.

[13] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2004, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2004.

[14] Concours externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles, *MATHEMATIQUES, Annales 2005, Sujets et Corrigés*, COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire), 2005.

Chapitre 2

Les nombres

2.1 Arithmétique dans l'ensemble des entiers naturels

2.1.1 L'ensemble des entiers naturels

Définition naïve : 0 est un entier naturel ; et, si n est un entier naturel, alors $n + 1$ aussi.

Ainsi, comme 0 est entier naturel, $0 + 1 = 1$ aussi ; puis, comme 1 est entier naturel, $1 + 1 = 2$ aussi ; puis, comme 0 est entier naturel, $2 + 1 = 3$ aussi ; ...

Remarque : l'ensemble des entiers naturels est de cardinal infini.

2.1.2 Multiples

Définition : on dit que a est multiple de b s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.

Exemple : 21 est multiple de 7. En effet, $21 = 3 \times 7$.

Exercices non corrigés :

Exercice 1

- 10 est-il multiple de 4 ? [1]
- 252 est-il multiple de 9 ? [2]
- Quel est l'ensemble des multiples de 5 ? [3]
- Soit n un entier naturel. 0 est-il un multiple de n ? [4]

Théorème 2.1

Propriété additive : si a est multiple de c et b est multiple de c, alors, $a + b$ est multiple de c.

Exemple : 21 et 49 sont multiples de 7 ; et, $21 + 49 = 70$ l'est par conséquent.

Démonstration

Il existe un entier naturel k tel que $a = k \times c$ (car a est multiple de c). Il existe un entier naturel l tel que

1. Non, $10 = 2,5 \times 4$, mais $2,5$ n'est pas un entier naturel.
2. Oui, car $252 = 28 \times 9$ et 28 est bien un entier naturel.
3. 0, 5, 10, 15, ... Cet ensemble est de cardinal infini.
4. Oui, car $0 = 0 \times n$.

$b = l \times c$ (car b est multiple de c). Ainsi, par somme, $a + b = k \times c + l \times c = (k + l) \times c$. Puis, $a + b$ est multiple de c (on a pu trouver un entier naturel $k + l$ qui, multiplié par c, donne $a + b$).

Théorème 2.2

Propriété de transitivité : si a est multiple de b et b est multiple de c, alors, a est multiple de c.

Exemple : 63 est multiple de 21 et 21 est multiple de 7 ; puis, 63 est multiple de 7, par conséquent.

Démonstration

Il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$ (car a est multiple de b). Il existe un entier naturel l tel que $b = l \times c$ (car b est multiple de c). Ainsi, par substitution, $a = k \times b = k \times (l \times c) = (k \times l) \times c$ (par associativité de la multiplication). Puis, a est multiple de c (on a pu trouver un entier naturel $k \times l$ qui, multiplié par c, donne a).

Exercices non corrigés :

Exercice 2

- Vrai ou faux (justifié) : si a est multiple de b et a est multiple de c, alors, a est multiple de $b + c$. [5]
- Vrai ou faux (justifié) : si a est multiple de c, si b est multiple de c et si $a \geq b$, alors, $a - b$ est multiple de c. [6]
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un multiple de 14 qui ne soit pas un multiple de 7. [7]
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un multiple de 7 qui ne soit ni un multiple de 14, ni un multiple de 21, ni le nombre 7, lui-même. [8]

2.1.3 Diviseurs

Définition : on dit que a est diviseur de b s'il existe un entier naturel k tel que $b = k \times a$.

Exemple : 8 est diviseur de 56. En effet, $56 = 7 \times 8$.

Exercices non corrigés :

Exercice 3

- 5 est-il diviseur de 25 ? [9]
- 18 est-il diviseur de 9 ? [10]
- Quel est l'ensemble des diviseurs de 48 ? [11]
- Soit n un entier naturel non nul. 0 est-il diviseur de n ? [12]

5. Faux ! 21 est multiple de 3 et de 7, mais pas de $3 + 7 = 10$.
6. Vrai ! En effet, il existe un entier naturel k tel que $a = k \times c$ (car a est multiple de c) ; il existe un entier naturel l tel que $b = l \times c$ (car b est multiple de c) ; ainsi, par somme, $a - b = k \times c - l \times c = (k - l) \times c$. Puis, $a - b$ est multiple de c (on a pu trouver un entier naturel $k - l$ [Remarque : c'est un entier relatif, comme différence de deux entiers relatifs et il est positif car $a - b$ et c le sont.] qui, multiplié par c, donne $a - b$).
7. Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 14 est multiple de 7, tout multiple de 14, l'est de 7.
8. Vrai ! Par exemple, 35, 49, ...
9. Oui, car $25 = 5 \times 5$, et 5 est bien un entier naturel.
10. Non, car $9 = \frac{1}{2} \times 18$ et $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier naturel.
11. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, et 48. Cet ensemble est de cardinal fini.
12. Non, car $0 \times k = 0 \neq n$.

Remarque importante : si a est un multiple de b, alors b est un diviseur de a ; réciproquement, si b est un diviseur de a, alors a est un multiple de b.

Théorème 2.3
Propriété additive : si c est diviseur de a et c est diviseur de b, alors, c est diviseur de $a + b$. [13]

Théorème 2.4
Propriété de transitivité : si c est diviseur de b et b est diviseur de a, alors, c est diviseur de a. [14]

Exercices non corrigés :

Exercice 4

- Vrai ou faux (justifié) : si c est diviseur de a, si b est diviseur de a et si $c \geq b$, alors, $c - b$ est diviseur de a. [15]
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 24 qui ne soit pas un diviseur de 12, ni 24, lui-même. [16]
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 124 qui ne soit pas un diviseur de 248. [17]

2.1.4 Division euclidienne

Définition : pour a (entier naturel quelconque) et b (entier naturel non nul quelconque), il existe un entier naturel q et un entier naturel r tels que

$$a = b \times q + r,$$

où

$$0 \leq r < b.$$

Dans ce cas, on parle de division euclidienne de a (le dividende) par b (le diviseur) où q est un quotient et r un reste.

Théorème 2.5
Dans la division euclidienne de a par b, le quotient et le reste sont définis de façon unique.

Note : le quotient provenant de la division euclidienne de a par b est souvent appelé quotient euclidien pour le distinguer du quotient a/b.

Exemple : dans la division euclidienne de 356 par 15, le quotient est 23 et le reste est 11 ; cela s'écrit : $356 = 23 \times 15 + 11$.

13. C'est exactement la propriété additive vue dans la section précédente.
14. C'est exactement la propriété de transitivité vue dans la section précédente.
15. Faux ! 7 et 3 sont des diviseurs de 21, mais pas $7 - 3 = 4$.
16. Vrai ! 8.
17. Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 124 est diviseur de 248, tout diviseur de 124, l'est de 248.

L'algorithme d'Euclide pour la division euclidienne

Le voici sur l'exemple de la division euclidienne de 3562 par 23. Il permet d'obtenir le reste (20) et le quotient (154) de cette division euclidienne.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 3 & 5 & 6 & 2 & 2 & 3 & \\
\cline{6-8}
- & 2 & 3 & & & 1 & 5 & 4 \\
\cline{1-5}
 & 1 & 2 & 6 & & & & \\
- & 1 & 1 & 5 & & & & \\
\cline{1-5}
 & & 1 & 1 & 2 & & & \\
 & & - & 9 & 2 & & & \\
\cline{1-5}
 & & & 2 & 0 & & &
\end{array}
$$

La technique opératoire dans la division euclidienne de a par b est la suivante :

1. On écrit au brouillon la table utile des multiples de b ($1 \times b$, $2 \times b$, ..., $9 \times b$).
2. On considère a_1 le plus petit nombre constitué des premiers chiffres de a tel que $a_1 \geq b$. On effectue la division euclidienne de a_1 par b dont le quotient est noté q_1 et dont le reste est noté r_1. q_1 est le premier chiffre du quotient (d'où l'utilité de l'écriture au brouillon de la table des multiples de b).
3. Tant qu'il existe encore des chiffres à considérer dans a, on effectue (la première fois, i vaut 2, puis il est incrémenté à chaque fois de 1) :
   (a) On considère a_i le nombre formé des chiffres de r_{i-1} suivis du premier chiffre de a qui n'ait pas encore été considéré.
   (b) On effectue la division euclidienne de a_i par b dont le quotient est noté q_i et dont le reste est noté r_i. q_i est le $i$ème chiffre du quotient (d'où encore l'utilité de l'écriture au brouillon de la table des multiples de b).
4. Les restes $r_1, r_2, \ldots$ sont appelés les restes partiels et les quotients $q_1, q_2, \ldots$ sont appelés les quotients partiels (ce sont des chiffres). Le reste de la division euclidienne de a par b est le dernier reste partiel obtenu ; le quotient de cette division est le nombre formé des quotients partiels.

Exercices non corrigés :

Exercice 5 [13, Créteil, Paris, Versailles] Sachant que

$$36202744 = 9658 \times 3748 + 4560,$$

donner le quotient de la division euclidienne de 36202744 par 3748.

Exercice 6 [7, Besançon] Quels sont les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 255$?

Exercice 7 Compléter les • par des chiffres en convenant qu'un chiffre situé en première position est non nul.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & \bullet & \bullet & 7 & 6 & \;3\;\;6 \\ \cline{6-6}
- & 3 & \bullet & 4 & & \;\bullet\;\;\bullet \\ \cline{1-5}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & - & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \cline{1-5}
 & & & 2 & \bullet &
\end{array}$$

Indiquer toutes les manières possibles pour compléter ces $\bullet$.

Exercice 8 [9, Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poiriers, La Réunion] Les lettres a et a' désignent des entiers naturels. Dans la division euclidienne de a par 11, le reste est r. Dans la division euclidienne de a' par 11, le reste est r'.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $a + a'$ par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $3 \times a$ par 11.

Exercice 9 Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne $a < 3000$, $q = 82$, $r = 47$. Trouver toutes les valeurs possibles pour a et b.

Exercice 10 Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne $q = r = 37$. Trouver la plus petite valeur possible que peut prendre a.

Exercice 11 Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne $a = \alpha^2$ où α est entier naturel, $b = 8$. Donner r pour $\alpha = 1$. Donner r pour $\alpha = 3$. Donner r pour $\alpha = 5$. Montrer que si α est impair, alors $r = 1$.

Exercice 12 On cherche un nombre naturel de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33. Déterminer le (ou les) nombre (ou nombres) solution (ou solutions).

Exercice 13 Le nombre de multiples de b qui soient non nuls et inférieurs ou égaux à a est donné par le quotient de la division euclidienne de a par b (i.e. $QDE(a, b)$).

De même, le nombre de multiples de b qui soient non nuls et inférieurs ou égaux à a' est donné par le quotient de la division euclidienne de a' par b (i.e. $QDE(a', b)$).

On suppose $a' > a$.

Par conséquent, le nombre de multiples de b qui soient compris entre $a + 1$ (inclus) et a' (inclus) est donné par le quotient de la division euclidienne de a' par b diminué du quotient de la division euclidienne de a par b (i.e. $QDE(a', b) - QDE(a, b)$).

Mais, est-il toujours vrai que $QDE(a', b) - QDE(a, b) = QDE(a' - a, b)$?

Exercice 14 [7, Lyon] Les multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite deux chiffres exactement, sont : 21, 42, 63, 84. Pour écrire cette liste, il faut 8 caractères d'imprimerie. Combien en faut-il pour écrire la liste des multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite trois chiffres exactement ? Même question avec cinq chiffres.[18]

Exercice 15 [8, Lyon, Grenoble] On considère la suite croissante de tous les naturels non multiples de 7 (1 , 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, ...). 1 est de rang 1, 2 est de rang 2, 3 est de rang 3, 4 est de rang 4, 5 est de rang 5, 6 est de rang 6, 8 est de rang 7, 9 est de rang 8, 10 est de rang 9, 11 est de rang 10, 12 est de rang 11, ...

1. Quel est le rang de 47 ? Quel est le rang de 741 ?
2. Quel est le terme de rang 26 ? Quel est le terme de rang 52 ? Quel est le terme de rang 136 ?

Exercice 16 [8, Reims, Strasbourg] Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.

1. Quel est le dernier nombre atteint ?
2. Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris) ?
3. Par quels nombres puis-je remplacer 365 sans modifier les deux réponses précédentes ?

Exercice 17 Soit a un entier naturel. Dans la division euclidienne de a par 7, on obtient un quotient double du reste. Quelles sont les valeurs de a possibles ?

2.1.5 Les nombres premiers

Définition : on dit qu'un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs distincts.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, ... Ni 0 (qui possède une infinité de diviseurs), ni 1 (qui ne possède qu'un diviseur, ne sont des nombres premiers.

Le crible d'Eratosthène

Cette méthode permet de décrire tous les entiers premiers inférieurs (au sens large) à un nombre donné N.

1. J'écris tous les entiers naturels de 1 à N.
2. Je barre 1.
3. J'itère "j'entoure le suivant et je barre ses multiples", jusqu'à avoir barré ou entouré tous les nombres écrits.

Exemple : $N = 80$.

18. Le nombre de multiples (excluant 0) de b inférieurs où égaux à a est donné par le quotient de la division euclidienne de a par b.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~

Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Théorème 2.6

Soit n un entier naturel. Alors, on peut écrire $n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ où les entiers naturels p_1, p_2, …, p_k sont premiers. De plus, cette écriture est unique si $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$.

Exemple : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.

Recherche systématique de cette décomposition : soit n l'entier naturel à décomposer en produit de facteurs premiers ; je cherche le plus petit entier naturel premier p qui divise n ; j'écris alors $n = p \times m$ et je recommence en faisant jouer à m le rôle de n.

Exemple : $120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Remarque : une écriture abrégée de cette décomposition eut été : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Ceci mène à une autre éciture du théorème 2.6.

Théorème 2.7

Soit n un entier naturel. Alors, on peut écrire $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ où les entiers naturels p_1, p_2, …, p_k sont premiers et distincts, et où α_1, α_2, …, α_k sont des nombres naturels. De plus, cette écriture est unique si $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.

Utilisation de cette écriture : pour dénombrer les diviseurs d'un entier naturel n donné.

Théorème 2.8

Soit n un entier naturel tel que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ où les entiers naturels p_1, p_2, …, p_k sont premiers et distincts, et où α_1, α_2, …, α_k sont des nombres naturels. Alors, le nombre de diviseurs de n est $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$.

Exemple : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, donc le nombre de diviseurs de 120 est $(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$. Ceci peut s'expliquer à l'aide d'un arbre !

Exercices non corrigés :

Exercice 18 Quel est le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs ?

Exercice 19 Montrer que si a (non nul et distinct de 1) est un nombre entier naturel non premier, alors il possède un diviseur distinct de 1 qui soit inférieur au sens large à $\sqrt{a}$.

Exercice 20 [12, Amiens] Je suis un nombre à trois chiffres qui possède exactement trois diviseurs. La somme de mes chiffres est de treize. Qui suis-je ?

2.1.6 Plus grand commun diviseur de deux entiers naturels

Définition : on appelle plus grand commun diviseur des deux entiers naturels a et b le plus grand entier naturel qui soit diviseur à la fois de a et de b (comme son nom l'indique). On le note $PGCD(a, b)$.

Remarque : on ne parle pas de $PGCD(a, b)$, lorsque a et b sont conjointement nuls.

Exemple : les diviseurs de 12 sont $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$; les diviseurs de 18 sont $1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$; les diviseurs communs à 12 et à 18 sont $1,\ 2,\ 3,\ 6$; le plus grand de ces diviseurs communs est donc 6 et par suite, $PGCD(12, 18) = 6$.

Théorème 2.9
Soit a un entier naturel tel que $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ où les entiers naturels $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ sont premiers et distincts, et où $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ sont des nombres naturels. Soit b un entier naturel tel que $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ où les entiers naturels $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ sont premiers et distincts, et où $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_k$ sont des nombres naturels. Alors,

$$PGCD(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}.$$

Exemple 1 : $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^3$, puis $PGCD(12, 18) = 2^{\min(2,1)} \times 3^{\min(1,2)}$, et enfin, $PGCD(12, 18) = 2 \times 3 = 6$.

Exemple 2 : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ et $108 = 2^2 \times 3^3$, puis $PGCD(120, 108) = 2^{\min(3,2)} \times 3^{\min(1,3)} \times 5^{\min(1,0)}$, et enfin, $PGCD(12, 18) = 2^2 \times 3 = 12$.

Théorème 2.10
Soient a et b deux entiers naturels. Alors, les diviseurs communs à a et à b sont les diviseurs du $PGCD(a, b)$.

Algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres

Théorème 2.11
Soient a et b deux entiers naturels. Alors, $PGCD(a, b) = PGCD(b, a)$. [19]

Théorème 2.12
Pour tout entier naturel a non nul, $PGCD(0, a) = a$. [20]

Théorème 2.13
On considère deux entiers naturels a et b tels que $a \geq b$. Alors, $PGCD(a, b) = PGCD(b, a - b)$. [21]

---

19. Cela découle directement de la définition du PGCD de deux nombres
20. a est le plus grand diviseur de a et il divise aussi 0.
21. Soit d le plus grand diviseur commun de a et b. d divise alors aussi $a - b$, d'après un exercice déjà vu. d est donc diviseur commun de b et de $a - b$, mais on ne sait pas encore s'il est le plus grand. On va alors raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe d' un diviseur commun de b et de $a - b$ qui soit plus grand que d. Dans ce cas, d' est diviseur aussi de $a = b + (a - b)$, d'après le théorème 2.3. d' est par conséquent diviseur de a et de b et est plus grand que d, ce qui est absurde car d est défini comme étant le plus grand diviseur commun de a et de b.

Les théorèmes 2.11, 2.12 et 2.13 permettent de donner le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels.

Exemple 1 : $PGCD(120, 108) = PGCD(108, 12) = PGCD(96, 12) = PGCD(84, 12) = PGCD(72, 12) = PGCD(60, 12) = PGCD(48, 12) = PGCD(36, 12) = PGCD(24, 12) = PGCD(12, 12) = PGCD(12, 0) = 12$.

Exemple 2 : $PGCD(154, 49) = PGCD(105, 49) = PGCD(56, 49) = PGCD(49, 7) = PGCD(42, 7) = PGCD(35, 7) = PGCD(28, 7) = PGCD(21, 7) = PGCD(14, 7) = PGCD(7, 7) = PGCD(7, 0) = 7$.

Les soustractions itérées peuvent être remplacées par des divisions euclidiennes, rendant l'algorithme plus expert.

Théorème 2.14
On considère deux entiers naturels a et b tels que $a \geq b$. Alors, $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$ où r est le reste dans la division euclidienne de a par b.[22]

Exemple 1 : $PGCD(120, 108) = PGCD(108, 12) = PGCD(12, 0) = 12$.
Exemple 2 : $PGCD(154, 49) = PGCD(49, 7) = PGCD(7, 0) = 7$.

2.1.7 Plus petit commun multiple de deux entiers naturels

Définition : on appelle plus petit commun multiple des deux entiers naturels a et b le plus petit entier naturel non nul qui soit multiple à la fois de a et de b (comme son nom l'indique). On le note $PPCM(a, b)$.

Remarque : on ne parle pas de PPCM(a,b) si l'un des deux parmi a et b est nul ; le $PPCM(a, b)$ est un diviseur de $a \times b$.

Exemple : les multiples de 12 sont 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ... ; les multiples de 18 sont 0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ... ; les multiples communs à 12 et à 18 sont 0, 36, 72, ... ; le plus petit de ces multiples communs (qui soit non nul) est donc 36 et par suite, $PPCM(12, 18) = 36$.

Théorème 2.15
Soit a un entier naturel tel que $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ où les entiers naturels p_1, p_2, ..., p_k sont premiers et distincts, et où α_1, α_2, ..., α_k sont des nombres naturels. Soit b un entier naturel tel que $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ où les entiers naturels p_1, p_2, ..., p_k sont premiers et distincts, et où β_1, β_2, ..., β_k sont des nombres naturels. Alors,

$$PPCM(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}.$$

Exemple 1 : $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^3$, puis $PPCM(12, 18) = 2^{\max(2,1)} \times 3^{\max(1,2)}$, et enfin, $PPCM(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$.

Exemple 2 : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ et $108 = 2^2 \times 3^3$, puis $PPCM(120, 108) = 2^{\max(3,2)} \times 3^{\max(1,3)} \times 5^{\max(1,0)}$, et enfin, $PPCM(12, 18) = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$.

22. Soit d le plus grand diviseur commun de a et b. d divise alors aussi $a - b \times q = r$, où q est le quotient dans la division euclidienne de a par b, d'après un exercice déjà vu. d est donc diviseur commun de b et de r, mais on ne sait pas encore s'il est le plus grand. On va alors raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe d' un diviseur commun de b et de r qui soit plus grand que d. Dans ce cas, d' est diviseur aussi de $a = b \times q + r$, d'après le théorème 2.3. d' est par conséquent diviseur de a et de b et est plus grand que d, ce qui est absurde car d est défini comme étant le plus grand diviseur commun de a et de b.

Théorème 2.16
Soient a et b deux entiers naturels. Alors, les multiples communs à a et à b sont les multiples du $PPCM(a,b)$.

Théorème 2.17
Soient a et b deux entiers naturels. Alors,[23]

$$a \times b = PGCD(a,b) \times PPCM(a,b).$$

Exercices non corrigés :

Exercice 21 [7, Rouen (1)] *Histoire de boîtes...*

L'histoire se limite aux boîtes parallélépipédiques dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres. L'histoire dit qu'une boîte Q pave une boîte P si la boîte P est exactement et parfaitement remplie avec un nombre entier (strictement supérieur à un) d'exemplaires de la boîte Q (après remplissage, il n'y a pas de trou et rien ne dépasse).

Deux boîtes B_1 et B_2 ont les dimensions suivantes :

Boîtes	Dimensions en centimètres		
B_1	72	36	48
B_2	40	80	60

1. (a) Est-il possible de placer une de ces boîtes entièrement dans l'autre ?
   (b) Est-ce qu'une des boîtes pave l'autre ? Si oui, avec combien d'exemplaires ?
   (c) Est-ce qu'une des boîtes est un agrandissement de l'autre ? Si oui, à quelle échelle ?
   Vous justifierez vos réponses.
2. Trouvez toutes les boîtes cubiques qui pavent B_1. Combien en faut-il à chaque fois pour paver B_1 ? Quelle est celle de plus grand volume ?
   Vous justifierez vos réponses.
3. Trouvez toutes les boîtes cubiques qui pavent à la fois B_1 et B_2. Combien en faut-il à chaque fois pour paver B_2 ?
   Vous justifierez vos réponses.
4. Quelle est la notion mathématique sous-jacente aux questions 2 et 3 ?

Exercice 22 [9, Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poiriers, La Réunion] Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large, à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera planté à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être un nombre entier de mètres.

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
2. Déterminez, dans chaque cas, le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

23. Cette propriété découle directement des théorèmes 2.9 et 2.15.

2.2 Principes de numération dans l'ensemble des entiers naturels

Dans la base décimale, celle que nous utilisons habituellement, l'écriture du nombre 2050 dégage que le nombre en question est somme de 2 milliers et de 5 dizaines. Elle induit également que $2050 = 2 \times 1000 + 5 \times 10 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 0 \times 10^0$. On peut voir, à travers cette écriture le rapport privilégié au nombre 10 duquel la base décimale tire son nom.

On peut aussi écrire un nombre entier naturel n en n'importe quelle base b où b est un entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$n = a_0 \times b^0 + a_1 \times b^1 + a_2 \times b^2 + \ldots + a_k \times b^k,$$

où les entiers naturels a_0, a_1, a_2, ..., a_k sont strictement inférieurs à b.

On rappelle : $b^0 = 1$; $b^1 = b$.

Cette écriture peut aussi être abrégée comme suit : $n = \overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0}^{(b)}$.

Familièrement, la base 2 s'appelle la base binaire, la base 60 s'appelle la base sexagésimale.

Exercices non corrigés :

Exercice 23 Ecrire 101 en base 7. Ecrire 100 en base 5. Ecrire 100 en base 2.

NB : Pour convertir l'écriture d'un nombre n de la base décimale en la base b :

1. On obtient a_0, qui est le dernier chiffre du nombre n, comme reste dans la division eulidienne de n par b, cette division fournissant le quotient q_0.
2. On obtient a_i (tant que le quotient q_{i-1} est plus grand que b au sens large, en incrémentant i de 1 à chaque fois) comme reste de la division euclidienne de q_{i-1} par b, cette division fournissant le quotient q_i.
3. On obtient a_k, qui est le premier chiffre du nombre n, égal à q_{k-1}.

Puis, $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}^{(10)}$.

Exercice 24 Transcrire le nombre $\overline{12345}^{(6)}$ dans notre système décimal.

Exercice 25 Transcrire le nombre $\overline{123}^{(4)}$ en base 2. Ensuite, transcrire le nombre $\overline{33210323123}^{(4)}$ en base 2.

2.2.1 Les techniques opératoires

L'addition

$678 + 987 = XXX$;
$\overline{1234}^{(5)} + \overline{4321}^{(5)} = \overline{XXX}^{(5)}$;
$\overline{101010}^{(2)} + \overline{1110101}^{(2)} = \overline{XXX}^{(2)}$;
$\overline{(41)(42)(43)}^{(60)} + \overline{(44)(45)(46)}^{(60)} = \overline{XXX}^{(60)}$.

Exercice 26 [13, Lyon] Toto additionne deux nombres entiers avec la méthode habituelle, et trouve 499 sans faire d'erreur. Combien de retenues a-t-il effectuées ?

La soustraction

$987 - 789 = XXX$;
$\overline{4321}^{(5)} - \overline{1234}^{(5)} = \overline{XXX}^{(5)}$;
$\overline{10100010}^{(2)} - \overline{1110101}^{(2)} = \overline{XXX}^{(2)}$;
$\overline{(1)(41)(42)(43)}^{(60)} - \overline{(44)(45)(46)}^{(60)} = \overline{XXX}^{(60)}$.

La multiplication

$57 \times 892 = XXX$;
$\overline{33}^{(5)} \times \overline{34}^{(5)} = \overline{XXX}^{(5)}$;
$\overline{10100010}^{(2)} \times \overline{1110101}^{(2)} = \overline{XXX}^{(2)}$;
$\overline{(1)(40)(20)}^{(60)} \times \overline{(20)(40)}^{(60)} = \overline{XXX}^{(60)}$.

Exercice non corrigé :

Exercice 27 [8, Créteil, Paris, Versailles] On considère le nombre $A = 92865317 \times 814975$.

1. Déterminer le nombre de chiffres de A.
2. Démontrer que le chiffre des dizaines est 7 et que le chiffre des unités est 5.
3. Les calculatrices courantes ne donnent pas directement tous les chiffres du nombre A. Sans utiliser la technique opératoire de la multiplication, c'est-à-dire sans poser l'opération 92865317×814975, décrire un procédé qui utilise une calculatrice affichant dix chiffres et qui permette de déterminer tous les chiffres du nombre A.

La division euclidienne

$987 \div 37 = XXX$;
$\overline{4321}^{(5)} \div \overline{12}^{(5)} = \overline{XXX}^{(5)}$;
$\overline{110111010}^{(2)} \div \overline{101}^{(2)} = \overline{XXX}^{(2)}$.

Technique de la multiplication à la russe et égyptienne

A la russe :

$$\begin{array}{rcl} 88 & \times & 82 \\ \underline{176} & \times & 41 \\ 352 & \times & 20 \\ 704 & \times & 10 \\ \underline{1408} & \times & 5 \\ 2816 & \times & 2 \\ \underline{5632} & \times & 1 \\ \text{Somme : } 7216 & & \end{array}$$

Egyptienne :

$$\begin{array}{rcl}
1 & \rightleftharpoons & 88 \\
\mapsto \underline{2} & \rightleftharpoons & \underline{176} \\
4 & \rightleftharpoons & 352 \\
8 & \rightleftharpoons & 704 \\
\mapsto \underline{16} & \rightleftharpoons & \underline{1408} \\
32 & \rightleftharpoons & 2816 \\
\mapsto \underline{64} & \rightleftharpoons & \underline{5632} \\
\text{Somme : } 82 & & \text{Somme : } 7216
\end{array}$$

Questions

1. Par ces deux techniques, calculer 56×83.
2. Expliquer que ces techniques sont valables.
3. Combien de lignes la multiplication 4567×3456 nécessite-t-elle (il n'est pas obligatoire d'effectuer le calcul pour répondre à la question) ?

2.2.2 Les critères de divisibilité dans la base décimale

Théorème 2.18

Un entier naturel n est divisible par 2 si son chiffre des unités est divisible par 2 (i.e. est 0, 2, 4, 6 ou 8), et réciproquement.

Théorème 2.19

Un entier naturel n est divisible par 4 si le nombre constitué du chiffre des dizaines et du chiffre des unités de n est divisible par 4 (i.e. est 00, 04, 08, ... ou 96), et réciproquement.

Théorème 2.20

Un entier naturel n est divisible par 8 si le nombre constitué du chiffre des centaines, du chiffre des dizaines et du chiffre des unités de n est divisible par 8 (i.e. est 000, 008, 016, ... ou 992), et réciproquement.

Théorème 2.21

Un entier naturel n est divisible par 5 si son chiffre des unités est divisible par 5 (i.e. est 0 ou 5), et réciproquement.

Théorème 2.22

Un entier naturel n est divisible par 25 si le nombre constitué du chiffre des dizaines et du chiffre des unités de n est divisible par 25 (i.e. est 00, 25, 50 ou 75), et réciproquement.

Théorème 2.23

Un entier naturel n est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0, et réciproquement.

Théorème 2.24

Un entier naturel n est divisible par 100 si son chiffre des dizaines et son chiffre des unités sont 0, et réciproquement.

Théorème 2.25
Un entier naturel n est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3, et réciproquement.

Théorème 2.26
Un entier naturel n est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9, et réciproquement.

Théorème 2.27
Un entier naturel n est divisible par 11 si l'écart entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11, et réciproquement.

Les démonstrations des théorèmes 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24 sont du même type. Il n'est ainsi démontré que le théorème 2.19.

Soit $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0}^{(10)}$. On a $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}^{(10)} \times 100 + \overline{a_1 a_0}^{(10)}$.

Si n est divisible par 4, alors, comme 100 est divisible par 4, $n - \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}^{(10)} \times 100$ est aussi divisible par 4. Et, $\overline{a_1 a_0}^{(10)}$, qui est le nombre constitué du chiffre des dizaines et du chiffre des unités de n, est divisible par 4. Réciproquement, si le nombre constitué du chiffre des dizaines et du chiffre des unités de n est divisible par 4, alors, comme 100 est divisible par 4, $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}^{(10)} \times 100 + \overline{a_1 a_0}^{(10)}$ est aussi divisible par 4. Et, n est divisible par 4.

Les démonstrations des théorèmes 2.25, 2.26, 2.27 sont du même type. Il n'est ainsi démontré que le théorème 2.26.

Soit
$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0}^{(10)}.$$
On a
$$n = 10^k \times a_k + 10^{k-1} \times a_{k-1} + \ldots + 10 \times a_1 + a_0.$$
Puis
$$n = ((10^k - 1) + 1) \times a_k + ((10^{k-1} - 1) + 1) \times a_{k-1} + \ldots + ((10 - 1) + 1) \times a_1 + a_0.$$
Ensuite,
$$n = (10^k - 1) \times a_k + (10^{k-1} - 1) \times a_{k-1} + \ldots + (10 - 1) \times a_1 + [a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0].$$
Et, enfin,
$$n = 9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_k + 9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k-1 \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_{k-1} + \ldots + 9 \times \overline{\underbrace{1}_{1 \text{ chiffre}}}^{(10)} \times a_1 + [a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0].$$

Si n est divisible par 9, alors, comme 9 est divisible par 9,
$$n - 9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_k + 9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k-1 \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_{k-1} + \ldots + 9 \times \overline{\underbrace{1}_{1 \text{ chiffre}}}^{(10)} \times a_1$$
est aussi divisible par 9. Et, $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$, qui est la somme des chiffres de n, est divisible par 9. Réciproquement, si la somme des chiffres de n, $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$, est divisible par 9, alors, comme 9 est divisible par 9,
$$9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_k + 9 \times \overline{\underbrace{11\ldots11}_{k-1 \text{ chiffres}}}^{(10)} \times a_{k-1} + \ldots + 9 \times \overline{\underbrace{1}_{1 \text{ chiffre}}}^{(10)} \times a_1 + [a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0]$$

est aussi divisible par 9. Et, n est divisible par 9.

Exercices non corrigés :

Exercice 28

1. Combien le nombre $72,4116 \times 10^{28}$ posède-t-il de chiffres ?
2. Vrai ou faux (justification requise) : "97^{26} s'écrit avec au moins 55 chiffres".
3. Combien y a-t-il de nombres (entiers naturels) à 2 chiffres ? à 3 chiffres ? à 4 chiffres ?
4. Parmi les nombres entiers naturels à 3 chiffres
   (a) combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres identiques ?
   (b) combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres deux à deux distincts ?
   (c) combien y en a-t-il qui ont 2 chiffres différents, l'un étant répété deux fois ?

Exercice 29 [13, Guadeloupe]

1. On considère un nombre qui s'écrit en base 10 :

$$\Delta\ 5\ \Delta\ 5\ \Delta\ 5\ \Delta\ 5\ \Delta\ 5\ \Delta.$$

   Quelle valeur donner à Δ pour que la somme des chiffres de ce nombre soit un multiple de 7 ?
2. Un nombre s'écrit en base 10 sous forme : $E97F$.
   (a) Donner tous les couples de valeurs possibles pour E et F sachant que la somme des chiffres de ce nombre est égale à 29.
   (b) On ajoute les deux conditions suivantes :
   – Le produit des chiffres de ce nombre est égal à 2268.
   – 7 divise le nombre EF.
   Quelles sont alors les valeurs respectives de E et F ?

Exercice 30 Démontrer le principe de la preuve par 9 dans une multiplication.

Exercice 31 [8, Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice] Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

Exercice 32 [10, Nancy, Metz, Reims, Strasbourg] Le village de Centville compte 100 habitants. Le plus âgé est né en 1900 et le plus jeune en 1999. Tous les habitants sont nés à une date différente et tous le premier janvier.

Pierre habite Centville. En cette année 2001, la somme des chiffres de son année de naissance est égale à son âge.

On se propose de déterminer l'année de naissance de Pierre de deux manières différentes.

1. Résoudre ce problème en utilisant des outils algébriques.
2. (a) Démontrer que l'âge de Pierre est inférieur ou égal à 28 ans.
   (b) Sachant que l'âge de Pierre est inférieur ou égal à 28 ans, décrire une procédure qu'un élève de fin de cycle 3 pourrait mettre en oeuvre pour résoudre ce problème.

Exercice 33 [7, Toulouse] Déterminer tous les nombres à trois chiffres $\overline{abc}^{(10)}$ non multiples de 10 qui vérifient les conditions suivantes :
- le chiffre des dizaines est quadruple de celui des unités ;
- en retranchant 297 à ce nombre, on obtient le nombre écrit à l'envers.

Exercice 34 [10, Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes] Un nombre de trois chiffres est tel que :
- la différence entre ce nombre et le nombre retourné est 297 ;
- la somme des trois chiffres est 11 ;
- la somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22.

Trouver ce nombre. (Indication : si, par exemple, le nombre était 231, le nombre retourné serait 132.)

Exercice 35 Soit $n = \overline{abab}^{(10)}$. Montrer que n est divisible par 101.

Exercice 36 Soit $n = \overline{abcabc}^{(10)}$. Montrer que n est divisible par 7, 11 et 13.

Exercice 37 Soient a, b et c trois chiffres distincts en base 10. Quels sont tous les nombres distincts de trois chiffres que l'on peut composer avec les chiffres a, b et c ? Montrer que la somme de ces nombres est divisible par $a + b + c$.

Exercice 38 [10, Dijon] Les nombres 2882 et 19591 sont des palindromes (cela signifie qu'en les lisant de gauche à droite ou de droite à gauche, on a le même nombre). Trouvez tous les palindromes ayant 4 chiffres qui sont divisibles par 9.

Exercice 39 Soient les chiffres a et b en base 10. Trouver a et b pour que $\overline{37a28b}^{(10)}$ soit divisible par 90.

Exercice 40 Donner tous les chiffres a et b possibles en base 10 pour que $\overline{a6b5}^{(10)}$ soit divisible par 225.

Exercice 41 [13, Créteil, Paris, Versailles] Un nombre N a pour écriture décimale $\overline{72a83b}^{(10)}$. N est divisible par 6 et 45.

1. Quel est le chiffre b ?
2. Déterminer N.

$\boxed{\textbf{Exercice 42}}$ Soient les chiffres a et b en base 10. Montrer que si $\overline{a801b}^{(10)}$ est divisible par 11, il l'est aussi par 3.

$\boxed{\textbf{Exercice 43}}$ [9, Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice] Déterminer $a = \overline{mcdu}^{(10)}$ tel que $a > 7000$, que a soit divisible par 45, que a soit impair et que son chiffre des milliers soit double de celui des centaines.

$\boxed{\textbf{Exercice 44}}$ [10, Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, La Martinique]

1. Voici deux propositions concernant des nombres donnés en écriture décimale. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.
   - *Si l'écriture d'un nombre entier se termine par* 2, *alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par* 4.
   - *Si l'écriture d'un nombre entier se termine par* 4, *alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par* 16.
2. Soit $n = \overline{a5}^{(10)}$ où a est un chiffre en base 10. Montrer que $n^2 < 9999$. Montrer que l'écriture de n^2 se termine par 25 et que son nombre de centaines est $a \times (a + 1)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 45}}$ [10, Limoges]

1. Trouver tout entier naturel à un chiffre, égal au chiffre des unités de son carré.
2. Soit A un entier naturel à deux chiffres tel que A et A^2 aient à la fois même chiffre des unités et même chiffre des dizaines.
   (a) Quels sont les chiffres des unités possibles pour A ?
   (b) Donner, en explicitant la démarche suivie, toutes les valeurs possibles pour A.
3. Donner, sans justification, un entier naturel B a trois chiffres tel que B et B^2 aient à la fois même chiffre des unités, même chiffre des dizaines et même chiffre des centaines.

$\boxed{\textbf{Exercice 46}}$ [9, Créteil, Paris, Versailles] Soit A un entier naturel.

1. Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le carré d'un nombre entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?
2. Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

$\boxed{\textbf{Exercice 47}}$ [7, Montpellier] En écriture sexagésimale, $\overline{(2)(19)(51)}^{(60)} = 2 \times 3600 + 19 \times 60 + 51$.

1. Ecrire en base 10 le nombre $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{(60)}$.
2. Ecrire en base 60 le nombre 54325432.
3. $n = \overline{(\overline{ab}^{(10)})(\overline{ba}^{(10)})}^{(60)}$.

(a) Quelle condition sur a et b ?

(b) n est multiple de 5. Que cela apporte-t-il de plus sur a et b ?

(c) $n = \overline{b21a}^{(10)}$. Que cela apporte-t-il de plus sur a et b ?

Exercice 48 Tous les nombres sont donnés dans le système décimal (en base 10).

On considère un nombre à quatre chiffres que l'on note $\overline{a1b1}$ (i.e. a est le chiffre des milliers, 1 est celui des centaines, b est celui des dizaines et 1 est celui des unités). On lui soustrait un nombre à trois chiffres que l'on note $\overline{a0b}$ (i.e. a est le chiffre des centaines, 0 est celui des dizaines et b est celui des unités). Le résultat est appelé x.

On suppose de plus que le chiffre a est strictement plus grand que 1 et que le chiffre b est strictement plus grand que le chiffre a. On abrège cette relation en écrivant : $b > a > 1$.

Question 0 Quelle est la plus petite valeur que peut prendre a ?, la plus petite que peut prendre b ?, la plus grande que peut prendre b ?, la plus grande que peut prendre a ?, la plus petite que peut prendre $a + b$?, la plus grande que peut prendre $a + b$?

On recherche l'ensemble de tous les chiffres a et b tels que x soit divisible par 11.

On rappelle la règle suivante : "Un nombre est divisible par 11 si l'écart entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11, et réciproquement, si un nombre est divisible par 11, l'écart entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11".

Question 1 Quel est le chiffre des unités de x, en fonction de b ? Expliquer ...

Question 2 Quel est le chiffre des dizaines de x, en fonction de b ? Expliquer ...

Question 3 Quel est le chiffre des centaines de x, en fonction de a ? Expliquer ...

Question 4 Quel est le chiffre des milliers de x, en fonction de a ? Expliquer ...

Question 5 Montrer que si $a + b = 12$, alors x est divisible par 11.

Question 6 Montrer que si x est divisible par 11, alors $a + b = 12$.

Question 7 Quels sont tous les a et b tels que x est divisible par 11 ?

Exercice 49 [7, Orléans-Tours] Soit $n = \overline{abc}^{(6)}$ $(103 = \overline{251}^{(6)})$.

1. Que vaut $\overline{132}^{(6)}$? Est-il multiple de 6 ? Est-il multiple de 2 ?
2. $\overline{324}^{(6)}$, $\overline{222}^{(6)}$, $\overline{550}^{(6)}$ sont-ils multiples de 6 ? Sont-ils multiples de 2 ?
3. Enoncer et montrer les critères de divisibilité par 6 et par 2 à partir de l'écriture du nombre $\overline{abc}^{(6)}$ en base 6.
4. Montrer que $\overline{325}^{(6)}$, $\overline{212}^{(6)}$, $\overline{555}^{(6)}$ sont multiples de 5. Enoncer et montrer le critère de divisibilité par 5 à partir de l'écriture du nombre $\overline{abc}^{(6)}$ en base 6.

Exercice 50 Soient a, b, et c des chiffres en base 10. Montrer que si $\overline{ab}^{(10)}$ et $\overline{bc}^{(10)}$ sont des nombres divisibles par 7, alors $\overline{ca}^{(10)}$ l'est aussi.

Exercice 51 On considère un nombre à quatre chiffres que l'on note $\overline{abcd}^{(10)}$ (i.e. a est le chiffre des milliers, b celui des centaines, c celui des dizaines et d celui des unités).

On appelle *retourné* du nombre $\overline{abcd}^{(10)}$ le nombre $\overline{dcba}^{(10)}$ (i.e. le *retourné* est obtenu en intervertissant le chiffre des milliers avec celui des unités et celui des centaines avec celui des dizaines -par exemple, le nombre 921 est le retourné du nombre 1290, et réciproquement, le nombre 1290 est le retourné du nombre 921-).

Question 1 Quels sont les *retournés* des nombres 4205, 10 et 444 ?

On considère dorénavant un nombre à quatre chiffres que l'on note $\overline{abcd}^{(10)}$ vérifiant les conditions *restrictives* : a est soit 5, soit 6, soit 7, soit 8 ou soit 9 ; b aussi est soit 5, soit 6, soit 7, soit 8 ou soit 9 (b peut être différent de a) ; c est soit 0, soit 1, soit 2, soit 3 ou soit 4 ; d aussi est soit 0, soit 1, soit 2, soit 3 ou soit 4 (d peut être différent de c).

Question 2 Combien existe-t-il de tels nombres ?

On décide de classer ces nombres du plus petit au plus grand.

Question 3 Quel sera le premier de ces nombres ?, le dernier ?, le deux cent dixième ?

On définit maintenant l'algorithme suivant :

"Je prends un nombre $\overline{abcd}$ vérifiant les conditions *restrictives*, je lui enlève son *retourné*. Le résultat ainsi obtenu est appelé résultat *intermédiaire*. Puis, au résultat *intermédiaire*, j'ajoute le *retourné* du résultat *intermédiaire*. J'écris le résultat final"

Question 4 Appliquer l'algorithme aux nombres qui, parmi 7209, 1495, 5924, 9904, 4692 et 7637, vérifient les conditions *restrictives*.

Question 5 Enoncer de façon claire et concise une propriété relative à cet algorithme.

Question 6 Démontrer cette propriété.

Faire une démonstration *exhaustive* de cette propriété, consiste à vérifier la propriété pour chacun des nombres vérifiant les conditions *restrictives*.

Question 7 Sachant que je mets 15 secondes pour vérifier la propriété pour un nombre, quel temps (en heures, minutes, secondes) mettrai-je pour effectuer une démonstration *exhaustive* de cette propriété ?

Question 8 Si je commence la démonstration *exhaustive* à 14 heures 54 minutes et 48 secondes, à quelle heure précisément aurai-je achevé cette tâche ?

Exercice 52 [11, Amiens] Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel écrit en base dix pour lequel $m > c > d > u > 0$.

Question 1 Quel est le plus petit entier N possible ?

Question 2 Quel est le plus grand entier N possible ?

Question 3 Dresser la liste des nombres N pour lesquels le chiffre des milliers est 6.

On appelle N' le nombre entier obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités avec celui des unités de mille et le chiffre des dizaines avec celui des centaines. On appelle D le nombre obtenu en faisant la différence $N - N'$.

Question 4 Exprimer D en fonction de $m,\ c,\ d$ et u.

Question 5 Montrer que D est multiple de 9.

Question 6 Quelle est la valeur maximale pour D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il maximum ?

Question 7 Quelle est la valeur minimale pour D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-il minimum ?

2.3 Les ensembles de nombres

Voici une présentation rapide de certaines propriétés relatives aux structures algébriques.

Dans la suite, E est un ensemble (exemple : l'ensemble des entiers naturels) ; $*$ ou $\dagger$ sont des lois (exemples usuels : l'addition, la multiplication, la soustraction ou la division).

2.3.1 La loi interne

Soit E un ensemble, on dit que la loi $*$ est interne si, lorsque l'on se donne a et b dans E, alors $a * b$ est également dans E.

2.3.2 La loi associative

Soit E un ensemble, on dit que la loi $*$ est associative si, lorsque l'on se donne a, b et c dans E, alors $(a * b) * c = a * (b * c)$. On note alors cette quantité $a * b * c$.

2.3.3 L'élément neutre

Soit E un ensemble, on dit que la loi $*$ admet comme élément neutre e si, lorsque l'on se donne a dans E, alors $a * e = e * a = a$.

Note : si e est un élément neutre pour une loi interne associative, il est l'unique.

2.3.4 L'élément symétrique

Soit E un ensemble, on dit que a de E admet un élément symétrique a^{-1} de E pour la loi $*$ si $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ où e est élément neutre pour la loi $*$.

Note : si a^{-1} est un élément symétrique de a pour une loi interne associative, il est l'unique.

2.3.5 La loi commutative

Soit E un ensemble, on dit que la loi $*$ est commutative si, lorsque l'on se donne a et b dans E, alors $a * b = b * a$.

2.3.6 La distributivité

Soit E un ensemble, on dit que la loi $\dagger$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans E si, lorsque l'on se donne a, b et c dans E, alors $(a * b) \dagger c = (a \dagger c) * (b \dagger c)$.

2.3.7 Ensembles de nombres

On a déjà défini les ensembles d'entiers naturels ($\mathbb{N}$) : 0 est un entier naturel ; et, si n est un entier naturel, alors $n+1$ aussi.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

Exercices corrigés :

$+$ est-elle interne dans $\mathbb{N}$? [24]

$-$ est-elle interne dans $\mathbb{N}$? [25]

On construit un ensemble contenant $\mathbb{N}$ pour lequel la loi $-$ soit interne.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs contient les entiers naturels ainsi que leurs symétriques pour la loi $+$.

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Exercices corrigés :

$+$ est-elle interne dans $\mathbb{Z}$? [26]

$-$ est-elle interne dans $\mathbb{Z}$? [27]

$\times$ est-elle interne dans $\mathbb{N}$? [28]

$\times$ est-elle interne dans $\mathbb{Z}$? [29]

$/$ est-elle interne dans $\mathbb{N}$ privé de 0 ? [30]

$/$ est-elle interne dans $\mathbb{Z}$ privé de 0 ? [31]

On construit un ensemble contenant $\mathbb{Z}$ pour lequel la loi $/$ soit interne.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels contient les nombres de la forme $a \times b^{-1}$ (noté $\frac{a}{b}$) où a est un entier relatif et b^{-1} le symétrique de l'entier naturel (non nul) b pour la loi $\times$.

Exercices corrigés :

$+$ est-elle interne dans $\mathbb{Q}$? [32]

$-$ est-elle interne dans $\mathbb{Q}$? [33]

$\times$ est-elle interne dans $\mathbb{Q}$? [34]

$/$ est-elle interne dans $\mathbb{Q}$ privé de 0 ? [35]

Soit $\frac{p}{q}$ un élément de $\mathbb{Q}$, où p est entier relatif et q est entier naturel non nul. Soit $d = PGCD(p, q)$ si $p \geq 0$ et $d = PGCD(-p, q)$ si $p < 0$, la fraction $\frac{\frac{p}{d}}{\frac{q}{d}}$ est dite irréductible, avec $\frac{p}{d}$ entier relatif et $\frac{q}{d}$ entier

24. Oui : si a et b sont entiers naturels, $a + b$ aussi.
25. Non : 2 et 5 sont entiers naturels mais pas $2 - 5$.
26. Oui : si a et b sont entiers relatifs, $a + b$ aussi.
27. Oui : si a et b sont entiers relatifs, $a - b$ aussi.
28. Oui : si a et b sont entiers naturels, $a \times b$ aussi.
29. Oui : si a et b sont entiers relatifs, $a \times b$ aussi.
30. Non : 1 et 2 sont entiers naturels, mais pas $1/2$.
31. Non : 1 et 2 sont entiers relatifs, mais pas $1/2$.
32. Oui : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$. [$b$ et d sont non nuls, $a \times d + b \times c$ est entier relatif et $b \times d$ est entier naturel non nul.]
33. Oui : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$. [$b$ et d sont non nuls, $a \times d - b \times c$ est entier relatif et $b \times d$ est entier naturel non nul.]
34. Oui : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. [$b$ et d sont non nuls, $a \times c$ est entier relatif et $b \times d$ est entier naturel non nul.]
35. Oui : $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \begin{cases} \frac{a \times d}{b \times c} \text{ si } c > 0, \\ \frac{a \times (-d)}{b \times (-c)} \text{ si } c < 0. \end{cases}$ [a, b, c et d sont non nuls,

    1. si $c > 0$, $a \times d$ est entier relatif non nul et $b \times c$ est entier naturel non nul.
    2. si $c < 0$, $a \times (-d)$ est entier relatif non nul et $b \times (-c)$ est entier naturel non nul.

]

naturel non nul. La forme irréductible d'un rationnel positif est unique.

On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Cependant, certains nombres n'entrent dans aucune de ces catégories. C'est le cas du nombre d'or [36], de $\sqrt{2}$, la racine carrée de deux [37], π, ...

2.3.8 Le développement décimal

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres admettant un développement décimal. [38] Mais qu'est-ce qu'un développement décimal ?

Nous utilisons habituellement la base décimale pour décrire les entiers, comme nous l'avons déjà vu précédemment. Prolongeons cette définition ...

Soit r un nombre réel, alors on peut écrire

$$r = \sigma \times \left(a_k \times 10^k + \ldots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \ldots + a_{-p} \times 10^{-p} + \ldots\right),$$

où les entiers naturels a_k, ..., a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-p}, ... sont strictement inférieurs à 10 (ils sont appelés chiffres) et où σ est le signe de r.

On rappelle : $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^{-p} = 1/10^p$.

Cette écriture peut aussi être abrégée comme suit : $r = \sigma \times \overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-p} \ldots}^{(10)}$.

L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire avec un développement décimal fini (i.e. pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres) [39]. Pour un décimal d, il existe donc un entier naturel p tel que $d = \sigma \times \overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-p}}^{(10)}$ et $d = \sigma \times \overline{a_k \ldots a_2 a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-p}}^{(10)}/10^p$. Ceci revient à dire que l'on peut écrire tout décimal d sous la forme $d = n/10^p$ où n est un entier relatif et p est un entier naturel.

Théorème 2.28
Un nombre rationnel irréductible p/q où p est entier relatif et q est entier naturel non nul est décimal si $q = 2^\alpha \times 5^\beta$, où α et β sont des entiers naturels. Réciproquement, si un nombre rationnel irréductible p/q où p est entier relatif et q est entier naturel non nul est décimal, alors $q = 2^\alpha \times 5^\beta$, où α et β sont des entiers naturels. [40]

36. On appelle nombre d'or le nombre positif x qui satisfait l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Par l'absurde, si p/q est un rationnel positif irréductible, alors $p^2 + p \times q - q^2 = 0$. Maintenant, par disjonction de cas, il est impossible que p et q soient tous deux impairs et que p et q soient de parités opposées, p et q sont donc tous deux pairs, mais ceci contredit le fait que la fraction p/q soit irréductible, d'où l'absurdité.

37. Par l'absurde, si p/q est un rationnel positif irréductible valant $\sqrt{2}$, alors $p^2 = 2 \times q^2$. De cette écriture multiplicative, il vient que 2 est un diviseur de p et donc que 4 est un diviseur de p^2. Par suite, 2 est un diviseur de q et p et q sont donc tous deux pairs, mais ceci contredit le fait que la fraction p/q soit irréductible, d'où l'absurdité.

38. Il aurait fallu définir l'ensemble des réels comme l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme limite de rationnels, et montrer que ces nombres admettent un développement décimal, mais ce n'est pas l'objectif de ce cours.

39. Les nombres décimaux sont en fait les seuls nombres réels qui possèdent deux développements décimaux.

40. Cela provient directement du fait que la base est 10 et que les seuls diviseurs premiers de 10 sont 2 et 5.

Théorème 2.29
Un nombre réel est rationnel si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Réciproquement, si un nombre réel est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.[41]

Soit r un rationnel positif dont le développement décimal est :

$$r = 10^{\nu} \times \overline{a_k \dots a_2 a_1 a_0, \underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-p}}\underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-p}}\dots\underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-p}}\dots}^{(10)}$$

où ν est un entier relatif et p est la longueur de la période. Le calcul de $10^p \times r - r$, donne $\frac{10^p\times r - r}{10^{\nu}} = \overline{a_k \dots a_2 a_1 a_0 a_{-1}a_{-2}\dots a_{-p}}^{(10)} - \overline{a_k \dots a_2 a_1 a_0}^{(10)}$ qui est entier naturel. Ceci permet de trouver r sous sa forme p/q où p est entier relatif et q est entier naturel non nul.

Exercices non corrigés :

Exercice 53 Parmi les réels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?

$$10;\ -21;\ 0,111\dots1\dots;\ -0,1543;\ 123,456789.$$

Exercice 54 Parmi les rationnels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?

$$12;\ -34;\ 1/3;\ -1/5;\ 9/45;\ 31/125;\ 79/43;\ -372/775.$$

Exercice 55 Parmi les réels suivants, quels sont ceux qui sont rationnels ?

$$14;\ -101;\ 1/3;\ 0,111\dots1\dots;\ 0,090909\dots09\dots;\ 0,6;\ 153,90;\ 4,44545\dots45\dots;$$

$$0,101001000100001000001\dots\underbrace{000\cdots0}_{\text{n fois}}1\underbrace{000\cdots0}_{\text{n+1 fois}}1\dots.$$

Exprimer les rationnels précédents sous la forme irréductible p/q où p est entier relatif et q est entier naturel non nul.

Exercice 56 [7, Nice] Ecrire un entier à la place du point pour que l'écriture fractionnaire désigne

Un entier naturel	Un décimal non entier naturel	Un rationnel non décimal
$\frac{.}{85}$	$\frac{.}{85}$	$\frac{.}{85}$
$\frac{85}{.}$	$\frac{85}{.}$	$\frac{85}{.}$

41. Cela découle de la somme des termes d'une suite géométrique.

Chapitre 3

La géométrie

3.1 La géométrie plane

3.1.1 Droites, demi-droites, segments (définitions)

Ces notions se passeront ici de définitions.

Notations :

- On note (AB) la droite passant par les points A et B.
- On note $[AB)$ la demi-droite issue de A, passant par B.
- On note $[AB]$ le segment ayant pour extrémités A et B.
- On note AB la longueur du segment $[AB]$.

Quand trois points sont sur la même droite, on les dit alignés.

Exercices non corrigés :

Exercice 1 Si $AB = AC$, a-t-on forcément $[AB] = [AC]$? [1]

Exercice 2 Si les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont sans point commun, en est-il forcément de même pour les droites (AB) et (CD) ? [2]

3.1.2 Droites perpendiculaires, droites parallèles

La notion de droites perpendiculaires n'est pas définie ici.

d est perpendiculaire à d' est noté $d \perp d'$.

Définition : Deux droites sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun ou sont confondues.

d est parallèle à d' est noté $d//d'$.

Tracés à la règle et à l'équerre :

1. Non ! Pour s'en convaincre, il suffit de construire un triangle ABC isocèle en A avec B et C distincts. On a $AB = AC$ (parce que le triangle est isocèle), mais on n'a pas $[AB] = [AC]$ (car ces segments ne sont pas confondus, leur seule intersection étant le point A).

2. Non ! Pour s'en convaincre, il suffit de construire un triangle ACE (A, E et C distincts) avec B milieu de $[AE]$ et D milieu de $[CE]$. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont sans point commun, mais les droites (AB) et (CD) se coupent en E.

1. D'une droite perpendiculaire à (AB), passant par C.[3]
2. D'une droite parallèle à (AB), passant par C.[4]

Exercices non corrigés :

Exercice 3 Donner des algorithmes de construction utilisant la règle graduée et l'équerre pour les deux figures suivantes :

1. $ABKC$ est un quadrilatère convexe ; ses diagonales se coupent en I ; $BI = AI = CI$; $IK = KC$; $(IK) \perp (KC)$.
2. CDE est un triangle ; A est le pied de la hauteur issue de D ; $CA = AD$; $CD = AE$; F est un point de (DE) ; $(CD)//(AF)$.

Exercice 4 Soit d une droite. Déterminer l'ensemble des points situés à moins de 2 cm de d.

Théorème 3.1
Transitivité du parallélisme. *Si $d//d'$ et si $d'//d''$, alors $d//d''$.*

Théorème 3.2
Composition de perpendicularité et de perpendicularité. *Si $d \perp d'$ et si $d' \perp d''$, alors $d//d''$.*

Théorème 3.3
Composition de parallélisme et de perpendicularité. *Si $d'//d''$ et si $d \perp d'$, alors $d \perp d''$.*

Théorème 3.4
Parallélisme et alignement. *Si $(AB)//(AC)$, alors A, B et C sont alignés.*

Théorème 3.5
Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. *Si $AC = AB + BC$, alors A, B et C sont alignés et B appartient au segment $[AC]$. Réciproquement, si B appartient au segment $[AC]$, alors $AB + BC = AC$.*

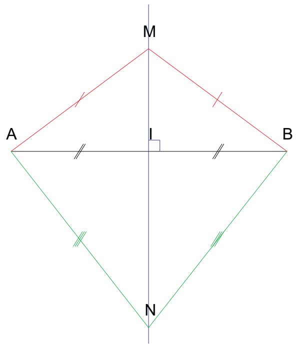
3.1.3 Médiatrices

Définition : L'ensemble des points équidistants de A et B est appelée **la médiatrice** du segment $[AB]$. Voir la figure nommée "Médiatrice".

Théorème 3.6
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment. Réciproquement, si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors, il est équidistant des extrémités de ce segment.

3. On place la règle de manière à ce qu'elle porte la droite (AB), on pose l'équerre (sous-entendu l'angle droit de l'équerre) sur la règle et on fait glisser l'équerre jusqu'à ce qu'elle permette de tracer une droite contenant le point C, ce que l'on fait.

4. On place l'équerre de manière à ce que l'un des côtés de l'angle droit porte la droite (AB), on pose la règle sur l'autre côté de l'angle droit et on fait glisser l'équerre jusqu'à ce qu'elle permette de tracer une droite contenant le point C, ce que l'on fait.



Théorème 3.7
Si une droite passe par deux points équidistants de A et de B, alors c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème 3.8
Si d est médiatrice du segment $[AB]$, alors, d est une droite telle que $d \perp (AB)$ et d passe par le milieu de $[AB]$. Réciproquement, si une droite d passe par le milieu de $[AB]$ et si cette droite est perpendiculaire à la droite (AB), alors d est médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème 3.9
Si une droite passe par un point équidistant de A et de B et est perpendiculaire à la droite (AB), alors c'est la médiatrice de $[AB]$.

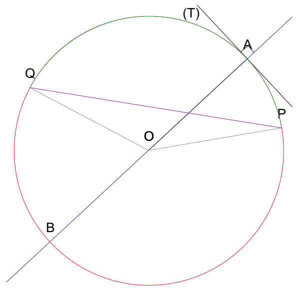
3.1.4 Cercles (définitions)

<u>Définitions</u> :

1. **Le cercle** Γ de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance r de O.
2. **Le disque plein** Ω de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance inférieure ou égale à r de O.
3. L'intérieur strict du disque plein Ω' de centre O et de rayon r (un nombre réel positif) est l'ensemble des points du plan situés à une distance strictement inférieure à r de O.
4. Soit $[AB]$ un segment. Soit O le milieu du segment $[AB]$. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon r. Soient P et Q des points du cercle. Soit (T) la droite passant par A, perpendiculaire à (AB).
   (a) On dit que les segments $[OA]$, $[OB]$, $[OP]$ et $[OQ]$ sont des **rayons** du cercle Γ.
   (b) On dit que le segment $[AB]$ est un **diamètre** du cercle Γ.
   (c) On dit que le segment $[PQ]$ est une **corde**.
   (d) On définit aussi un **arc de cercle** $\overset{\frown}{PQ}$ comme l'ensemble des points du cercle situés entre P et Q (petit arc $\overset{\frown}{PQ}$, grand arc $\overset{\smile}{PQ}$).
   (e) On dit que (T) est la **tangente au cercle** Γ en A.

Voir la figure nommée "Cercle".

<u>Positions relatives de deux cercles</u> :



1. Une infinité d'intersections. Les cercles sont confondus.
2. Deux intersections uniquement. Les cercles sont sécants.
3. Une seule. Les cercles sont tangents.
4. Sans intersection. Les cercles sont disjoints.
5. Lorsque deux cercles ont même centre, on dit qu'ils sont concentriques.

Exercices corrigés :

Exercice 5 Soient A et B fixés tels que $AB = 6\ cm$. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de $3\ cm$ de A et à moins de $5\ cm$ de B.[5]

Exercice 6 Soient C et D fixés tels que $CD = 4$. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de 2 de C et à plus de 3 de D.[6]

3.1.5 Angles (définitions)

Définitions : On appelle angle toute portion du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

On note $\widehat{AOB}$ pour l'angle saillant formé à l'aide des demi droites $[OA)$ et $[OB)$. L'autre angle formé par ces deux demi-droites est appelé angle rentrant.

On peut mesurer un angle sur une échelle allant de 0 à 360 degrés. On se sert pour ce faire d'un rapporteur.

Un peu de vocabulaire lié aux mesures :

Nom de l'angle	Mesure en degrés
Angle saillant	entre 0 et 180
Angle rentrant	entre 180 et 360
Angle aigu	entre 0 et 90
Angle obtus	entre 90 et 180
Angle droit	90
Angle plat	180
Angle plein	360

5. On trace le segment $[AB]$ de 6 centimètres. On trace le cercle C_1 de centre A et de rayon 3 centimètres, puis le cercle C_2 de centre B et de rayon 5 centimètres. La zone cherchée est celle à l'intersection des deux disques de bords C_1 et C_2.

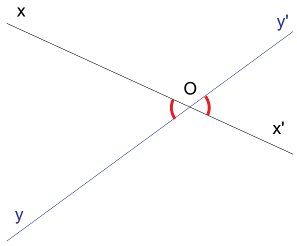
6. On trace le segment $[CD]$ de 4 unités. On trace le cercle C_1 de centre C et de rayon 2 unités, puis le cercle de centre D et de rayon 3 unités. La zone cherchée est le disque de bord C_1 privé du disque de bord C_2.

Deux angles sont dit *supplémentaires* si la somme de leurs mesures fait 180 degrés.

Deux angles sont dit *complémentaires* si la somme de leurs mesures fait 90 degrés.

3.1.6 Angles et droites

Soient deux droites $(x'x)$ et $(y'y)$. Elles sont sécantes en O.

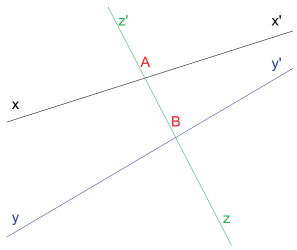


Les angles $\widehat{x'Oy'}$ et $\widehat{xOy}$ sont dits opposés par le sommet.

Théorème 3.10

Si deux angles sont opposés par le sommet, ils sont égaux en mesure.

Soient deux droites $(x'x)$ contenant un point A et $(y'y)$ contenant un point B (les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ sont du même côté de la droite (AB)). Soit $(z'z)$ une sécante contenant les points A et B (tels que A et z soient de part et d'autre de B).



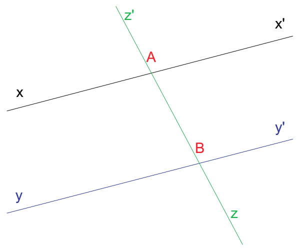
Les angles $\widehat{x'AB}$ et $\widehat{ABy}$ sont dits alternes internes. C'est aussi le cas des angles $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABy'}$.

Les angles $\widehat{z'Ax}$ et $\widehat{y'Bz}$ sont dits alternes externes. C'est aussi le cas des angles $\widehat{z'Ax'}$ et $\widehat{yBz}$.

Les angles $\widehat{z'Ax}$ et $\widehat{z'By}$ sont dits correspondants. C'est aussi le cas des angles $\widehat{z'Ax'}$ et $\widehat{z'By'}$; des angles $\widehat{xAz}$ et $\widehat{yBz}$; des angles $\widehat{x'Az}$ et $\widehat{y'Bz}$.

Théorème 3.11

Soient deux droites $(x'x)$ contenant un point A et $(y'y)$ contenant un point B qui soient parallèles (les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ sont du même côté de la droite (AB)). Soit $(z'z)$ une sécante contenant les points A et B (tels que A et z soient de part et d'autre de B).



Dans ce cas, on a

$$\widehat{z'Ax} = \widehat{x'AB} = \widehat{ABy} = \widehat{y'Bz},$$

et

$$\widehat{z'Ax'} = \widehat{xAB} = \widehat{ABy'} = \widehat{yBz}.$$

Autrement dit, si une sécante coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes internes, les angles alternes externes et les angles correspondants sont égaux.

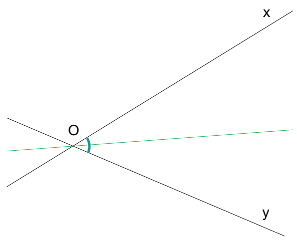
Théorème 3.12

Soient $[AB)$ et $[CD)$ deux demi-droites telles que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ soient égaux. Si B et D sont de part et d'autre de la droite (AC), alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Autrement dit, si une sécante coupe deux droites de telle façon que les angles alternes internes[7] sont égaux, alors ces deux droites, que coupe la sécante, sont parallèles.

3.1.7 Bissectrices

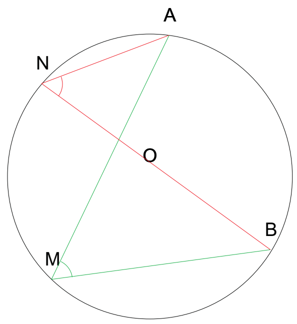
Définition : La bissectrice d'un angle est la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui partage l'angle (saillant et rentrant) en deux angles égaux en mesure.



Question : quel est l'ensemble des points équidistants des deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$?[8]

3.1.8 Angles et cercles

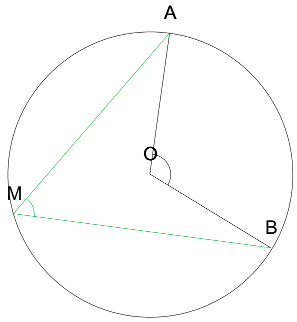
Définition : Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soient M et N deux points du cercle en dehors de ce petit arc $\overset{\frown}{AB}$. On dit que $\widehat{AOB}$ est angle au centre et que $\widehat{AMB}$ est angle inscrit, interceptant tous deux l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



7. On aurait une propriété semblable avec des angles alternes externes ou correspondants.
8. C'est la bissectrice de l'angle $\widehat{x0y}$.

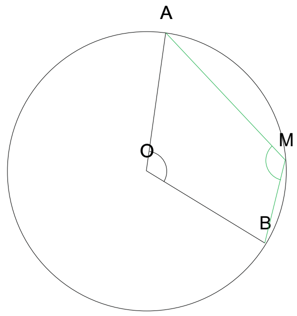
Théorème 3.13
Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soit M un point du cercle Γ sur le grand arc $\overset{\cup}{AB}$. Alors

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}.$$



Théorème 3.14
Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soit M un point du cercle Γ sur le petit arc $\overset{\cap}{AB}$. Alors

$$\widehat{AOB} = 360\text{degrés} - 2 \times \widehat{AMB}.$$



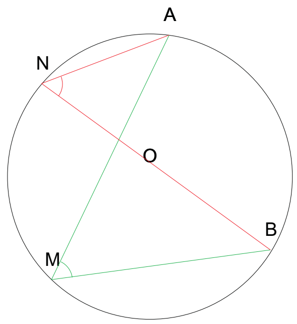
Théorème 3.15
Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soient M et N deux points du cercle appartenant tous deux au même petit arc $\overset{\cap}{AB}$ ou tous deux au même grand arc $\overset{\cup}{AB}$. Alors

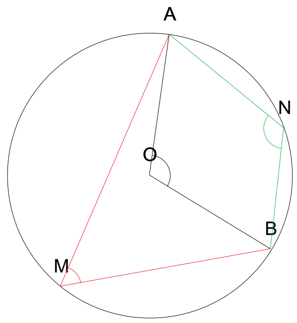
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

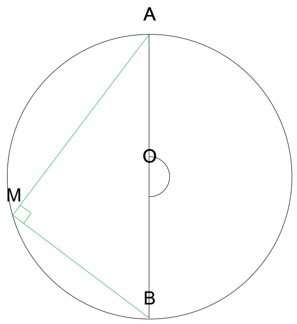
Théorème 3.16
Soit Γ un cercle de centre O. On considère alors un arc $\overline{AB}$ de ce cercle. Soient M un point du cercle appartenant au petit arc $\overset{\cap}{AB}$ et N un point du cercle appartenant au grand arc $\overset{\cup}{AB}$. Alors

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180\text{degrés}.$$

Théorème 3.17
Si $[AB]$ est un diamètre, et si M est un point de ce cercle distinct de A et de B, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.


A
N
O
B
M


A
N
O
B
M


A
O
M
B

Tracés à la règle et au compas

1. De la médiatrice d'un segment $[AB]$.[9]
2. D'une droite perpendiculaires à (AB), passant par C.[10]
3. Du milieu d'un segment $[AB]$.[11]
4. De la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C.[12]
5. De la parallèle à la droite (AB) passant par C.[13]
6. Du centre d'un cercle.[14]
7. De la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.[15]

Exercice non corrigé :

---

9. Le segment $[AB]$ est supposé donné. On trace le cercle C_1 de centre A et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à $AB/2$), puis le cercle C_2 de centre B et de rayon r (de même rayon que l'autre). Les deux cercles se coupent en deux points M et N (qui sont équidistants de A et de B) et la droite (MN) définit la médiatrice du segment $[AB]$.

10. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés. On trace le cercle Γ de centre C et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à la distance entre C et la droite (AB)). Le cercle Γ coupe la droite (AB) en deux points M et N (C est équidistant de M et de N donc sur la médiatrice du segment $[MN]$). Enfin, on trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut) qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par C.

11. Le segment $[AB]$ est supposé donné. On trace la médiatrice du segment $[AB]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

12. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés. On trace le cercle Γ de centre C et de rayon r (où on choisit r strictement supérieur à la distance entre C et la droite (AB)). Le cercle Γ coupe la droite (AB) en deux points M et N (C est équidistant de M et de N donc sur la médiatrice du segment $[MN]$). Enfin, on trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut) qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par C.

13. La droite (AB) et le point C sont supposés donnés.

<u>1ère méthode</u>! On trace la perpendiculaire (d) à la droite (AB) et qui passe par le point C (technique vue ci-haut). On trace ensuite la perpendiculaire (δ) à la droite (d) qui passe par le point C (technique vue ci-haut). La droite (δ) est alors parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur l'anti-transitivité du parallélisme).

<u>2ème méthode</u>! On place I le milieu du segment $[AC]$ (technique vue ci-haut). On trace la droite (BI) et on trace le cercle Γ de centre I et de rayon IB. Le cercle Γ coupe la droite (BI) en deux points distincts D et B tels que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme. La droite (CD) est alors parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur la caractérisation d'un parallélogramme par ses diagonales et sur la propriété de parallélisme de deux côtés opposés d'un parallélogramme.

<u>3ème méthode</u>! On trace le cercle C_1 de centre B et de rayon AC. On trace le cercle C_2 de centre C et de rayon AB. Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points dont l'un, D, tel que le quadrilatère $ABDC$ ne soit pas croisé. Le quadrilatère $ABDC$ est alors un parallélogramme et la droite (CD) est parallèle à la droite (AB) et passe par le point C. Cette technique est basée sur l'égalité des longueurs des côtés opposés d'un parallélogramme et sur la propriété de parallélisme de deux côtés opposés d'un parallélogramme.

14. Le cercle C est supposé donné. On place deux points M et N sur le cercle C. On trace la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice coupe le cercle C en deux points A et B (le segment $[AB]$ est un diamètre). On place le milieu O du segment $[AB]$ (technique vue ci-haut). Le point O est le centre du cercle C.

15. L'angle $\widehat{AOB}$ est supposé donné. On trace un cercle de centre O. Ce cercle coupe la demi-droite $[OA)$ en M et la demi-droite $[OB)$ en N. Le triangle MNO est par conséquent isocèle en O. On trace alors la médiatrice du segment $[MN]$ (technique vue ci-haut). Cette médiatrice est également bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Cette technique est basée sur le fait que dans un triangle isocèle, la médiatrice issue du sommet principal est aussi bissectrice.

Exercice 7 Donner un algorithme de construction utilisant la règle et le compas pour la figure suivante : Γ est un cercle de centre J ; M, N, E et P sont des points de Γ ; $[ME]$ et $[NP]$ sont des diamètres de Γ ; $EL = EJ$; (EL) est la tangente au cercle en E ; L, P et J sont alignés.

3.1.9 Polygones.

Généralités.

Définitions : Un **polygone convexe** est une intersection finie de demi-plans (une figure géométrique du plan délimitée par des segments est un polygone). On définit ici un polygone convexe par son intérieur (il existe des définitions basées sur la frontière -i.e. le bord-).[16]

Un **polygone** est une réunion finie de polygones convexes.[17]

Un polygone possède un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Théorème 3.18
Soit P un polygone connexe et borné. Si on note S son nombre de sommets et A son nombre d'arêtes, on a $S = A$.

Un polygone qui n'est pas convexe est dit concave. Un cas particulier des polygones concaves est celui des polygones croisés où au moins deux côtés non consécutifs, considérés comme segments, se coupent.

Théorème 3.19
La somme des angles d'un polygone non croisé à n ($n > 2$) côtés vaut $(n-2) \times 180$ degrés.[18]

polygones réguliers

Définitions : un polygone est dit régulier s'il est convexe, inscriptible dans un cercle et si tous ses côtés, considérés comme segments, ont même longueur.

Théorème 3.20
Un polygone régulier a tous ses angles égaux en mesure.

Triangles

Un triangle est un polygone à trois côtés.

Représenter de façon ensembliste les triangles scalènes, isocèles et équilatéraux. Ces *patates* classifient les triangles par les longueurs des côtés.[19]

---

16. On se limite dans la suite au cas des polygones bornés (i.e. qui peuvent être contenus dans un disque).
17. On se limite dans la suite au cas des polygones connexes (i.e. d'un seul tenant).
18. Dans le cas d'un polygone croisé, il est difficile de définir l'intérieur et l'extérieur de ce polygone et par conséquent les angles d'un polygone.
19. Les triangles équilatéraux ont leurs trois côtés de même longueur ; les triangles isocèles ont au moins deux côtés de même longueur (les équilatéraux sont donc tous isocèles) ; les scalènes ont trois côtés de longueurs distinctes (dans la famille des triangles, ce sont donc ceux qui ne sont pas isocèles).

Représenter de façon ensembliste les triangles acutangles, obtusangles, rectangles, isocèles et équilatéraux. Ces *patates* classifient les triangles par les angles.[20]

Droites particulières dans le triangle ABC :

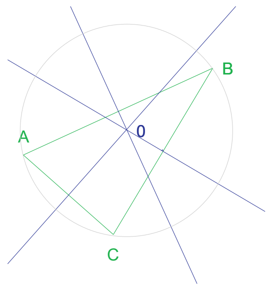
1. La hauteur issue de A est la droite passant par A qui est perpendiculaire à la droite (BC). Le pied de la hauteur issue de A est le point de concours de la hauteur issue de A et de la droite (BC). Par extension, le mot hauteur désigne aussi la distance entre A et le pied relatif à sa hauteur.
2. La médiane issue de A est le segment dont les extrémités sont A et le milieu du segment $[BC]$. La médiane est également, par abus de langage, la droite passant par A et par le milieu du segment $[BC]$. Par extension, le mot médiane désigne aussi la distance entre A et le milieu du segment $[BC]$.
3. La médiatrice du segment $[BC]$ est déjà définie. C'est la médiatrice relative au segment $[BC]$ du triangle ABC.
4. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est déjà définie. C'est la bissectrice issue de A du triangle ABC. Le pied de la bissectrice issue de A est le point de concours de la bissectrice issue de A et de la droite (BC). Par extension, le mot bissectrice désigne aussi la distance entre A et le pied relatif à sa bissectrice.

Théorème 3.21

Les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices d'un triangle sont concourantes. On appelle respectivement les points de concours l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit du triangle.

Théorème 3.22

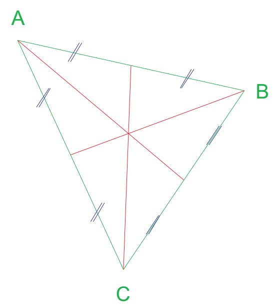
Le centre du cercle circonscrit est, comme son nom l'indique, le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est par conséquent équidistant des trois sommets de ce triangle.



Théorème 3.23

Le centre de gravité du triangle coupe une médiane en deux parties disjointes (au centre de gravité près) dont celle contenant le sommet a une longueur double de l'autre.

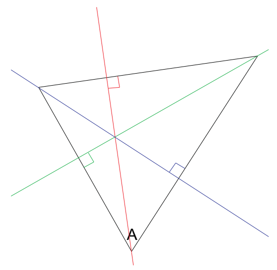
20. Les triangles équilatéraux ont leurs trois angles de même mesure ; les triangles isocèles ont au moins deux angles de même mesure (les équilatéraux sont donc tous isocèles) ; les triangles rectangles ont un angle droit (ils ne peuvent être équilatéraux, ils peuvent être isocèles, mais ils peuvent ne pas être isocèles ; les triangles obtusangles possèdent exactement un angle obtus (supérieur strictement à 90° en mesure) (ils ne peuvent être équilatéraux, ils peuvent être isocèles, ils ne peuvent pas être rectangles mais ils peuvent ne pas être isocèles) ; les triangles acutangles possèdent trois angles aigus (inférieurs strictement à 90° en mesure) (ce sont tous ceux qui ne sont ni rectangles, ni obtusangles).



Théorème 3.24

Utilisation de différents points de concours du triangle

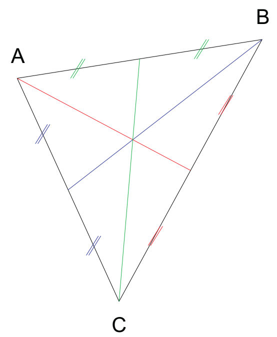
1. *De l'orthocentre ...*



   (a) *Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des hauteurs de ce triangle, alors c'est une hauteur de ce triangle.*

   (b) *Si une droite est perpendiculaire à un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des hauteurs de ce triangle, alors c'est une hauteur de ce triangle.*

2. *Du centre de gravité...*

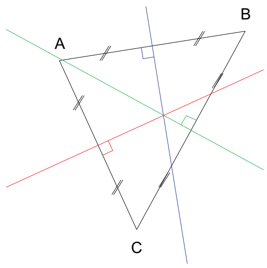


   (a) *Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médianes de ce triangle, alors c'est une médiane de ce triangle.*

   (b) *Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médianes de ce triangle, alors c'est une médiane de ce triangle.*

3. *Du centre du cercle circonscrit ...*

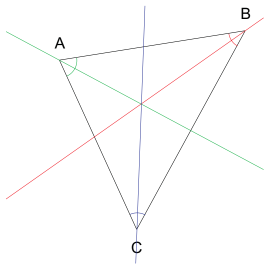
   (a) *Si une droite est perpendiculaire à un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médiatrices de ce triangle, alors c'est une médiatrice de ce triangle.*



(b) Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des médiatrices de ce triangle, alors c'est une médiatrice de ce triangle.

4. *Du centre du cercle inscrit ...*

   Si une droite passe par un sommet d'un triangle et passe par le point d'intersection de deux des



   bissectrices de ce triangle, alors c'est une bissectrice de ce triangle.

Théorème 3.25

Propriétés du triangle rectangle.

1. *Si un triangle ABC est rectangle en A, alors la médiane issue de A mesure la moitié de l'hypoténuse $[BC]$. Réciproquement, si dans un triangle ABC, la médiane issue de A mesure la moitié du segment $[BC]$, alors ce triangle est rectangle en A et le côté $[BC]$ en est l'hypoténuse.*

2. *Si un triangle ABC est rectangle en A, alors l'hypoténuse $[BC]$ est diamètre du cercle circonscrit. Réciproquement, si un triangle ABC a un côté $[BC]$ qui est diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle en A et le diamètre $[BC]$ en est l'hypoténuse.*

3. *Soit un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A, alors $AH^2 = BH \times HC$. Réciproquement, soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A tel que $AH^2 = BH \times HC$ et que H appartienne au segment $[BC]$, alors ce triangle est rectangle en A.*

Théorème 3.26

Propriétés du triangle équilatéral.

1. *Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux en mesure (60°). Réciproquement, si dans un triangle, les trois angles sont égaux en mesure (60°), alors ce triangle est équilatéral.*

2. *Dans un triangle équilatéral, les côtés sont de même longueur. Réciproquement, si dans un triangle, les trois côtés sont de même longueur, alors ce triangle est équilatéral.*

3. *Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie orthogonale et un centre de rotation de 120° et de 240°. Réciproquement, si un triangle possède deux axes de symétrie orthogonale, il est équilatéral.*

4. *Dans un triangle équilatéral, les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices (issues d'un même sommet) sont confondues.*
5. *Eléments pour une réciproque :*
   (a) *dans un triangle, une médiatrice / médiane est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (b) *dans un triangle, une médiatrice / hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (c) *dans un triangle, une médiatrice / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (d) *dans un triangle, une médiane / hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (e) *dans un triangle, une médiane / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (f) *dans un triangle, une hauteur / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle.*

Théorème 3.27
Propriétés du triangle isocèle.

1. *Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux en mesure. Réciproquement, si dans un triangle, deux angles sont égaux en mesure, alors ce triangle est isocèle.*
2. *Dans un triangle isocèle, deux côtés sont de même longueur. Réciproquement, si dans un triangle, deux côtés sont de même longueur, alors ce triangle est isocèle.*
3. *Un triangle isocèle possède un axe de symétrie orthogonale. Réciproquement, si un triangle possède un axe de symétrie orthogonale, il est isocèle.*
4. *Dans un triangle isocèle, quatre droites particulières (la hauteur issue du sommet principal, la médiane issue du sommet principal, la médiatrice de la base principale et la bissectrice issue du sommet principal) sont confondues.*
5. *Eléments pour une réciproque :*
   (a) *dans un triangle, une médiatrice / médiane est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (b) *dans un triangle, une médiatrice / hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (c) *dans un triangle, une médiatrice / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (d) *dans un triangle, une médiane / hauteur est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (e) *dans un triangle, une médiane / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle ;*
   (f) *dans un triangle, une hauteur / bissectrice est un axe de symétrie orthogonale de ce triangle.*

Théorème 3.28
Soient trois points A, B, et C. On a l'inégalité triangulaire $AB + AC \geq BC$.
Lorsque $AB + AC = BC$, A appartient au segment $[BC]$.

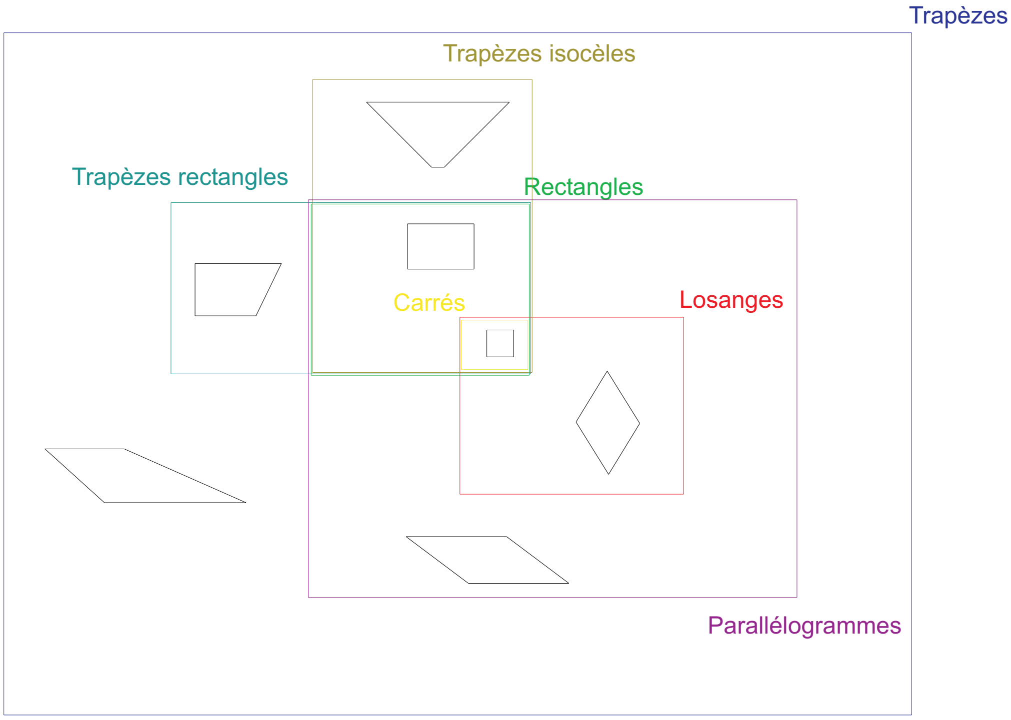
Exercices non corrigés :

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ [9, Guadeloupe, Guyane] Soit ABC un triangle. Les médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en G. Montrer que les triangles $BA'G$, $CA'G$, $AB'G$, $CB'G$, $AC'G$ et $BC'G$ ont même aire.

Quadrilatères

Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés. Celui-ci peut être convexe ou non, et puis, être croisé ou non.

Représenter de façon ensembliste les quadrilatères usuels (carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes, trapèzes, trapèzes isocèles, trapèzes rectangles, ..., quelconques). Ces *patates* classifient les quadrilatères usuels.



Quelques quadrilatères particuliers : le parallélogramme, le losange, le rectangle et le carré.

Théorème 3.29

Caractérisations du parallélogramme

1. (a) *Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme (définition du parallélogramme).*

2. (a) *Un quadrilatère convexe ayant ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur.*

3. (a) *Un quadrilatère convexe ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles de même longueur.*

4. (a) *Un quadrilatère ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.*

5. (a) *Un quadrilatère convexe ayant ses angles opposés égaux en mesure est un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses angles opposés égaux en mesure.*

Théorème 3.30

Caractérisations du losange

1. (a) *Un losange est un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère convexe ayant quatre côtés de même longueur est un losange (définition du losange).*

2. (a) *Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.*

   (b) *Réciproquement, un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.*

3. (a) *Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.*

   (b) *Réciproquement, un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.*

Remarque : Tout losange est un parallélogramme. La réciproque est fausse.

Théorème 3.31

Caractérisations du rectangle

1. (a) *Un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle.*

   (b) *Réciproquement, un rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.*

2. (a) *Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle (définition du rectangle).*

3. (a) *Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle.*

   (b) *Réciproquement, un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.*

Remarque : Tout rectangle est un parallélogramme. La réciproque est fausse.

Théorème 3.32

Caractérisations du carré

1. (a) *Un rectangle qui possède deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.*

   (b) *Réciproquement, un carré est un rectangle qui possède deux côtés consécutifs de même longueur.*

2. (a) *Un losange qui possède ses diagonales de même longueur est un carré.*

   (b) *Réciproquement, un carré est un losange qui possède ses diagonales de même longueur.*

3. (a) *Un rectangle qui possède ses diagonales perpendiculaires est un carré.*

   (b) *Réciproquement, un carré est un rectangle qui possède ses diagonales perpendiculaires.*

4. (a) *Un losange qui possède un angle droit est un carré.*

(b) *Réciproquement, un carré est un losange qui possède un angle droit.*

5. (a) *Tout carré est à la fois rectangle et losange.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère qui est à la fois rectangle et losange est un carré (définition du carré).*

Remarque : Tout carré est un losange. La réciproque est fausse. Remarque : Tout carré est un rectangle. La réciproque est fausse.

Théorème 3.33

Caractérisations par les isométries du parallélogramme, du losange, du rectangle et du carré

1. (a) *Un parallélogramme possède un centre de symétrie.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère admet un centre de symétrie, c'est un parallélogramme.*

2. (a) *Un losange possède deux axes de symétrie (orthogonale) perpendiculaires entre eux et un centre de symétrie.*

   (b) *Un quadrilatère qui possède deux axes de symétrie (orthogonale) perpendiculaires entre eux est un losange* ***OU*** *un rectangle.*

3. (a) *Un rectangle possède deux axes de symétrie (orthogonale) perpendiculaires entre eux et un centre de symétrie.*

   (b) *Un quadrilatère qui possède deux axes de symétrie (orthogonale) perpendiculaires entre eux est un losange* ***OU*** *un rectangle.*

   (c) *Un quadrilatère qui possède un axe de symétrie (orthogonale) et un centre de symétrie est un losange* ***OU*** *un rectangle.*

4. (a) *Un carré possède quatre axes de symétrie (les diagonales et les médianes), un centre (l'intersection des axes de symétrie) qui est centre de rotation de 90 degrés, de 180 degrés (i.e. un centre de symétrie) et de 270 degrés.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère qui possède trois axes de symétrie (orthogonale) est un carré.*

Théorème 3.34

Caractérisations du trapèze

1. (a) *Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.*

   (b) *Réciproquement, si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, c'est un trapèze (définition du trapèze).*

2. (a) *Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède au moins un angle droit.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze qui possède au moins un angle droit, est un trapèze rectangle (définition du trapèze rectangle).*

3. (a) *Un trapèze rectangle est un quadrilatère qui possède deux angles droits consécutifs.*

   (b) *Réciproquement, un quadrilatère qui possède deux angles droits consécutifs est un trapèze rectangle.*

4. (a) *Un trapèze isocèle est soit un rectangle, soit un trapèze qui a trois de ses côtés, considérés comme droites, qui forment un triangle isocèle.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze ayant trois de ses côtés, considérés comme droites qui forment un triangle isocèle, est un trapèze isocèle et un rectangle est un trapèze isocèle (définition du trapèze isocèle).*

5. (a) *Un trapèze qui a deux côtés opposés égaux est soit un trapèze isocèle, soit un parallélogramme.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze isocèle a deux côtés opposés égaux.*

6. (a) *Un trapèze qui a deux angles consécutifs égaux est un trapèze isocèle ou un trapèze rectangle.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze isocèle a deux angles consécutifs égaux.*

7. (a) *Un trapèze isocèle est un trapèze qui possède un axe de symétrie.*

   (b) *Réciproquement, un trapèze qui possède un axe de symétrie est un trapèze isocèle.*

Exercices non corrigés :

Exercice 9 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Soit BCD un triangle isocèle rectangle en B. A et D sont de part et d'autre de la droite (BC). Montrer que $ABDC$ est un trapèze.

Exercice 10 Soient deux droites parallèles (AB) et (CD) (le quadrilatère $ABCD$ est convexe). Soient E et F tels que E, D, C et F sont alignés dans cet ordre et $AB = ED = CF$. Les droites (AD) et (EB) se coupent en I. Les droites (BC) et (AF) se coupent en J. Montrer que I est milieu du segment $[AD]$ ou que J est milieu du segment $[BC]$.

Exercice 11 Construire la figure suivante en utilisant uniquement règle non graduée et compas.
- le triangle ABC est isocèle en B ;
- le triangle BCD est isocèle en C ;
- la mesure de l'angle en B du triangle ABC est de 30° ;
- les points B, A et D sont alignés dans cet ordre.

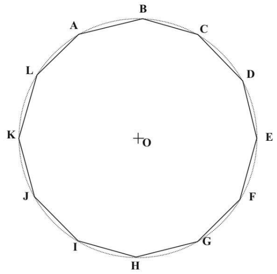
On laissera apparents tous les traits de construction, mais la construction ne doit pas être justifiée.

Déterminer quelle aurait dû être la mesure de l'angle en B du triangle ABC pour que le triangle CDA soit isocèle en A.

Exercice 12 Soit BCD un triangle isocèle rectangle en C. Soit M le centre du cercle de diamètre $[BC]$. Soit N le centre du cercle de diamètre $[CD]$. Soit O le centre du cercle Γ circonscrit au triangle BCD. Le cercle Γ et la droite (OC) se coupent en deux points distincts A et C. Quelle est la nature de $ABCD$? de $BMND$? de $BMNO$?

Exercice 13 Soit $ABCD$ un carré. Soit ABE un triangle équilatéral tel que E soit à l'intérieur du carré $ABCD$. Soit CBF un triangle équilatéral tel que F soit à l'extérieur du carré $ABCD$. Montrer que D, E et F sont alignés.

Exercice 14 [13, Créteil, Paris, Versailles] On considère un dodécagone régulier $ABCDEFGHIJKL$ (convexe) inscrit dans un cercle de centre O et rayon R. Les côtés $[AB]$, $[BC]$, ..., $[KL]$ et $[LA]$ ont donc la même longueur et les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ..., $\widehat{KOL}$ et $\widehat{LOA}$ ont la même mesure.



1. Quelle est la nature du triangle ACO ?
2. Quelle est la nature du polygone $ACEGIK$?
3. La droite (AC) coupe la droite (BO) en M. Que représente la droite (AM) pour le triangle ABO ? Exprimer AM en fonction du rayon R du cercle circonscrit au dodécagone.
4. Exprimer l'aire du triangle ABO en fonction du rayon R du cercle. En déduire que l'aire d'un dodécagone régulier est donnée par la formule : $Aire = 3 \times R^2$ où R représente le rayon du cercle circonscrit au dodécagone.
5. Quelle est l'aire d'un dodécagone régulier inscrit dans un cercle de diamètre 18 cm ?
6. Tracer un dodécagone régulier $ABCDEFGHIJKL$ inscrit dans un cercle de centre O et rayon 6 cm. On utilisera la règle graduée et le compas et on laissera les traits de construction apparents.

Exercice 15 [8, Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice] On appelle *amandin* un quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont droits.

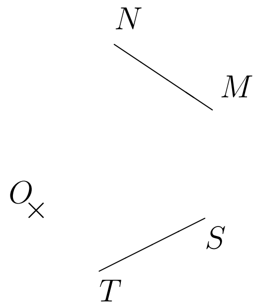
1. Voici cinq affirmations. Répondez par vrai ou faux en justifiant votre réponse.
   (a) Un rectangle est un *amandin*.
   (b) Tous les trapèzes rectangles sont des *amandins*.
   (c) Certains *amandins* sont des losanges.
   (d) Un *amandin* dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
   (e) Un *amandin* dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.
2. On considère l'*amandin* $ABCD$ dont les angles droits sont en B et en D, tel que :
   – la diagonale $[AC]$ a une longueur de 6 cm.
   – la hauteur du triangle ABC issue de B mesure 2 cm.
   – le triangle ADC est isocèle.

   (a) Construire $ABCD$ en justifiant les tracés et les différentes étapes de la construction.

(b) Déterminer l'aire de $ABCD$.

(c) Déterminer AD au millimètre près.

Exercice 16 [8, Créteil, Paris, Versailles] *Pour tout l'exercice, les constructions seront faites en utilisant la règle non graduée et le compas. On laissera apparents les traits de construction. On sera amené à reproduire deux fois sur la copie la figure ci-dessous :*



On veut construire un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que :
- les points M et N appartiennent au côté $[AB]$;
- les points S et T appartiennent au côté $[BC]$;
- le point O soit à l'intérieur du quadrilatère et appartienne à une de ses diagonales.

1. En respectant ces contraintes, construire :
   (a) Un parallélogramme (non rectangle, non losange) $ABCD$.
   (b) Un losange $ABCD$.
2. Pour chacun de ces quadrilatères, préciser le programme de construction mis en oeuvre.
3. Quelles sont les propriétés des figures (parallélogramme, losange) qui justifient la possibilité ou l'impossibilité de chaque construction ?

Exercice 17 [7, Montpellier]

1. Tracer un cercle de centre O et de rayon R (pour la clarté de la figure, on prendra R compris entre 5 et 8 cm).
   Tracer, en précisant comment, en laissant les traces de la construction et en n'utilisant que la règle non graduée et le compas, deux diamètres $[AB]$ et $[CD]$ perpendiculaires.
   Tracer le cercle de centre C, de rayon CA, qui coupe $[CD]$ en E.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Calculer, en fonction de R,
   - l'aire du triangle ABC,
   - l'aire de la lunule $ADBEA$.

Exercice 18 On considère un cercle Γ de centre O. On définit alors le quadrilatère $ABCD$ de façon à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle Γ ;
2. l'angle $\widehat{AOB}$ mesure trente degrés ;
3. l'angle $\widehat{BOC}$ mesure cinquante degrés (A et C sont de part et d'autre de la droite (OB)) ;
4. l'angle $\widehat{COD}$ mesure trente degrés (B et D sont de part et d'autre de la droite (OC)).

Question 1 : Dresser la figure en prenant huit centimètres comme mesure du rayon.

Question 2 : Le quadrilatère $ABCD$ est-il un trapèze ?

Avant de répondre à cette question ...

Question 2 a : Que mesure l'angle $\widehat{OAB}$? Que mesure l'angle $\widehat{OBA}$?

Question 2 b : Que mesure l'angle $\widehat{OBC}$? Que mesure l'angle $\widehat{OCB}$?

Question 2 c : Que mesure l'angle $\widehat{OCD}$? Que mesure l'angle $\widehat{ODC}$?

Question 2 d : Que mesure l'angle $\widehat{OAD}$? Que mesure l'angle $\widehat{ODA}$?

Question 2 e : Que dire des droites (AD) et (BC) ?

Répondre à la question 2.

Question 3 : On note I l'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$. Que mesure l'angle $\widehat{AIB}$?

Avant de répondre à cette question ...

Question 3 a : Comparer les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$?

Question 3 b : Comparer les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DBC}$?

Question 3 c : Que mesure l'angle $\widehat{BIC}$?

Répondre à la question 3.

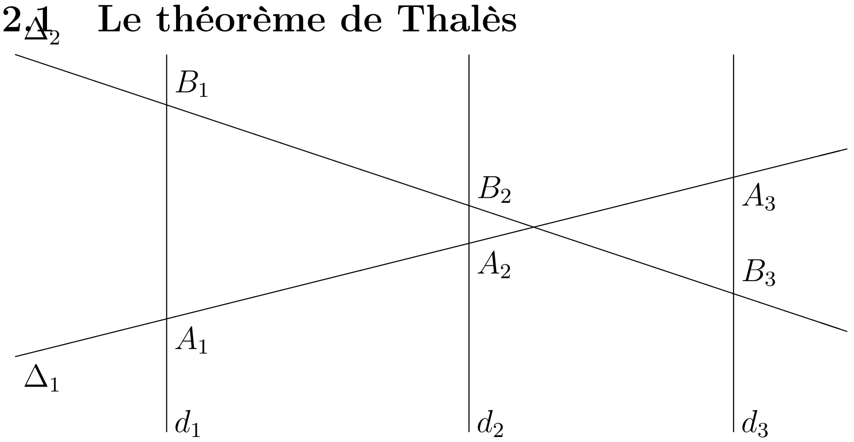
Question 4 : Si l'angle l'angle $\widehat{BOC}$ ne mesurait pas cinquante mais a degrés ?

Question 4 a : Le quadrilatère $ABCD$ serait-il encore un trapèze ?

Question 4 b : La mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ changerait-elle ?

3.2 Les théorèmes de Thalès et Pythagore

3.2.1 Le théorème de Thalès



La version forte du théorème de Thalès ...

Théorème 3.35

Soient trois droites parallèles d_1, d_2 et d_3. Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 qui coupent chacune des droites d_1, d_2 et d_3 [21]. *On nomme A_1 le point de concours de d_1 et Δ_1 ; on nomme A_2 le point de concours de d_2*

21. Δ_1 et Δ_2 ne sont pas forcément sécantes entre elles comme sur le dessin.

et Δ_1 ; on nomme A_3 le point de concours de d_3 et Δ_1 ; on nomme B_1 le point de concours de d_1 et Δ_2 ; on nomme B_2 le point de concours de d_2 et Δ_2 ; on nomme B_3 le point de concours de d_3 et Δ_2[22]*. Alors, on a :*

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}.$$

Réciproque de la version forte du théorème de Thalès ...

Théorème 3.36
Soient deux droites Δ_1 et Δ_2. Soient trois droites d_1, d_2 et d_3, qui coupent chacune des droites Δ_1 et Δ_2. On nomme A_1 le point de concours de d_1 et Δ_1 ; on nomme A_2 le point de concours de d_2 et Δ_1 ; on nomme A_3 le point de concours de d_3 et Δ_1 ; on nomme B_1 le point de concours de d_1 et Δ_2 ; on nomme B_2 le point de concours de d_2 et Δ_2 ; on nomme B_3 le point de concours de d_3 et Δ_2.[23] *Si*

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$$

et si A_1, A_2, A_3 sur Δ_1 sont lus dans le même ordre que B_1, B_2, B_3 sur Δ_2, alors

$$d_1//d_2//d_3.$$

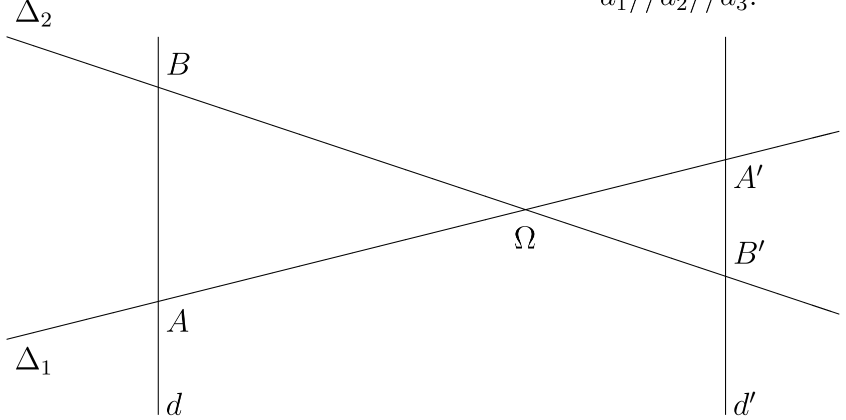
ou

Théorème 3.37
Soient deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2. Soient trois droites d_1, d_2 et d_3. On nomme A_1 le point de concours de d_1 et Δ_1 ; on nomme A_2 le point de concours de d_2 et Δ_1 ; on nomme A_3 le point de concours de d_3 et Δ_1 ; on nomme B_1 le point de concours de d_1 et Δ_2 ; on nomme B_2 le point de concours de d_2 et Δ_2 ; on nomme B_3 le point de concours de d_3 et Δ_2.[24] *Si*

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3},$$

alors

$$d_1//d_2//d_3.$$



Le théorème de Thalès dans la configuration du triangle ou du papillon ...

22. Les points de concours nommés sont supposés exister.
23. Les points de concours nommés sont supposés exister.
24. Les points de concours nommés sont supposés exister.

Théorème 3.38
Soient deux droites parallèles d et d'. Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 qui se coupent en un point Ω. On nomme A le point de concours de d et Δ_1 ; on nomme A' le point de concours de d' et Δ_1 ; on nomme B le point de concours de d et Δ_2 ; on nomme B' le point de concours de d' et Δ_2.[25] *Alors, on a :*

$$\frac{\Omega A}{\Omega A'} = \frac{\Omega B}{\Omega B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Réciproque du théorème de Thalès dans la configuration du triangle ou du papillon ...

Théorème 3.39
Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 qui se coupent en un point Ω. Soient deux droites d et d'. On nomme A le point de concours de d et Δ_1 ; on nomme A' le point de concours de d' et Δ_1 ; on nomme B le point de concours de d et Δ_2 ; on nomme B' le point de concours de d' et Δ_2.[26] *Si*

$$\frac{\Omega A}{\Omega A'} = \frac{\Omega B}{\Omega B'}$$

et si Ω, A, A' sur Δ_1 sont lus dans le même ordre que Ω, B, B' sur Δ_2, alors

$$d//d'.$$

ou

Théorème 3.40
Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 qui se coupent en un point Ω. Soient deux droites d et d'. On nomme A le point de concours de d et Δ_1 ; on nomme A' le point de concours de d' et Δ_1 ; on nomme B le point de concours de d et Δ_2 ; on nomme B' le point de concours de d' et Δ_2.[27] *Si*

$$\frac{\Omega A}{\Omega A'} = \frac{\Omega B}{\Omega B'} = \frac{AB}{A'B'},$$

alors

$$d//d'.$$

Le théorème de la droite des milieux ...

Théorème 3.41
Si une droite passe par les milieux I et J des segments $[AB]$ et $[AC]$, alors $(IJ)//(BC)$. De plus, $BC = 2 \times IJ$.

Le théorème de la droite des milieux est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès.

La réciproque du théorème de la droite des milieux ...

Théorème 3.42
Si (IJ) passe par le milieu I du segment $[AB]$ et si $(IJ)//(BC)$, où J appartient à la droite (AC), alors J est milieu du segment $[AC]$.

La réciproque du théorème de la droite des milieux est un cas particulier du théorème de Thalès.

Mais, il est faux de croire que "Si (IJ) passe par le milieu I du segment $[AB]$ et si $BC = 2 \times IJ$, où J appartient à la droite (AC), alors J est milieu du segment $[AC]$", même si on impose que le point J appartienne au segment $[BC]$.

25. Les points de concours nommés sont supposés exister.
26. Les points de concours nommés sont supposés exister.
27. Les points de concours nommés sont supposés exister.

3.2.2 Le théorème de Pythagore

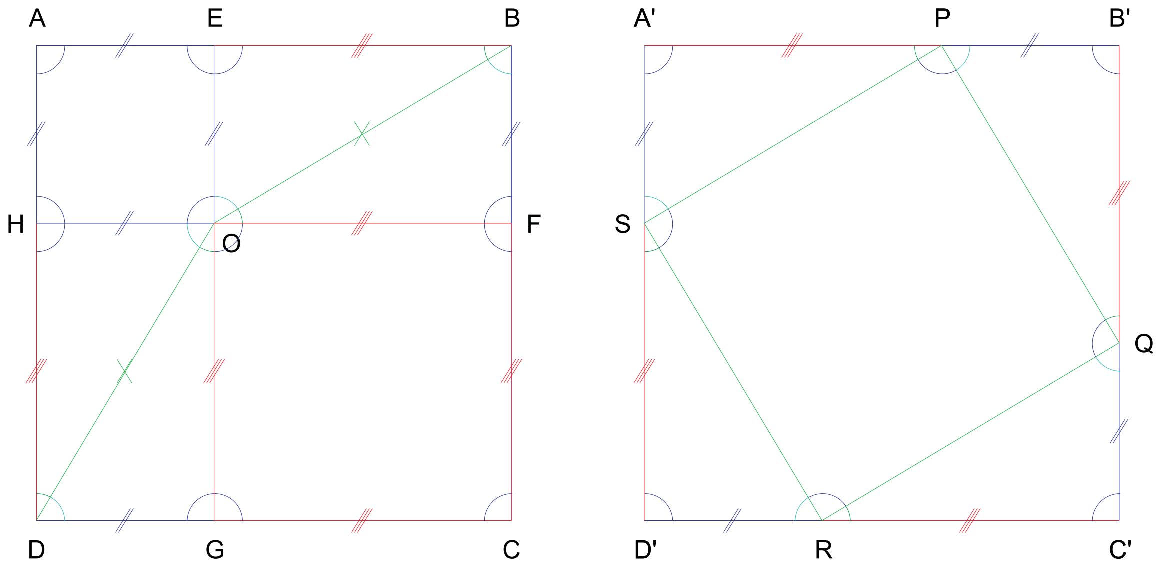
Le théorème de Pythagore :

Théorème 3.43

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Démonstration



Les carrés de côté a et de côté b ainsi que quatre triangles rectangles dont les côtés mesurent respectivement a et b sont disposés sur la première figure. Montrer que ce puzzle réalise un carré de côté $a + b$.[28]

Un carré de côté c (où c est la mesure du côté de l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés mesurant respectivement a et b) ainsi que quatre triangles rectangles dont les côtés mesurent respectivement a et b sont disposés sur la seconde figure. Montrer que ce puzzle réalise un carré de côté $a + b$.[29]

28. Au niveau des longueurs, on fait bien reposer des segments sur des segments de même longueur (c'est immédiat).
Au niveau des angles ...
L'angle en O est bien de 360° (somme de deux angles droits et deux paires d'angles complémentaires) ;
l'angle en E est bien de 180° (somme de deux angles droits) ;
l'angle en F est bien de 180° (somme de deux angles droits) ;
l'angle en G est bien de 180° (somme de deux angles droits) ;
l'angle en H est bien de 180° (somme de deux angles droits).
De ceci, on tire que le puzzle est un quadrilatère.
L'angle en A est bien de 90° (sans commentaire) ;
l'angle en B est bien de 90° (somme de deux angles complémentaires) ;
l'angle en C est bien de 90° (sans commentaire).
Le puzzle est maintenant un rectangle (un quadrilatère avec trois angles droits).
Enfin, le puzzle est un carré (car $AB = a + b$ et $BC = a + b$ et un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur est un carré).

29. Au niveau des longueurs, on fait bien reposer des segments sur des segments de même longueur (c'est immédiat).
Au niveau des angles ...

Conclure[30] que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Applications directes de ce théorème :

1. La diagonale d'un carré de côté a mesure $a \times \sqrt{2}$.
2. La hauteur (ou médiane, ou bissectrice ou médiatrice) d'un triangle équilatéral de côté a mesure $a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 19 [10, Nancy, Metz, Reims, Strasbourg] Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = a$, $CD = b$, $AD = a + b$. Soit E un point du segment $[AD]$ tel que $AE = b$ et $ED = a$. On pose $BE = c$.

1. Démontrer que l'angle $\widehat{BEC}$ est droit. En déduire la nature précise du triangle BEC.
2. Calculer de deux manières différentes l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de a, b, ou c.
3. Retrouver ainsi une démonstration du théorème de Pythagore.

La réciproque du théorème de Pythagore :

Théorème 3.44
Soit ABC un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

Exercices non corrigés :

Exercice 20 [8, Lyon, Grenoble] Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Soit O le centre du parallélogramme $ABCD$. Soit E tel que A soit le milieu du segment $[ED]$. Soit F le point d'intersection des droites (AB) et (OE). Démontrer $AF = AB/3$. On pourra utiliser le triangle BDE.
2. La parallèle à (BD) passant par F coupe la droite (AC) en I et la droite (AD) en H. Calculer les rapports AH/AD et AI/AC.
3. Soit R le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AR = 4 \times AB/3$. Soit S le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AS = 4 \times AC/3$. Soit T le point de la demi-droite $[AD)$ tel que $AT = 4 \times AD/3$.

L'angle en P est bien de 180° (somme d'un angle droit et de deux angles complémentaires) ;
l'angle en Q est bien de 180° (somme d'un angle droit et de deux angles complémentaires) ;
l'angle en R est bien de 180° (somme d'un angle droit et de deux angles complémentaires) ;
l'angle en S est bien de 180° (somme d'un angle droit et de deux angles complémentaires).
De ceci, on tire que le puzzle est un quadrilatère.
L'angle en A' est bien de 90° (sans commentaire) ;
l'angle en B' est bien de 90° (sans commentaire) ;
l'angle en C' est bien de 90° (sans commentaire).
Le puzzle est maintenant un rectangle (un quadrilatère avec trois angles droits).
Enfin, le puzzle est un carré (car $AB = a + b$ et $BC = a + b$ et un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur est un carré).

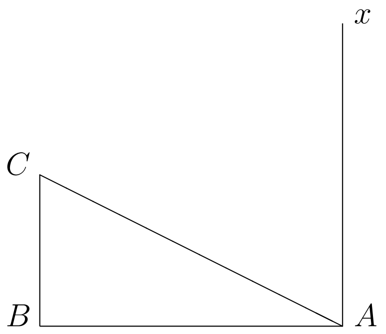
30. Par égalité des aires de chacun des deux puzzles (il s'agit d'un même carré découpé de deux façons différentes), on obtient trivialement que la sommes des aires des carrés de côtés a et b est égale à celle de celui de côté c.

(a) Placer R, S et T à la règle non graduée et au compas en explicitant le procédé utilisé.

(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ARST$?

(c) Exprimer l'aire du quadrilatère $ARST$ en fonction de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 21 [9, Amiens]



On donne le triangle ABC, rectangle en B tel que $AB = 4$ cm et $BC = 2$ cm. La demi-droite $[Ax)$ est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite $[Ax)$ et on note m la distance AM. Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.

1. Calculez la distance AC.
2. Déterminez m pour que l'aire du triangle ACM soit égale au triple de l'aire du triangle ABC.
3. (a) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en A.
   (b) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en C.
   (c) Le triangle ACM peut-il être isocèle en M ? Si oui, réalisez la construction et explicitez-la.
4. (a) Sur une autre figure, placez la point M' de la demi-droite $[Ax)$ tel que $AM' = 2$ cm. Quel est la nature du triangle ACM' ? Justifiez.
   (b) i. Sur la même figure, placez M tel que $AM = 10$ cm.
      ii. Calculez la distance CM.
      iii. Montrez que le triangle ACM est rectangle en C.
5. On note C' le point tel que la droite (AB) soit la médiatrice du segment $[CC']$.
   (a) Le triangle ACC' est-il équilatéral ? Justifiez.
   (b) Existe-t-il M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

Exercice 22 *Le parallélogramme de Varignon*

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soit I le milieu de $[AB]$. Soit J le milieu de $[BC]$. Soit K le milieu de $[CD]$. Soit L le milieu de $[DA]$.

1. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.
2. Quelle condition nécessaire et suffisante sur les diagonales du quadrilatère $ABCD$ pour que
   (a) $IJKL$ soit un rectangle.

(b) $IJKL$ soit un losange.

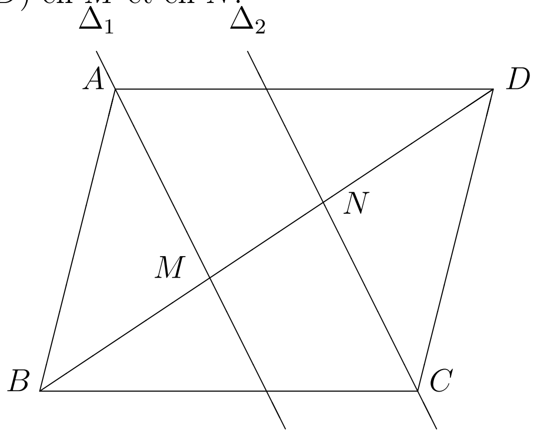
(c) $IJKL$ soit un carré.

3. Soit $IJKL$ un parallélogramme. Soit A un point du plan. Soit B tel que I soit milieu de $[AB]$. Soit C tel que J soit milieu de $[BC]$. Soit D tel que K soit milieu de $[CD]$. Soit A' tel que L soit milieu de $[DA']$. Montrer que $A = A'$.

Exercice 23 *La trisection de la diagonale d'un parallélogramme*

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit I le milieu de $[AB]$. Soit J le milieu de $[CD]$. Les droites (AJ) et (BD) se coupent en E. Les droites (IC) et (BD) se coupent en F. Montrer que $DE = EF = FB$.

Exercice 24 [8, Orléans] Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles qui passent respectivement par A et C. Les droites Δ_1 et Δ_2 coupent respectivement la droite (BD) en M et en N.



1. Préciser la nature du quadrilatère $AMCN$. Justifier la réponse.

2. Prouver qu'il existe une position des droites Δ_1 et Δ_2 pour laquelle $AMCN$ est un rectangle. Donner dans ce cas, le programme de construction du rectangle $AMCN$. Le construire dans les deux cas
   - $AC < BD$.
   - $AC > BD$.

3. Le quadrilatère $AMCN$ peut-il être un losange ? Pourquoi ? Modifier les données de l'énoncé pour que $AMCN$ soit un losange.

Exercice 25 [8, Amiens] Chaque réponse doit être justifiée. Chaque construction doit être accompagné d'un texte explicatif. L'unité considérée est le centimètre.

1. Tracer en utilisant une règle graduée et un compas, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 4$ et $BC = 8$.

2. On considère O le milieu de $[BC]$. Comparer OA et BC.

3. Calculer l'aire exacte du triangle ABC. Donner une valeur approchée de cette aire à $0,1$ cm^2 près ($1,732$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à $0,001$ près).

4. Placer E tel que C soit milieu de $[AE]$. Quelle est la nature du triangle ABE ?

5. Déterminer le rapport des aires des triangles ABE et ABC.
6. Déterminer l'aire exacte du triangle BCE.
7. On considère H le point d'intersection du cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, avec la droite (BE). Démontrer que $[CH]$ est une hauteur du triangle BCE.
8. Placer F tel que C soit milieu de $[BF]$. Quelle est la nature du quadrilatère $AFEB$? Quelle est son aire exacte ?
9. Exprimer l'aire d'un losange en fonction de la mesure des diagonales.
10. Construire un losange $MPNQ$ à partir de ses diagonales qui ait la même aire que $AFEB$. Pour cela, vous utiliserez uniquement le compas (qui vous permettra de reporter les longueurs de la première figure) et une règle non graduée.

Exercice 26 [9, Toulouse] Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 12\ cm$ et $AD = 9\ cm$. Sur $[AB]$, M et N sont tels que $AM = MN = 3\ cm$ et $N \neq A$. Sur $[AD]$, P et Q sont tels que $AP = PQ = 3\ cm$ et $Q \neq A$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $MNQP$?
2. Par le point M, on trace la droite d parallèle à (AD). Par le point P, on trace la droite d' parallèle à (AB). Les droites d et d' se coupent en I. Les points Q, I et N sont-ils alignés ?

Exercice 27 On définit une figure :

1. $ABCD$ est un rectangle ; $AD = BC = 5$; $AB = DC = 10$;
2. X est un point du segment $[BC]$ tel que $BX = 3$;
3. Y est un point du segment $[AB]$ tel que $YB = x$;
4. I est le point d'intersection des droites (AX) et (DY) ;
5. Les quadrilatères $YBXI$ et $DTSL$ sont superposables ; T est un point du segment $[DC]$; les points L et S sont dans le demi-plan délimité par la droite (DC), ne contenant pas le point A ;
6. Les triangles AID et XJR sont superposables ; C est un point du segment $[XR]$; le point J est dans le demi-plan délimité par la droite (BC), ne contenant pas le point A ;
7. Les triangles AYI et SZK sont superposables ; Z est un point de la demi-droite $[SR)$; le point K est dans le demi-plan délimité par la droite (SR), ne contenant pas le point A.

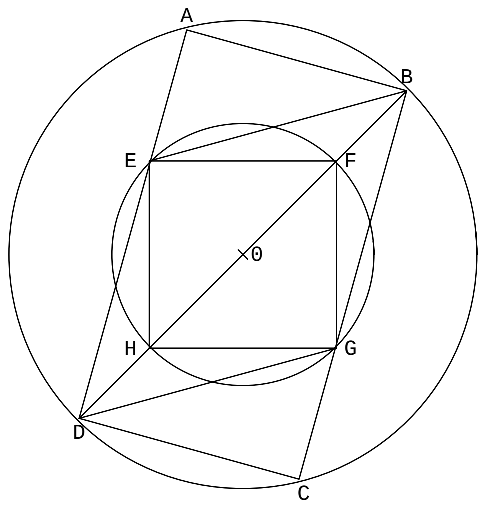
Ces renseignements sur la figure sont les seuls qui soient utilisables.

1. Montrer que le quadrilatère $TCRS$ est un rectangle (on supposera acquis le fait que le quadrilatère $TCRS$ est convexe).
2. En déduire que les points R et Z sont confondus.
3. Montrer que les points I, D et L sont alignés.
4. Montrer que les points I, X et J sont alignés.

5. Montrer que les points L, S et K sont alignés.
6. Montrer que les points K, R et J sont alignés. Les questions 3, 4, 5 et 6 induisent que $IJKL$ est un quadrilatère tracé sur la figure.
7. Quelle est l'aire du quadrilatère $IJKL$ en fonction de x ?
8. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme (on supposera acquis le fait que le quadrilatère $IJKL$ est convexe).
9. Donner la valeur de x lorsque le quadrilatère $IJKL$ est un losange.
10. Lorsque I est le milieu du segment $[AX]$. Quelle est alors la valeur de x ?
    (a) Montrer que I est un point de la médiatrice du segment $[BX]$. Soient E le milieu du segment $[AB]$ et F le milieu du segment $[DC]$. Montrer que le point I est sur la droite (EF). Quelles sont les mesures des segments $[EI]$ et $[IF]$?
    (b) Soit δ la parallèle à la droite (AB) passant par J. δ coupe la droite (EF) en G et la droite (YD) en H. Quelles sont les mesures des segments $[IG]$ et $[GF]$?
    (c) Déduire la mesure du segment $[HG]$, puis celle de $[HJ]$.
    (d) Déduire la mesure du segment $[AY]$.
    (e) Conclure.

Exercice 28 [7, Lille] L'activité "Découverte" ci-dessous est extraite du "Nouvel Objectif Calcul CM2".

DECOUVERTE



1. *Reproduis la figure ci-contre sur du papier uni.*
2. *Décalque dans cette figure un rectangle, un carré, un trapèze, un losange et un quadrilatère qui n'est aucune des figures précédentes.*

Il ne vous est pas demandé de réaliser cette activité telle quelle !

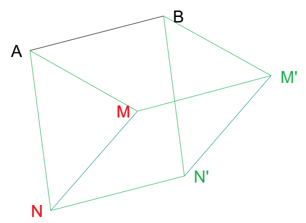
Les lettres désignant les sommets ne faisaient pas partie de l'original.

1. Donnez, en les désignant par la suite de leurs sommets, quatre quadrilatères tracés sur la figure (sommets et côtés présents), et qui ne sont ni un rectangle, ni un carré, ni un trapèze, ni un losange.
2. Une personne ayant observé le dessin, en fait la description (incomplète) suivante : "Il y a un cercle et 4 points A, B, C et D sur ce cercle (dans le sens des aiguilles d'une montre) ; ABCD est un rectangle et EFGH est un carré ; E est sur le segment [AD] et G sur le segment [BC] ; (EB)//(GD).
   (a) Que peut-on affirmer de EBGD d'après cette description et d'après elle seule ? (on pourra s'aider d'un dessin à main levée). $\underline{Justifiez}$.
   (b) Quel(s) renseignement(s) supplémentaire(s) peut-on ajouter à la description pour garantir que EBGD est un losange ? (On n'utilisera pas les mots "parallélogrammes", "rectangle", "carré" et "losange".) $\underline{Justifiez}$.
3. Que peut-on affirmer des points D, H, F et B ? $\underline{Justifiez}$.
4. Prouvez que les cercles ont même centre.
5. Donnez un programme de construction de cette figure, en prenant au maximum deux mesures sur le dessin original, et reproduisez-la en suivant ce programme. Indiquez clairement quelles sont les mesures que vous avez prises, et les instruments utilisés (rapporteur exclu).
6. On imagine une autre figure, vérifiant tous les renseignements de cette description -y compris le fait que EBGD est un losange-, et dans laquelle le triangle AEB est rectangle isocèle. Quel est alors le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ? $\underline{Justifiez}$.

3.3 Les transformations

3.3.1 Les translations

On dit que M' est le transformé de M par la translation de AB (A et B étant deux points du plan donnés) si le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme. [31]



Théorème 3.45
Propriété spécifique de la translation relative aux droites. *Une translation transforme une droite en une droite parallèle.*

NB : Pour d'autres propriétés, voir le théorème portant sur les isométries plus bas.

31. Pour être plus précis, il faudrait utiliser la notion de vecteur dont nous nous passerons dans ce cours.

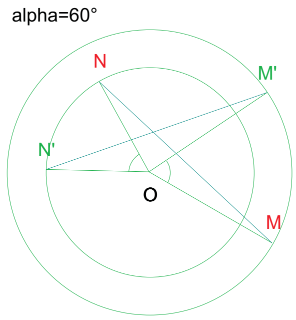
3.3.2 Les rotations

On dit que M' est le transformé de M par la rotation de centre O, d'angle orienté α (la mesure de α est comprise entre -180° et 180°) si

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{OM},\vec{OM'}} = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}, \text{ pour } M \neq O$$

et $M' = O$ pour $M = O$.

Remarque : La notion d'angle orienté n'a pas été vue précédemment, mais on admettra le fait suivant : $\widehat{(\vec{OM},\vec{OM'}} = \widehat{MOM'}$ si la rotation est effectuée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ; $\widehat{(\vec{OM},\vec{OM'}} = -\widehat{MOM'}$ si la rotation est effectuée dans le sens des aiguilles d'une montre.

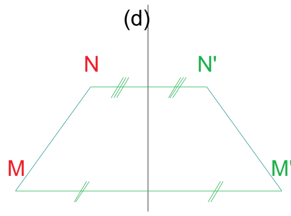


Théorème 3.46
Propriété spécifique de la rotation relative aux droites. *Une rotation de centre O et d'angle u transforme une droite (MN) en une droite $(M'N')$ telle que si $u = -180^\circ$ ou si $u = 180^\circ$ (dans ce cas, la rotation est appelée une symétrie centrale -de centre O-), alors les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles ; si $u \neq -180^\circ$ et si $u \neq 180^\circ$, alors les droites (MN) et $(M'N')$ sont sécantes en un point nommé S tel que $\widehat{MSM'} = u$.*

NB : pour d'autres propriétés, voir le théorème portant sur les isométries plus bas.

3.3.3 Les symétries orthogonales

On dit que M' est le transformé de M par la symétrie orthogonale d'axe la droite d si d est la médiatrice du segment $[MM']$, pour M n'appartenant pas à d et $M' = M$ pour M appartenant à d.



Théorème 3.47
Propriété spécifique de la symétrie orthogonale relative aux droites. *Une symétrie orthogonale d'axe Δ transforme une droite (MN) en une droite $(M'N')$ telle que si les droites (MN) et Δ sont parallèles, alors*

les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles ; si les droites (MN) et Δ sont sécantes, alors les droites (MN) et $(M'N')$ se coupent sur l'axe Δ.

NB : pour d'autres propriétés, voir le théorème portant sur les isométries plus bas.

3.3.4 Les isométries

Les translations, les rotations et les symétries sont des isométries. Ce qui veut dire qu'elles conservent les distances.[32]

Théorème 3.48

Les isométries conservent

1. *les barycentres (et plus particulièrement les milieux[33]) ;*
2. *l'alignement[34] ;*
3. *le parallélisme[35] ;*
4. *les angles (et plus particulièrement l'orthogonalité[36]).*

Théorème 3.49

Une isométrie transforme

- *un triangle en un triangle (de mêmes mesures que le triangle original),*
- *un carré en un carré (de même côté que l'original),*
- *un cercle en un cercle (de même rayon que l'original),*
- *...,*
- *un demi-plan en un demi-plan.*

3.3.5 Les homothéties

On dit que M' est le transformé de M par l'homothétie de centre O, de rapport $\pm k$ (k est un réel positif ; k est signé positivement si O n'appartient pas au segment $[MM']$ et négativement dans le cas contraire) si

$$\begin{cases} M' \text{ appartient à la droite } (OM) \\ k \times OM = OM' \end{cases}, \text{ pour } M \neq O$$

et $M' = O$ pour $M = O$.

Théorème 3.50

Les homothéties conservent

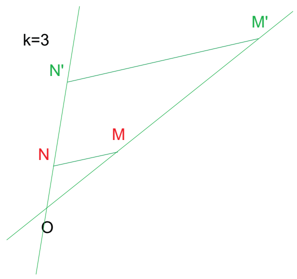
32. Soit M et son transformé M' par une isométrie ; soit N et son transformé N' par cette même isométrie. Alors $MN = M'N'$.

33. Soit M et son transformé M' par une isométrie ; soit N et son transformé N' par cette même isométrie. Alors le milieu de $[M'N']$ est le transformé du milieu de $[MN]$.

34. Soit M et son transformé M' par une isométrie ; soit N et son transformé N' par cette même isométrie ;soit P et son transformé P' par cette même isométrie. Alors si M, N et P sont alignés, M', N' et P' le sont aussi.

35. Soit une droite d et sa transformée d' par une isométrie ; soit une droite δ et sa transformée δ' par cette même isométrie. Alors si d et δ sont parallèles, d' et δ' le sont aussi.

36. Soit une droite d et sa transformée d' par une isométrie ; soit une droite δ et sa transformée δ' par cette même isométrie. Alors si d et δ sont perpendiculaires, d' et δ' le sont aussi.



1. *les barycentres (et plus particulièrement les milieux) ;*
2. *l'alignement ;*
3. *le parallélisme ;*
4. *les angles (et plus particulièrement l'orthogonalité).*

Cependant, les homothéties, si elles possèdent de nombreuses propriétés en commun avec les isométries, ne sont pas des isométries pour autant (c'est-à-dire qu'elles ne conservent pas les distances).

3.3.6 Les triangles et les transformations

Lorsqu'une isométrie transforme A en A', B en B', et C en C', on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.51
Lorsque $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.52
Lorsque $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.53
Lorsque $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.54
Lorsque $AB = A'B'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.55
Lorsque $AB = A'B'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Théorème 3.56
Lorsqu'une isométrie envoie A sur A', B sur B', C sur C', on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, et les propriétés suivantes sont évidentes, alors $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

Lorsqu'une isométrie composée avec une homothétie transforme A en A', B en B', et C en C', on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Théorème 3.57
Lorsque $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ *et* $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, *les triangles* ABC *et* $A'B'C'$ *sont semblables et*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Réciproquement, lorsque $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, *les triangles* ABC *et* $A'B'C'$ *sont semblables et* $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

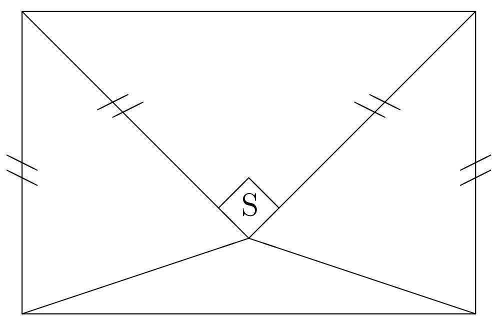
Exercices non corrigés :

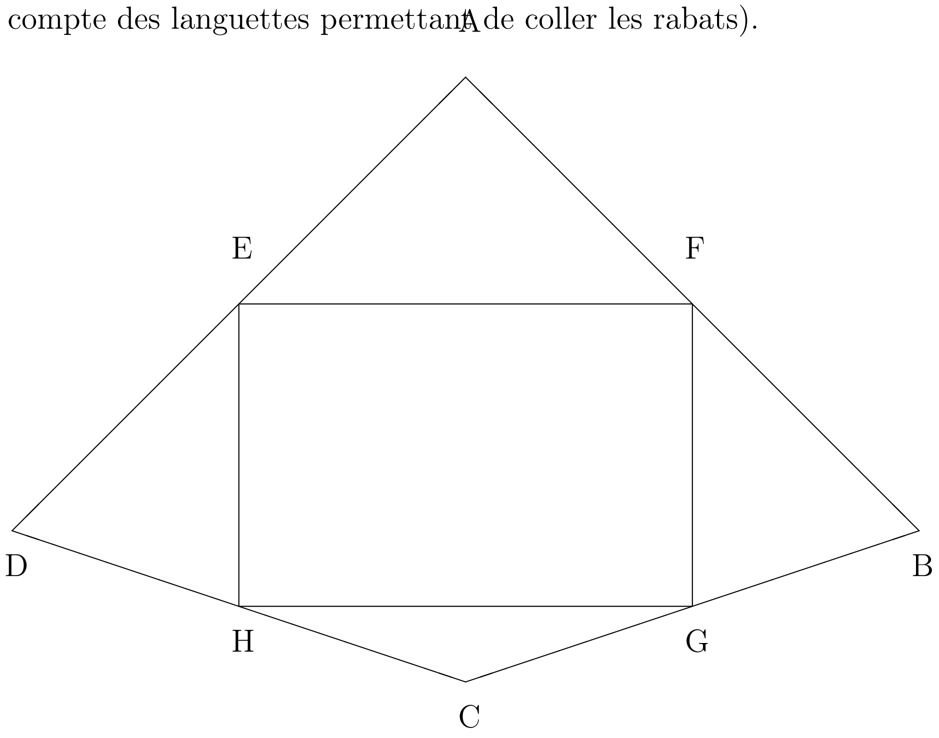
$\boxed{\textbf{Exercice 29}}$ [7, Dijon, Nancy-Metz, Strasbourg] Soit un cercle C de centre O et de rayon 4 cm. Les enfants de CM2 savent placer, à l'aide du compas seul, les sommets d'un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans ce cercle.

1. Donnez le programme d'une telle construction et réalisez-la.

   L'objet du problème qui suit est de démontrer quelques propriétés géométriques liées à cette configuration.
2. Démontrer que la droite (AC) est la médiatrice du segment $[BO]$ et que la droite (BO) est la médiatrice du segment $[AC]$.
3. Démontrer que les points A et D sont diamétralement opposés.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDF$? Justifier la réponse.
5. Calculez l'aire de ce quadrilatère.
6. Les droites (AC) et (BF) se coupent en I.
   (a) Démontrez que A et B sont symétriques par rapport à la droite (OI).
   (b) Démontrez que C et F sont symétriques par rapport à la droite (OI).

$\boxed{\textbf{Exercice 30}}$ [7, Toulouse] On décolle les quatre rabats d'une enveloppe rectangulaire afin d'en obtenir un modèle développé (on ne tient pas compte des languettes permettant de coller les rabats).





La première figure est appelée figure 1, la seconde, figure 2.

L'objectif de cet exercice est de déterminer certaines propriétés de la figure dépliée. Tout résultat doit être démontré, toute réponse doit être justifiée.

On désigne par a la mesure du segment $[AE]$.

1. En vous aidant de la figure 1, montrer que $AE = ED$. On admettra de même que $DH = HC$, $CG = GB$. et $BF = FA$.
2. Démontrer que les points A, E et D sont alignés. On admettra de même que les points D, H et C sont alignés, que les points C, G et B sont alignés et que les points B, F et A sont alignés.
3. Démontrer que la figure 2 admet un axe de symétrie que l'on précisera.
4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EDH}$ et en déduire celle de l'angle $\widehat{FBG}$.
5. Calculer en fonction de a l'aire du quadrilatère $ABCD$.
6. Exprimer en fonction de a les longueurs AC et BD.
7. Le fabricant d'enveloppes souhaite inscrire son logo en filigrane à l'intérieur de l'enveloppe. Il prévoit d'insérer celui-ci à l'intérieur d'un quadrilatère $IJKL$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[EB]$, $[BD]$ et $[DF]$. On appelle O le point d'intersection des droites (EB) et (DF).
   (a) Que représente le point O pour le triangle ABD ? Démontrer que $\dfrac{OJ}{OB} = \dfrac{OL}{OD} = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Montrer que les droites (JL) et (BD) sont parallèles. En déduire la longueur JL en fonction de a.
   (c) Démontrer que $AI = IK = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (d) Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Exercice 31 [4, Aix, Marseille] *La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.*

Dans un livre de CM2 (collection diagonale, Editions Nathan), on trouve l'activité décrite ci-dessous :

> Sur une feuille de carton mince, on dessine un carré dont le côté mesure 6 cm et un carré $ABCD$ de côté mesurant 8 cm sur la figure 1. On prend sur $[BC]$ et $[CD]$ les points E et F tels que $BE = CF = 2$ cm. On trace les segments $[DE]$ et $[AF]$ pour obtenir la figure 2. On découpe alors les deux carrés et de plus, en découpant le long de $[DE]$ et $[AF]$, on partage le carré $ABCD$ en quatre morceaux. En utilisant sans les retourner, les cinq morceaux numérotés sur les figures 1 et 2 comme pièces d'un puzzle, on forme un nouveau carré en s'inspirant du schéma.

Le schéma donné à l'élève est en fait la figure 3 (ci-après), sans les lettres servant à désigner les points.

1. On admet qu'il est possible de réaliser un carré à l'aide de ces cinq pièces, comme c'est affirmé aux élèves dans l'activité. Répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la surface du carré $MNPQ$? En déduire la longueur de son côté. Justifier les réponses.
   (b) Indiquer sur la figure 3, au moyen des numéros 1, 2, 3 et 4, la place occupée dans le carré $MNPQ$ par chacune des pièces du puzzle. La pièce 5 est déjà placée.

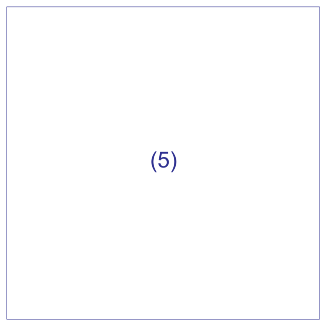


Figure 1

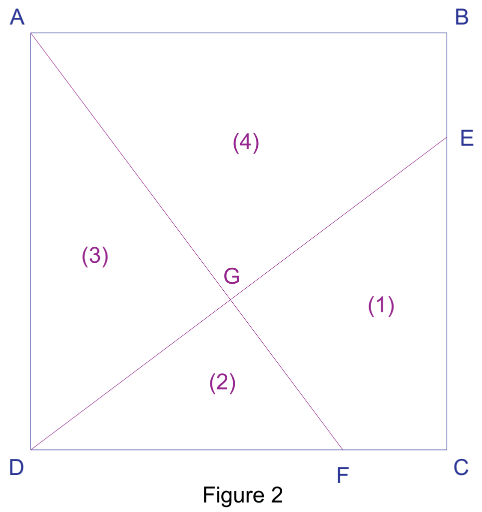


Figure 2

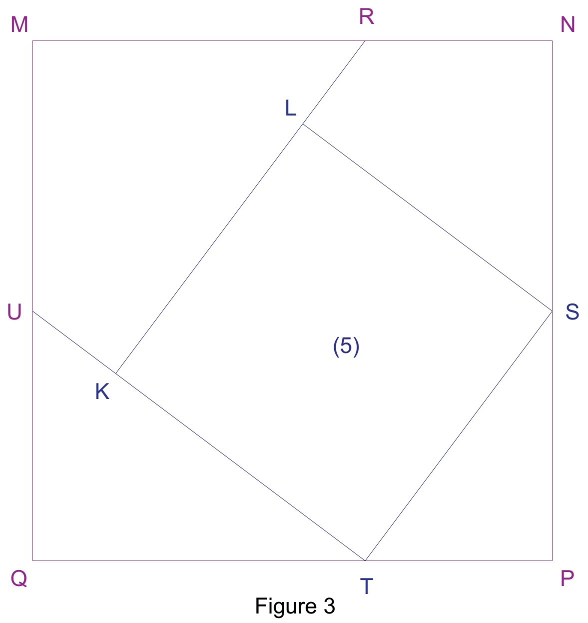


Figure 3

(c) Pour chacune des pièces 1, 2, 3 et 4, écrire la correspondance entre les sommets dans la figure 2 et ses sommets dans la figure 3. Utiliser pour cette réponse, le tableau ci-dessous.

pièce	sommet de la figure 2 *vient en* sommet de la figure 3
pièce 1	C *vient en*…
pièce 1	E *vient en*…
pièce 1	F *vient en*…
pièce 1	G *vient en*…
pièce 2	D *vient en*…
pièce 2	F *vient en*…
pièce 2	G *vient en*…
pièce 3	A *vient en*…
pièce 3	D *vient en*…
pièce 3	G *vient en*…
pièce 4	A *vient en*…
pièce 4	B *vient en*…
pièce 4	E *vient en*…
pièce 4	G *vient en*…

2. On se demande maintenant quelles propriétés de la figure 2 permettent de s'assurer qu'on obtiendra bien un carré dans la figure 3 avant d'avoir réalisé le puzzle. Dans les réponses aux questions ci-dessous, il s'agit seulement d'énoncer de telles propriétés sans chercher à les démontrer.

(a) Pour que les points M, R et N soient alignés après la construction du puzzle, il faut que certains angles de la figure 2 vérifient une certaine relation. Quels sont ces angles et quelle est cette relation ?

Même question pour les alignements des points N, S et P, puis P, T et Q, puis Q, U et M.

Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

(b) Quelles relations entre les longueurs de la figure 2 impliquent les égalités :

$$MN = NP = PQ = QM \ ?$$

Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

(c) Quelle propriété dans la figure 2 implique que les angles du quadrilatère $MNPQ$ sont droits ?

Quelle propriété en résulte alors pour le puzzle réalisé ?

3. On y démontre quelques propriétés de la figure 2.

(a) Démontrer que les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GFC}$ sont supplémentaires et que les angles $\widehat{GEC}$ et $\widehat{GDF}$ sont complémentaires.

Montrer également que les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{GFD}$ sont complémentaires.

(b) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

(c) Calculer dans la figure 2, les longueurs AF, DE, GD et GF.

Exercice 32 [7, Reims] Voici le programme de construction d'un pentagone $ABCDE$.
- $[AB]$ est un segment de longueur 4 cm, de milieu O. (xy) est la médiatrice de $[AB]$. On appelle P le demi-plan de frontière (AB) qui contient la demi-droite $[Ox)$.
- On construit la bissectrice de $\widehat{AOx}$; $[Ou)$ est la partie de cette bissectrice contenue dans P.
- On construit la bissectrice de $\widehat{BOx}$; $[Ov)$ est la partie de cette bissectrice contenue dans P.
- Le cercle centré en A et passant par B coupe $[Ou)$ en E.
- Le cercle centré en B et passant par A coupe $[Ov)$ en C.
- La perpendiculaire en E à (AE) coupe la perpendiculaire en C à (BC) en D.

1. Réaliser la figure avec soin.
2. Montrer que E et C sont symétriques par rapport à (xy), puis montrer que D est situé sur (xy).
3. Montrer que O et E sont sur le cercle de diamètre $[AD]$. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADE}$. Montrer que tous les côtés du pentagone $ABCDE$ ont même mesure.
4. Le pentagone $ABCDE$ est-il régulier ?

   Rappel : Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc, ou des arcs égaux, ont même mesure.

Exercice 33 Soit ABC un triangle rectangle en C et soit H le pied de la hauteur issue de C tel que $AH = 1$ et $HB = x$. Que vaut CH ?

Exercice 34 Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et en B dont les diagonales sont perpendiculaires. On donne $AD = 1$ et $BC = 3$. Que vaut AB ?

Exercice 35 [8, Dijon] Soit ABC un triangle quelconque. Soit O le centre du cercle Γ circonscrit à ABC. Soit D le point diamétralement opposé à A sur Γ. $[BB']$ et $[CC']$ sont des hauteurs du triangle ABC qui se coupent en H (l'orthocentre de ABC).

1. Montrer que $(DC)\perp(AC)$ et que $(BB')//(DC)$.
2. Montrer que $BHCD$ est un parallélogramme.
3. (HD) et (BC) se coupent en M. (AH) et Γ se coupent en H' distinct de A.
   (a) Quelle est la nature du triangle $HH'M$?
   (b) Montrer que M est le centre du cercle circonscrit au triangle $HH'D$.
4. Montrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (BC).
5. Que dire des symétriques de H par rapport aux droites (AB) et (AC). Enoncer les propriétés démontrées dans cet exercice.

Exercice 36 [10, Guadeloupe, Guyane] Soit un segment $[MA]$ et soit a la mesure, en centimètres, de ce segment.

1. Tracer le cercle C_1 de centre M et de rayon a, et le cercle C_2 de centre A et de rayon a. Les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points, dont l'un, O, est tel que le triplet (M, O, A) soit décrit dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Démontrer que le triangle MOA est équilatéral.
2. Tracer le cercle C_3 de centre O et de rayon a. Le cercle C_3 recoupe la demi-droite $[MO)$ au point T. Démontrer que le triangle MAT est rectangle en A.
3. Soit R le point d'intersection du cercle C_2 et du segment $[AT]$. Tracer le cercle C_4 de centre R et de rayon a. Le cercle C_4 recoupe le cercle C_1 au point S et le cercle C_2 au point I.
   (a) Démontrer que le quadrilatère $MARS$ est un carré.
   (b) Démontrer que le triangle SOR est isocèle de sommet O. Calculer SO en fonction de a.
   (c) Démontrer que le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A. Calculer OI en fonction de a.
   (d) Démontrer que les points S, O et I sont alignés et calculer SI en fonction de a.

Exercice 37 [10, Amiens] Soit $ABCD$ un carré de 5 cm de côté. Tracez la parallèle à la droite (AC) passant par B. Soit F l'intersection de cette droite avec la droite (AD). Soit G l'intersection de cette droite avec la droite (DC). Tracez la parallèle à la droite (AC) passant par D. Soit E l'intersection de cette droite avec la droite (AB). Soit H l'intersection de cette droite avec la droite (BC).

1. Déterminer la nature du quadrilatère $EFGH$.
2. Calculer l'aire du quadrilatère $EFGH$.
3. Soit O l'intersection des diagonales du carré $ABCD$. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.
4. Soit P le symétrique de A par rapport à B. Soit Q le symétrique de C par rapport à B. Soit R le symétrique de C par rapport à D. Soit S le symétrique de A par rapport à D. Démontrer que P, Q, R et S sont sur le cercle circonscrit au quadrilatère $EFGH$.
5. Calculer l'aire du polygone $EFQPGHSR$.

3.4 La géométrie dans l'espace

3.4.1 Droites et plans dans l'espace

Droites dans l'espace

La notion de droite n'est pas définie dans ce cours.

Théorème 3.58
Par deux points non confondus passe une unique droite.

Théorème 3.59
Deux droites sont parallèles dans l'espace si elles sont coplanaires dans P et sont parallèles dans P.

Théorème 3.60
Deux droites sont orthogonales dans l'espace si leurs parallèles menées par un point donné sont perpendiculaires dans le plan défini par ces deux droites.

L'énoncé de ce théorème utilise le théorème 3.62.

Plans dans l'espace

La notion de plan n'est pas définie dans ce cours.

Théorème 3.61
Par trois points non alignés et non confondus passe un unique plan.

Théorème 3.62
Par deux droites sécantes non confondues passe un unique plan.

Théorème 3.63
Deux plans P et P' sont parallèles dans l'espace si toute droite de P[37] *est parallèle à au moins une droite de P'.*

Théorème 3.64
Deux plans P et P' sont orthogonaux dans l'espace si P' contient au moins une droite D qui soit orthogonale à P.

L'énoncé de ce théorème utilise le théorème 3.66.

Théorème 3.65
Une droite D est parallèle à un plan P dans l'espace si au moins un plan P' contenant D est parallèle à P.

Théorème 3.66
Une droite D est orthogonale à un plan P dans l'espace si toute droite de P[38] *est orthogonale à D.*

Exercices non corrigés :

Exercice 38 Vrai ou faux ? Justifier en donnant un contre-exemple sur le cube $ABCDEFGH$ si nécessaire.

1. Deux droites parallèles sont coplanaires.
2. Deux droites orthogonales sont coplanaires.
3. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre-elles.
4. Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles entre-elles.
5. Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
6. Deux plans orthogonaux à un même troisième sont parallèles entre eux.
7. Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.

37. Note : il suffit de le vérifier pour deux droites non parallèles de P.
38. Note : il suffit de le vérifier pour deux droites non parallèles de P.

8. Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.
9. Deux plans P et P' sont orthogonaux si toute droite de P est orthogonale à au moins une droite de P'.
10. Si une droite D est parallèle à un plan P, toute droite de P est parallèle à D.
11. Si P et P' sont deux plans parallèles, si P'' est un plan qui coupe P sur la droite D et qui coupe P' sur la droite D' alors D et D' sont parallèles.
12. Si P et P' sont deux plans orthogonaux, si P'' est un plan qui coupe P sur la droite D et qui coupe P' sur la droite D' alors D et D' sont perpendiculaires.

3.4.2 Les polyèdres

Définitions : Un **polyèdre convexe** est une intersection finie de demi-espaces (une figure géométrique du plan délimitée par des polygones est un polyèdre). On définit ici un polyèdre convexe par son intérieur (il existe des définitions basées sur la frontière -i.e. le bord-). [39]

Un **polyèdre** est une réunion finie de polyèdres convexes. [40]

Un polyèdre possède un nombre fini de sommets, d'arêtes et de faces.

Théorème 3.67
Soit P un polyèdre connexe et borné. Si on note S son nombre de sommets, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces, on a $S - A + F = 2$.

Quelques polyèdres usuels : le cube, le parallélépipède rectangle (ou le pavé droit), la famille des pyramides (plus particulièrement des pyramides régulières), la famille des prismes (plus particulièrement des prismes droits), ...

Ils admettent généralement un patron. On les représente usuellement en perspective cavalière.

3.4.3 D'autres figures dans l'espace

Le cylindre ... Il admet un patron. Le cercle de base sera vu comme une ellipse sur la perspective cavalière.

Le cône ... Il admet un patron. Le cercle de base sera vu comme une ellipse sur la perspective cavalière.

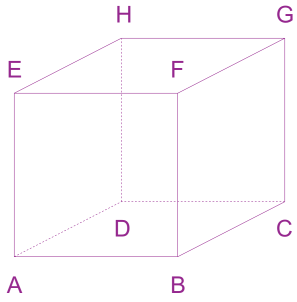
La sphère ... Elle n'admet pas de patron. Elle sera vue comme une ellipse (en général, proche du cercle) en perspective cavalière.

3.4.4 Différents modes de représentation dans l'espace

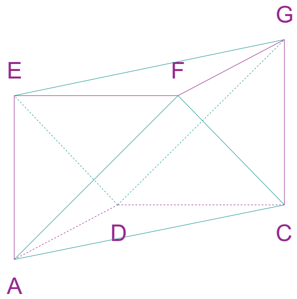
Sur quel solide allons-nous travailler ?

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté mesurant quatre centimètres. Les faces de ce solide sont des carrés : $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ et $DAEH$.

39. On se limite, dans la suite, au cas des polyèdres bornés (i.e. qui peuvent être contenus dans une sphère).
40. On se limite dans la suite au cas des polyèdres connexes (i.e. d'un seul tenant).



Nous considérons alors le solide $ACDEFG$. Les faces de ce solide sont des triangles : ACD, EFG, ACF, DEG, AEF, CFG, CDG et ADE. *Remarque* : nous avons maintenant moins de sommets et plus de faces.



Travail sur ces solides

L'objectif de ce travail est de calculer la hauteur du deuxième solide lorsque ce dernier est posé sur le plan (ACF).

Nous allons d'abord montrer que les plans (ACF) et (DEG) sont parallèles.

Montrons que le plan (ACF) est orthogonal à la droite (BH). Pour ce faire, nous allons montrer :

1. $(BH)\perp(AC)$ (*Le plan* (BDF) *est orthogonal à la droite* (AC) *car*

   (a) $(BD)\perp(AC)$ *(les diagonales du carré sont perpendiculaires) ;*

   (b) $(BF)\perp(AC)$ *(le plan* (ABC) *étant orthogonal à la droite* (BF)*).*

   Puis, comme $(BDF)\perp(AC)$*, on déduit* $(BH)\perp(AC)$) ;

2. $(BH)\perp(AF)$ (*nous faisons de même que précédemment* ...).

$(BH)\perp(AC)$ et $(BH)\perp(AF)$ induisent directement que $(BH)\perp(ACF)$.

Par suite, nous montrons de la même façon que $(BH)\perp(DEG)$.

Nous avons deux plans qui sont orthogonaux à une même droite (BH), ils sont donc parallèles et $(ACF)//(DEG)$.

Nous appelons I le point d'intersection de la droite (BH) et du plan (ACF) et J le point d'intersection de la droite (BH) et du plan (DEG). La hauteur du second solide est donc la mesure du segment $[IJ]$.

Pour calculer cette longueur, nous allons procéder comme suit :

1. Calcul de BH ;

2. Calcul de JH (*pour ce faire, on calcule le volume du tétraèdre* $DEGH$ *de deux manières différentes, après avoir calculé l'aire du triangle* DEG) ;

3. Nous déduisons BI (par symétrie) ;
4. Nous concluons.

Définition : Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

Théorème 3.68
Propriétés du plan médiateur d'un segment.

Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu du segment $[AB]$ et est orthogonal à la droite (AB).

Si un plan passe par le milieu du segment $[AB]$ et est orthogonal à la droite (AB), alors c'est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Si trois points P, Q et R sont équidistants de A et de B, alors le plan (PQR) est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Et si nous continuions l'analyse des solides :

Qu'est I pour le triangle ACF ? Comme ACF est un triangle équilatéral, il est fort possible que ce point I soit à la fois orthocentre, centre de gravité, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit. Il semble plus facile de montrer qu'il est équidistant de chacun des points ACF (et donc centre du cercle circonscrit au triangle ACF).

1. Montrons que $AI = IC$ (*$AB = BC$, $AF = FC$ et $AD = DC$. D'où (BFD) est le plan médiateur du segment $[AC]$. Nous concluons car I appartient à ce plan médiateur.*) ;
2. Nous montrons de même que $AI = IF$.

$IA = IC = IF$, donc I est centre du cercle circonscrit au triangle ACF.

Représentation des faces

Empreintes

1. Représenter chacune des faces du solide $ABCDEFGH$.
2. Représenter chacune des faces du solide $ACDEFG$.

Patrons

1. Représenter un patron du solide $ABCDEFGH$. *Remarque* : il est écrit *un* patron.
2. Représenter un patron du solide $ACDEFG$.

Remarque : lorsque tous les polygones sont réguliers, il est possible de schématiser un patron comme pour le cube :

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & C \arrow[d] & & \\
C \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & C \\
 & C & &
\end{tikzcd}$$

où C désigne un carré et les liaisons désignent des arêtes qui coïncident.

Représentation du solide en perspective cavalière

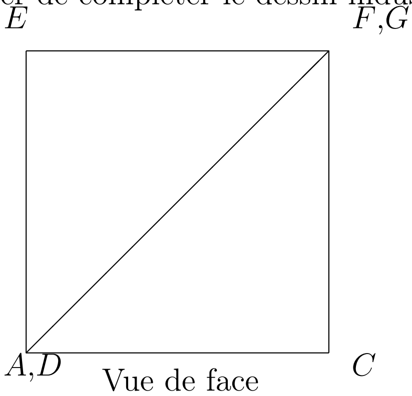
La face $ABFE$ est vue de face et est par conséquent non déformée ((AB) ou (FE) sont portées par la ligne d'horizon et (AE) ou (BF) sont verticales car $ABFE$ est un carré).

$(AD) \perp (ABE)$, $(BC) \perp (ABE)$, $(FG) \perp (ABE)$ et $(EH) \perp (ABE)$. Pour cette raison, elle sont appelées fuyantes, et sont, en perspective cavalière, représentées comme faisant un angle d'incidence α avec l'horizon ($(AD)//(BC)//(FG)//(EH)$). Généralement, cet angle α est choisi comme valant 30°, 45° ou 60° (nous allons choisir 45°). De plus, sur ces fuyantes, les mesures sont généralement multipliées par un coefficient d'agrandissement/réduction, généralement, $0,5$, $0,7$, ou 1 (nous choisissons ici ce coefficient égal à $0,7$ (cas de réduction)).

1. Représenter le solide $ABCDEFGH$ en perspective cavalière.
2. Représenter le solide $ACDEFG$ en perspective cavalière.

Représentation d'un solide en dessin industriel

Nous allons nous efforcer de compléter le dessin industriel suivant, dont la vue de face est fournie.



Vue de face

Représentation d'une coupe d'un solide

Nous appelons Λ le plan médiateur commun à chacun des segments $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$.

1. Représenter la coupe du solide $ABCDEFGH$ dans le plan Λ.
2. Représenter la coupe du solide $ACDEFG$ dans le plan Λ. Nous nommons alors Γ ce polygone.

Analyse sommaire du polygone Γ.

1. Γ est-il un polygone régulier ?
2. Combien Γ possède-t-il d'axes de symétries ?
3. Quelles sont les mesures de ses côtés ?
4. Quelle est son aire ?

Il faut savoir que la coupe d'une figure ne représente jamais une figure de l'espace : il ne s'agit que d'une coupe de cette figure. *Remarque* : même une infinité de coupes ne suffit pas à définir un solide de façon non équivoque (par exemple, les tétraèdres $ABDE$ et $ABDG$ ont tous deux les mêmes coupes parallèlement au plan (ABD), mais sont bien entendu différents).

Liens entre les différents modes de représentation mentionnés

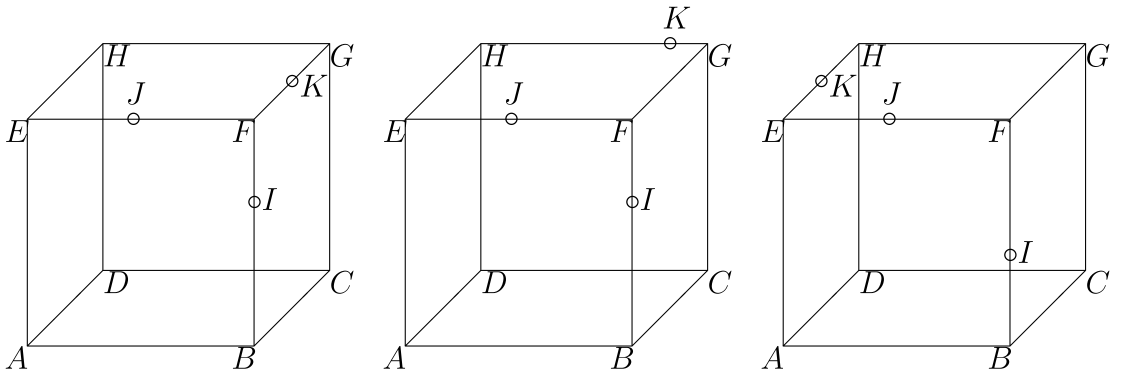
Les passages entre un mode de représentation et un autre sont bien souvent délicats.

Ces modes de représentation sont toujours valables pour les polyèdres. Mais on peut bien souvent élargir à d'autres figures ce type de représentation :

1. Un cône ou un cylindre sont représentables par un patron ..., mais pas une sphère.
2. Un cône, un cylindre ou une sphère sont représentables en perspective cavalière. Cependant, pour des surfaces ne présentant pas (ou peu) d'arêtes (comme la sphère), seul le contour doit être représenté et cela peut porter à confusion (c'est pourquoi, dans ce cas, on adjoint généralement une coupe à cette perspective cavalière pour essayer de lever les ambiguïtés (dans le cas de la sphère, on représente souvent l'équateur qui sera vu comme une ellipse, mais qui représente un cercle)).

Exercices non corrigés :

Exercice 39 Soit $ABCDEFGH$ un cube. Dans les trois cas suivants ($K \in [FG]$, $K \in [GH]$, $K \in [HE]$), tracer les sections du cube par le plan (IJK) ($I \in [BF]$ et $J \in [EF]$) en perspective cavalière.



Exercice 40 [13, Lyon] On fixe un cube $ABCDEFGH$, d'arête 1. Une représentation du cube en perspective cavalière et son patron sont donnés sur le document-réponse que l'on remettra avec la copie. Par exemple, le sommet A du cube est représenté par les points A_1, A_2, A_3 du patron.

On appelle "distance" entre deux points M et N de la surface du cube, la longueur du plus court chemin tracé sur la surface du cube et qui relie ces deux points. Pour ne pas confondre la "distance" avec la distance usuelle, on la notera $d(M, N)$. Par exemple, la "distance" de G à C est 1, car le plus court chemin qui les relie est l'arête $[GC]$. En revanche, la "distance" de G à A est strictement plus grande que la longueur usuelle de la diagonale $[AG]$ du cube.

1. Compléter le patron en nommant tous les sommets du cube. (On ne demande pas de justifications pour cette question.)
2. (a) Tracer, en rouge sur le patron, l'ensemble des points qui représentent des points de la ligne brisée ACG (réunion des segments $[AC]$ et $[CG]$).

   (b) Calculer la longueur $\updownarrow$ de la ligne brisée ACG.

(c) Soit J le point de la ligne brisée ACG qui est à mi-chemin de A et G, c'est-à-dire tel que $d(A, J) = AJ = \frac{\updownarrow}{2}$.

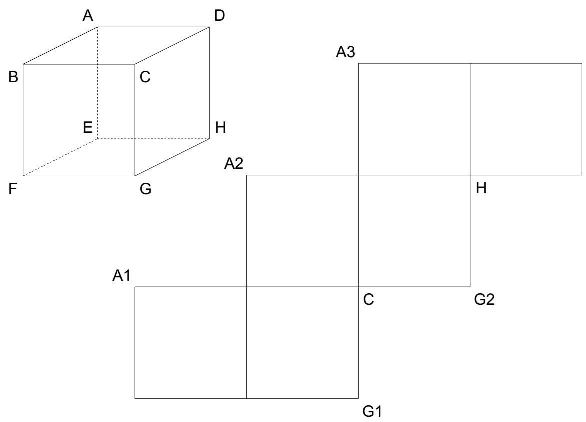
Décrire, justifier et effectuer une construction du point J sur le patron.

3. Décrire et représenter sur le patron l'ensemble des points M de la surface du cube qui sont à la même "distance" de G que C, c'est-à-dire tels que $d(G, M) = d(G, C)$.

4. (a) Parmi les chemins qui relient les sommets A et G, et qui sont totalement contenus dans les faces $ABCD$ et $CDHG$, on considère le plus court. Le tracer en bleu sur le patron, puis sur le cube en perspective, en précisant chaque étape de la construction.

   (b) Quelle est la longueur de ce chemin ?

Document-réponse à rendre avec la copie



Exercice 41 [9, Martinique] On considère une famille (F) de quadrilatères définie comme suit : *Un quadrilatère $ABCD$ appartient à (F) s'il est convexe et si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.*

1. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Argumenter la réponse.
   (a) Tous les rectangles appartiennent à (F).
   (b) Certains éléments de (F) sont des parallélogrammes.
2. On considère un quadrilatère $ABCD$ de (F). Soient E, F, G et H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
   (a) Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$? Le démontrer.
   (b) Quelle est la condition supplémentaire à imposer à $ABCD$ pour que $EFGH$ soit un carré ? Le justifier.
3. On considère un quadrilatère $ABCD$ de (F) tel que $AC = BD = 10\ cm$, $AB = 6\ cm$ et l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.
   (a) i. Construire à la règle et au compas, le quadrilatère $ABCD$.
   ii. Si O est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, calculer BC puis BO.

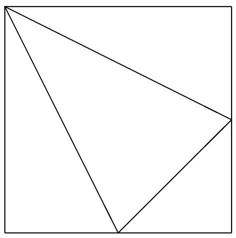
(b) La figure obtenue est le début d'un patron d'un tétraèdre $BADC$ dont ABC et ACD représentent deux faces perpendiculaires (si ACD est la base, $[OB]$ est la hauteur du tétraèdre).

i. Montrer que le triangle BOD est rectangle. En utilisant les résultats précédents, déduire une construction, en vraie grandeur, de la longueur de l'arête $[BD]$ du tétraèdre $BACD$.

ii. Terminer le patron, avec règle et compas, en laissant apparaître les traces justificatives des constructions.

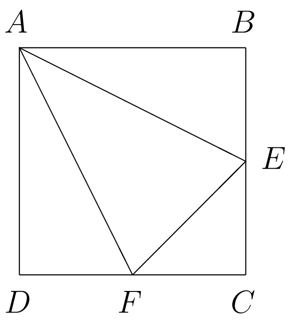
Exercice 42 [7, Limoges] D'après Maths CM2 - Nouvelle Collection -, Thevenet, Bordas, 1996, p. 117.

16 Observe le patron



A quelle figure correspond ce patron ?
- A un prisme ?
- A une pyramide ?
- A un cube ?

1. Comment reconnaître que la figure ci-dessus, composée de quatre triangles, ne peut pas être le patron d'un prisme, ni celui d'un cube ?
2. On admettra qu'il s'agit d'un patron de pyramide et on considérera que ce patron est constitué à partir d'un carré $ABCD$, dont les côtés mesurent 4 cm.
   (a) Dire, en justifiant votre réponse, où doivent être placés le point E sur le segment $[BC]$ et le point F sur le segment $[CD]$ pour qu'on ait bien affaire à un patron de pyramide.
   (b) Etablir quelle est la nature précise de chacune des quatre faces de la pyramide.



3. Appelons K le sommet du solide où se rejoignent les points B, C et D du patron. On obtient ainsi la pyramide $AEFK$.
   (a) Montrer que l'on peut faire coïncider la pyramide avec le coin d'un cube de côté 4 cm. Représenter un cube en perspective cavalière et y tracer une représentation de la pyramide.

(b) Calculer le volume de la pyramide[41].

4. (a) Calculer l'aire du triangle AEF.

   (b) Soit H la projection orthogonale de K sur le plan (AEF). Calculer KH.

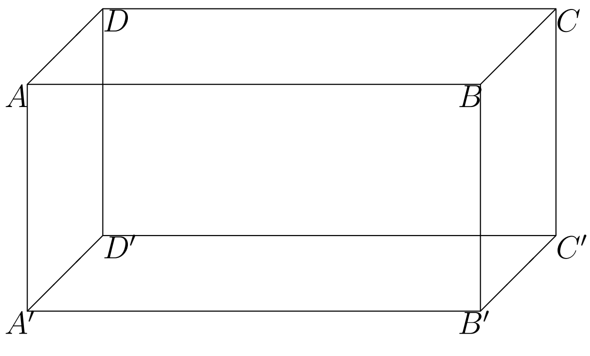
5. (a) Montrer que dans le patron ci-dessus, les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

   (b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle AEF.

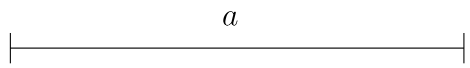
Exercice 43 [9, Bordeaux, Caen, Clermont, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, La Réunion] On considère une pyramide $SEFG$. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de $[SE]$, $[SG]$, $[GF]$, $[EF]$ et $[EG]$.

1. Prouver que $(IL)//(JK)$ et que $IJKL$ est un parallélogramme.
2. On suppose, seulement dans cette section, que $SF = EG$. Quelle est la nature de $IJKL$?
3. On suppose, seulement dans cette section, que (SF) est orthogonale au plan (EFG). Démontrer que $IJKL$ est un rectangle.
4. Quelle condition suffit-il d'imposer au triangle SEG pour que le quadrilatère $SIMJ$ soit un losange ?
5. Quelle condition suffit-il d'imposer au triangle SEG pour que le quadrilatère $SIMJ$ soit un rectangle ?
6. Dessiner le patron d'une pyramide $SEFG$ telle que $SIMJ$ soit un carré et $IJKL$ un rectangle.

Exercice 44 [7, Lyon] On dispose d'un parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives $AB = a$, $AD = AA' = a/2$. Soient I, J, I' et J' les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[A'B']$ et $[A'D']$. On considère le solide S de sommets B, D, J, I, B', D', J' et I'. On admettra que les quadrilatères $BDD'B'$ et $IJJ'I'$ sont des rectangles.



Dans les constructions demandées ci-dessous, on prendra pour longueur a, le segment ci-dessous :

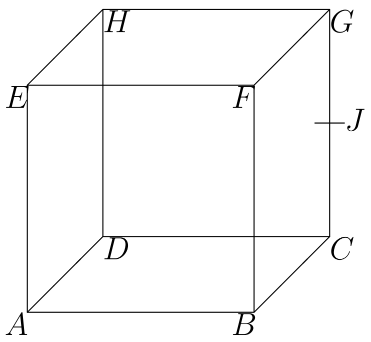


1. Construire le quadrilatère $BDJI$ à la règle non graduée et au compas. Indiquer sa nature. Calculer son aire en fonction de a.

41. $V = \frac{1}{3} \times b \times h$ où b désigne l'aire de la base et h désigne la hauteur correspondante.

2. Construire un patron du solide S, à la règle graduée et au compas. Ecrire le programme de construction.
3. Quelle est l'aire totale de ce solide exprimée en fonction de a ?
4. Quelle proportion du volume du parallélépipède initial représente le volume de ce solide S ?

Exercice 45 [8, Bordeaux, Clermont, Nantes, Poitiers, Ile de la Réunion (2)]



La figure ci-contre représente un cube de 10 cm d'arête.

J est le milieu du segment $[CG]$.

1. (a) Reproduire sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter en répondant par oui ou par non. Pour la dernière ligne, on nommera un triangle autre que ceux qui figurent dans le tableau.

Le triangle	est-il rectangle ?	est-il isocèle ?	est-il équilatéral ?
DJH			
ACG			
AFC			
EHG			
	oui	non	non

(b) Justifier vos affirmations concernant la nature des triangles AFC et EHG.

2. On considère que la figure ci-dessus représente un cube en bois (de 10 cm d'arête). On le partage en deux morceaux à l'aide d'une scie, qu'on suppose sans épaisseur réalisant une coupe plane passant par les trois points R, S et T. Le point R est à 6 cm du sommet E, sur l'arête $[EH]$. Le point S est à 3 cm du sommet E, sur l'arête $[EA]$. Le point T est à 6 cm du sommet E, sur l'arête $[EF]$.

On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on imprime cette section RST sur une feuille.

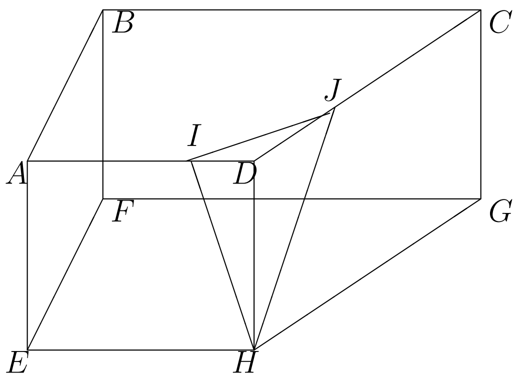
(a) i. Sans faire de calcul, dessiner en taille réelle à l'aide de la règle et du compas le contour de la surface imprimée. On utilisera des constructions géométriques annexes (les faire figurer sur la copie).

ii. Expliquer succinctement la construction géométrique.

(b) Calculer la dimension exacte de la longueur TR.

(c) Calculer l'aire exacte en cm^2 de la section obtenue.

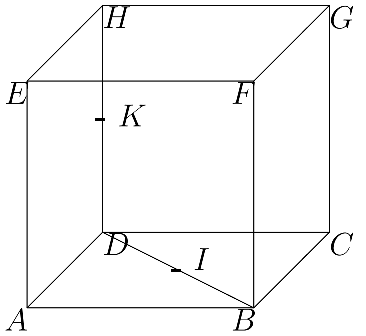
Exercice 46 [7, Besançon]



$ABCDEFGH$ est un prisme droit de "hauteur" $AE = 5\ cm$. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont des trapèzes rectangles isométriques avec $AD = AB = 6\ cm$, $BC = 12\ cm$ et $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90$ degrés. On place sur l'arête $[DA]$, le point I tel que $DI = 2\ cm$ et sur l'arête $[DC]$, le point I tel que $DJ = DC/3$.

1. Calculer DC.
2. Calculer la longueur de chacune des arêtes de la pyramide $DIJH$.
3. Construire au compas et à la règle (règle graduée et non graduée) le triangle IJH en vraie grandeur en laissant apparents les traits de construction.
4. Calculer l'aire du triangle ACD. En déduire celle du triangle IJD.
5. Quel est le volume du solide $DIJH$?

Exercice 47 [7, Corse]



La figure ci-contre représente un cube de 6 cm d'arête.

K est le milieu du segment $[DH]$; I est le milieu du segment $[BD]$.

1. Quelle est la nature du triangle HBC ? Justifier votre réponse.
2. On étudie le triangle HDB.
   (a) Calculer les mesures exactes DB et HB. (Tous les calculs doivent être justifiés.)
   (b) Démontrer que les droites (KI) et (HB) sont parallèles. En déduire KI.
   (c) Dessiner le triangle HDB en vraie grandeur.
3. On considère la pyramide de sommet H ayant pour base le triangle BCD.

(a) En dessiner un patron à l'échelle 1 : 2.

(b) Calculer le volume de cette pyramide.

Exercice 48 [8, Toulouse] $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 24\ cm$, $BC = 16\ cm$, E est le milieu de $[AB]$, F est le milieu de $[CD]$, G est le projeté orthogonal de E sur la droite (AF).

1. (a) Montrer que $AECF$ est un parallélogramme.

   (b) Déterminer l'aire du parallélogramme $AECF$.

   (c) Calculer la longueur AF.

   (d) En déduire la longueur EG.

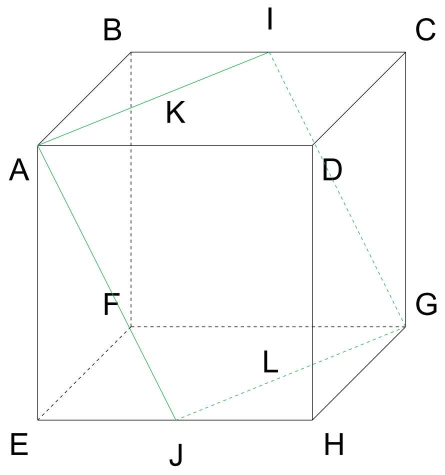
2. On découpe le parallélogramme $AECF$ et on l'enroule sur lui-même de telle sorte que A vienne en F et E en C. On forme ainsi la face latérale d'un cylindre de révolution.

   (a) Calculer la valeur exacte du rayon de la base, puis en donner une valeur approchée à un mm près par défaut.

   (b) Calculer la valeur exacte de son volume, puis en donner une valeur approchée à un mm^3 près.

Exercice 49 [13, Aix, Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse] On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, de côté 4 cm.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[EH]$, $[AD]$ et $[FG]$.



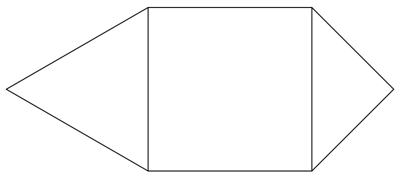
1. Le point D appartient-il au segment $[IG]$? Expliquer.
2. (a) Justifier que $AC = CH = HF = FA$.

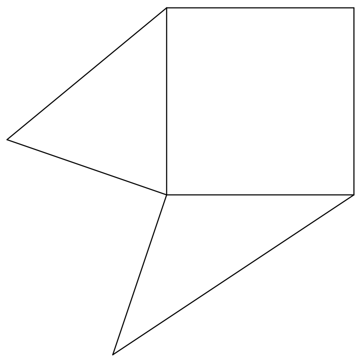
   (b) Peut-on dire que $ACHF$ est un losange ? Expliquer.
3. Démontrer que les quadrilatères $AICK$, $CKJG$ et $AIGJ$ sont des parallélogrammes.
4. Démontrer que $AIGJ$ est un losange.
5. Le quadrilatère $AIGJ$ est-il un carré ? Justifier.

6. Construire, à la règle et au compas, le losange $AIGJ$ en vraie grandeur en laissant visibles tous les traits de construction. La description de la procédure de construction n'est pas demandée.

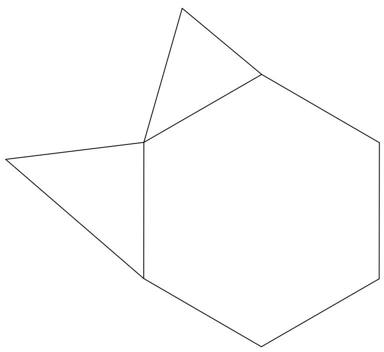
Exercice 50

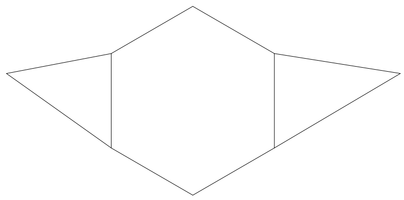
1. Complète les deux figures suivantes de manière à ce que les figures obtenues soient patrons de pyramides dont la base soit un carré (les deux pyramides sont différentes).





2. Complète les deux figures suivantes de manière à ce que les figures obtenues soient patrons de pyramides dont la base soit un hexagone régulier (les deux pyramides sont différentes).





Chapitre 4

La proportionnalité et les fonctions

4.1 Les propriétés relatives à la proportionnalité

Définition : On dit que deux grandeurs A et B sont proportionnelles si on peut passer de l'une des valeurs de A à celle correspondante de B en multipliant celle de A par un nombre constant appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple : Le prix en Euros (Grandeur A) et le prix en Francs (Grandeur B) d'un même article. Le coefficient de proportionnalité est 6.55957.

Définition : On peut, ranger toute valeur de A et celle correspondante de B, dans un tableau de valeurs appelé tableau de proportionnalité.

Exemple :

Grandeur A : prix en Euros d'un article	1	10	11
Grandeur B : prix en Francs du même article	6.55957	65.5957	72.15527

Théorème 4.1
Propriétés de linéarité du tableau de proportionnalité. *Soit le tableau de proportionnalité suivant :*

Grandeur A	x_1	x_2	$x_3 = a \times x_1$	$x_4 = x_1 + x_2$
Grandeur B	y_1	y_2	y_3	y_4

On a $y_3 = a \times y_1$ (propriété multiplicative de linéarité) et $y_4 = y_1 + y_2$ (propriété additive de linéarité).

Théorème 4.2
Retour à l'unité dans un tableau de proportionnalité. *Soit le tableau de proportionnalité suivant :*

Grandeur A	x_1	x_2	1
Grandeur B	y_1	y_2 *inconnu*	y_3 *inconnu*

Avant de trouver y_2, on cherche y_3 qui est donné par $y_3 = y_1/x_1$ (c'est aussi le coefficient de proportionnalité). y_2 se déduit alors par $y_2 = x_2 \times y_3$.

Théorème 4.3

Propriétés des rapports égaux, du produit en croix et de la règle de trois. *Soit le tableau de proportionnalité suivant :*

Grandeur A	x_1	x_2
Grandeur B	y_1	y_2

Un tableau de proportionnalité satisfait la propriété des rapports égaux suivante :

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Cette égalité équivaut à celle du produit en croix :

$$x_1 \times y_2 = x_2 \times y_1.$$

De ces égalités découle la règle de trois aussi appelée règle de la quatrième proportionnelle : lorsque y_2 est inconnu, y_2 se calcule par la formule

$$y_2 = x_2 \times \frac{y_1}{x_1}.$$

Exercices non corrigés :

Exercice 1 On mélange un liquide contenant 40% d'alcool et un liquide contenant 10% d'alcool pour obtenir un litre de liquide contenant 20% d'alcool. Comment doit-on procéder ?

Exercice 2 [13, Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse] Sur une carte routière, un segment de 10 cm repésente une longueur de 25 km dans la réalité.

Quelle est l'échelle de cette carte ?

Exercice 3 [7, Nancy-Metz, Strasbourg] On partage 85000F entre quatre héritiers. La part du deuxième est la moitié de la part du premier et le tiers de celle du troisième. Ce dernier a 1570F de moins que le quatrième.

1. Calculer la part de chacun (résolution par le procédé de votre choix).
2. Faites une représentation schématique permettant de résoudre le problème sans le recours aux équations algébriques.

Exercice 4 [9, Martinique] Un héritage estimé à 2100000 F (deux millions cent mille francs) est composé d'une maison, d'un terrain et d'une somme d'argent en dépôt dans une banque. La valeur du terrain représente 80% de celle de la maison. A eux deux, le terrain et la maison représentent une fois et demie la valeur de la somme d'argent en dépôt à la banque.

Le testament stipule que cet héritage doit être entièrement réparti entre trois personnes A, B et C, proportionnellement au nombre de parts qui leur sont respectivement attribuées : 28, 24 et 18.

1. Calculer le montant de la somme d'argent, la valeur du terrain et la valeur de la maison.
2. Calculer la valeur de l'héritage de chacun.

3. Proposer une solution de partage au notaire chargé de liquider l'héritage.

Exercice 5 [7, Nice] *L'exploitation agricole.*

Une exploitation agricole a la moitié de sa superficie consacrée à la pâture, le tiers est couvert de bois, le dixième est en verger et le vingtième est en culture. La zone bâtie occupe le demi-hectare restant.

1. Quelle est (en hectares) la superficie totale de cette exploitation ?
2. Quelle est (en pourcentage) la part représentée par chacune des zones ? Justifier le calcul.

Exercice 6 [8, Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice] Dans une ville, lors d'une élection, trois listes sont en présence : A, B et C. Les résultats en nombre de voix et pourcentage des exprimés figurent dans le tableau ci-dessous dont trois cases ont été effacées. Reconstituer les cases manquantes en justifiant les réponses.

	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	2362	
Liste B		25%
Liste C	5522	

Exercice 7 [9, Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice] Un cycliste parcourt un même trajet à l'aller et au retour sans s'arrêter. Sa vitesse est de 20 km/h en montée et 40 km/h en descente. L'aller se compose d'une montée et d'une descente dont la longueur est deux fois plus courte que celle de la montée.

1. Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours aller.
2. Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours retour.
3. Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour.

Exercice 8 [9, Guadeloupe, Guyane] Trois motocyclistes ont pris ensemble le départ d'une course sur un circuit. Le second, dont la vitesse moyenne était inférieure de $7,5\ km/h$ à celle du premier et supérieure de $4,5\ km/h$ à celle du troisième, est arrivé 6 minutes après le premier et 4 minutes avant le troisième. Le but de l'exercice est de déterminer la longueur du parcours, la vitesse moyenne de chaque parcours et le temps mis par chacun pour effectuer le parcours.

1. Compléter le tableau ci-dessous que l'on reproduira sur la copie

	Vitesse moyenne	Durée de parcours	Distance parcourue
Premier coureur			
Second coureur	v	t	$v \times t$
Troisième coureur			

2. En déduire
   – la vitesse moyenne de chaque coureur en km/h,
   – la durée de parcours de chaque coureur en minutes,

– la distance parcourue.

Exercice 9 [7, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, La Réunion, Nantes, Poitiers] Dans un scrutin uninominal à deux tours, le code électoral précise que seuls peuvent accéder au second tour les candidats qui ont obtenu un nombre de voix au moins égal à $12,5\%$ du nombre des inscrits. Lors d'une élection, il y a 6 candidats pour 8000 inscrits et, au premier tour, 24% d'abstentions et 85 bulletins blancs ou nuls.

1. Se peut-il qu'aucun candidat ne puisse accéder au second tour ?
2. Se peut-il que tous les candidats puissent accéder au second tour ?

Exercice 10 [13, Lyon]

1. Lors d'un référendum de 2003 en Martiloupe, un camp a obtenu 1044 voix de plus que l'autre, soit un résultat de $50,48\%$ contre $49,52\%$.
   (a) Calculer, si possible, le nombre de suffrages exprimés.
   (b) Calculer, si possible, le nombre d'électeurs inscrits.
2. Dans un bureau de vote de Terre-de-France, il y a eu, en 2003, un tiers de suffrages exprimés de plus que lors de la consultation de 1992. En 1992, il y a eu 450 suffrages exprimés, dont 62% de **non**. Lors du référendum de 2003, les **non** ne représentaient que 47%. Le nombre de **non** a-t-il augmenté ou diminué ?

Exercice 11 [9, Besançon]

1. Au 10 janvier 2000, le Napoléon (pièce de vingt francs or) cote 330,60 francs. Calculer sa valeur en marks allemands (au centième) en utilisant le tableau suivant

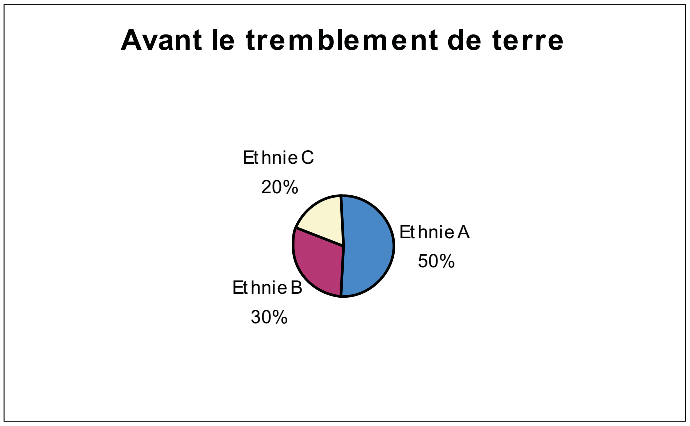
	PARITES ZONE EURO
	1 EURO =
$1,95583$	mark (Allemagne)
$40,3399$	francs bel (Belgique)
$166,386$	pesetas (Espagne)
$6,55957$	francs (France)
$1936,27$	lires italiennes (Italie)

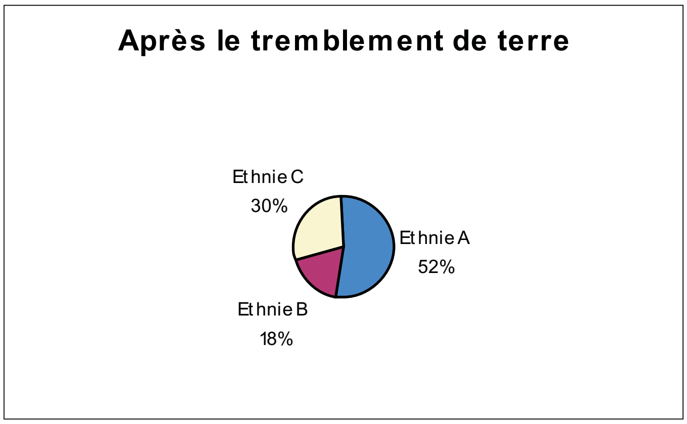
2. Le tableau ci-dessous représente les fluctuations du dollar par rapport à l'euro. La dernière ligne du tableau représente cette évolution en pourcentage. Reproduire et compléter ce tableau (la présentation des calculs est exigée).

   Les valeurs du dollar seront arrondies au dix millième et les pourcentages seront arrondis au centième, par excès ou par défaut, au choix du candidat.

Dates	07/01	10/01	11/01	12/01	13/01	14/01
Dollar	$0,9713$		$0,9689$	$0,9737$		$0,9866$
Euro	1	1	1	1	1	1
Evolution en % par rapport à la date	•	$+0,40\%$			$-0,01\%$	$+1,33\%$

Exercice 12 Ce pays est habité par trois ethnies différentes : A, B et C.





Un tremblement de terre vient de décimer 7000 personnes dans ce pays dont 3220 pour l'ethnie A. Quelle est la population de ce pays après le tremblement de terre ?

Exercice 13 **Du café au lait.** On considère un pot A contenant 1 litre de lait. On considère également un pot B contenant 1 litre de café.

Première étape : Je prends x litre(s) dans le pot A que je transvase dans le pot B (évidemment, $0 \leq x \leq 1$).

Compléter les ...

1. Après cette première étape, le pot A contient ... litre(s) de mélange.
   (a) Après cette première étape, le pot A contient ... litre(s) de lait.
   (b) Après cette première étape, le pot A contient ... litre(s) de café.
2. Après cette première étape, le pot B contient ... litre(s) de mélange.
   (a) Après cette première étape, le pot B contient ... litre(s) de lait.
   (b) Après cette première étape, le pot B contient ... litre(s) de café.

Seconde étape : Après avoir bien homogénéisé le mélange du pot B, je prends x litre(s) dans le pot B que je transvase dans le pot A.

Compléter les ...

1. Après la seconde étape, le pot B contient ... litre(s) de mélange.
   (a) Après cette seconde étape, le pot B contient ... litre(s) de lait.
   (b) Après cette seconde étape, le pot B contient ... litre(s) de café.
2. Après la seconde étape, le pot A contient ... litre(s) de mélange.
   (a) Après cette seconde étape, le pot A contient ... litre(s) de lait.
   (b) Après cette seconde étape, le pot A contient ... litre(s) de café.
3. Après cette seconde étape, comparer les quantités de café dans le pot A et de lait dans le pot B.

4.2 Les fonctions linéaires et affines

Définition : Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation de E dans F, qui à tout élément de E associe au plus un élément de F. On note $f\ : E \to F; x \to y = f(x)$. On dit que y est l'image de x par f et que x est l'antécédent de y par f. Un tableau du type

Grandeur x	x_1	x_2	...
Grandeur y	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	...

est appelé un tableau de valeurs de f. La représentation graphique de f (ou graphe de f) est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$.

Définition : Lorsque f est donnée par $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \to y = a \times x$, où a est un réel donné, on dit que f est une fonction linéaire.

Théorème 4.4
Un tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine. Il s'ensuit les propriétés suivantes :

1. $f(x) = f(1) \times x$ *(retour à l'unité) ;*
2. *Soit* k *un réel,* $f(k \times x) = k \times f(x)$ *(propriété multiplicative de la fonction linéaire) ;*
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *(propriété additive de la fonction linéaire) ;*
4. $x/f(x) = y/f(y) =$ *constante (rapports égaux) ;* $f(y) = y \times (f(x)/x)$ *(règle de trois) ;* $x \times f(y) = y \times f(x)$ *(produit en croix).*

Définition : Lorsque f est donnée par $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \to y = a \times x + b$, où a et b sont des réels donnés, on dit que f est une fonction affine.

Théorème 4.5
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. La fonction affine possède la propriété de proportionnalité des écarts (i.e. $f(x) - f(y) = a \times (x - y)$*).*

Exercices non corrigés :

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Chez A, l'abonnement au vidéo-club est de 10 Euros par mois, et la location d'une cassette vidéo coûte 1 Euro. Au distributeur B, on ne paye pas d'abonnement, mais on paye 2 Euros la location d'une cassette vidéo. Représenter graphiquement les prix en Euros chez A et B en fonction du nombre de cassettes vidéos louées par mois. A partir de combien de cassettes vidéos, le vidéo-club est-il moins cher que le distributeur ?

Exercice 15 32 Fahrenheit correspondent à 0 degrés celcius. 212 Fahrenheit correspondent à 100 degrés celcius. Ces échelles de mesures étant en relation affine, déduire à combien de Fahrenheit correspondent 40 degrés celcius et à combien de degrés celcius correspondent 160 Fahrenheit.

Exercice 16 [8, Lille] Soit $ABCD$ un trapèze rectangle de hauteur $AD = 4\ cm$, de base $AB = 4\ cm$ et $CD = 7\ cm$ et soit M un point du segment $[AD]$. On pose $DM = x\ cm$.

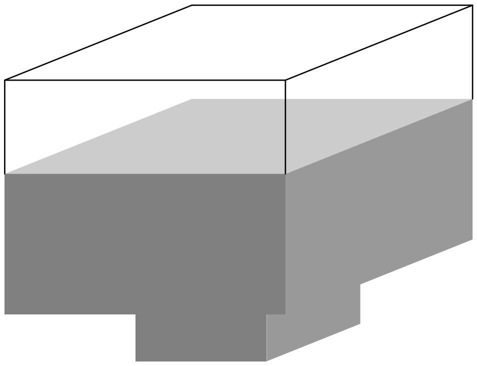
1. Evaluer en fonction de x les mesures a_1 et a_2 des aires du triangle CDM et du quadrilatère $ABCM$ (mesures exprimées en centimètres carrés).
2. Représenter la variation de ces deux aires quand M varie sur le segment $[AD]$. On utilisera la feuille de papier millimétré et on prendra comme unités :
   - 4 cm sur l'axe des abscisses (longueurs en centimètres),
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées (aires en centimètres carrés).
3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer M pour que $a_1 = a_2$.

Exercice 17 [8, Orléans] Soit x un nombre réel vérifiant $0 \leq x \leq 3$. Soit $ABCD$ un carré de côté 8. Soit I le point du côté $[AB]$ tel que $AI = x$. Soit L le milieu du segment $[AB]$. M est le point du segment $[LD]$ qui admet le point I comme projection orthogonale sur le segment $[AB]$ et le point K comme projection orthogonale sur le segment $[AD]$. On se propose d'étudier l'aire du triangle AKI.

1. Démontrer que $AK = 8 - 2x$.
2. En déduire l'aire $\vartheta(x)$ du triangle AKI en fonction de x et démontrer que $\vartheta(x) = 4 - (x-2)^2$.
3. Quelle est la plus grande valeur de cette aire ? Justifier la réponse.
4. Calculer les aires $\vartheta(0)$ et $\vartheta(3)$ du triangle AKI associées aux valeurs extrêmes correspondant à $x = 0$ et à $x = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux *Si* $0 \leq x \leq 3$, *alors,* $\vartheta(0) \leq \vartheta(x) \leq \vartheta(3)$? Justifier la réponse.

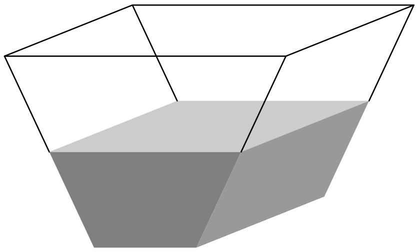
Exercice 18 [8, Limoges] Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent entre eux. L'arête du cube supérieur (le grand cube) mesure 90 centimètres. L'arête du cube inférieur (le petit cube) mesure 50 centimètres. Cette cuve contient un liquide. On note x la hauteur de liquide dans la cuve. On note $V(x)$ le volume en litres du liquide dans la cuve lorsque la hauteur de liquide dans la cuve est x (x étant exprimé en centimètres).

1. Calculer $V(30)$, $V(51)$, $V(90)$.
2. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.
3. Construire sur une feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $V(x)$.



4. Sur un segment $[AB]$, on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle 1 : 10.

Exercice 19 *L'abreuvoir*



La figure n'est pas à l'échelle.

L'abreuvoir est un prisme droit à base trapézoïdale de hauteur mesurant 4 m. Les trapèzes superposables ont une petite base mesurant 6 dm, une grande base mesurant 8 dm et la distance séparant les côtés parallèles est de 2 dm.

Exprimer le volume d'eau contenu dans l'abreuvoir en fonction de la hauteur d'eau dans cet abreuvoir. Pour quelle hauteur d'eau, la cuve est-elle à moitié pleine ?

Exercice 20 *Saturne*

Saturne est une planète située à une distance au Soleil de 1 427 millions de kilomètres (supposée constante). La période de révolution sidérale de Saturne est de 10 759 jours et 6 heures.

1. Quelle est la vitesse angulaire moyenne de Saturne (en degrés par heure) ?
2. Quelle est la vitesse moyenne de Saturne (en kilomètres par heure) ?

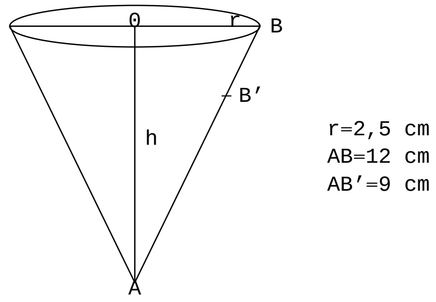
Exercice 21 *Train*

Un train de voyageurs TGV part de A pour aller vers B (le parcours de A à B mesure 1000 kilomètres). Ce TGV part à 8h00 et roule sur 150 kilomètres à la vitesse de 150 kilomètres par heure. Puis, il roule pendant deux heures à la vitesse de 270 kilomètres par heure et finit à la vitesse de 80 kilomètres par heure.

De B part un train de marchandise pour aller vers A qui roule à 100 kilomètres par heure et qui est parti à 10h30.

1. A quelle distance de A vont-ils se croiser ?
2. Quelle heure sera-t-il lorsqu'ils vont se croiser ?

Exercice 22 [7, Grenoble] Soit le cône de révolution ci-dessous. Le rayon du cercle de base a une longueur de $2,5$ cm ; la génératrice $[AB]$ a une longueur de 12 cm ; le point B' sur la génératrice $[AB]$ est situé à une distance de 9 cm de A ; on désigne par h la hauteur de ce cône.



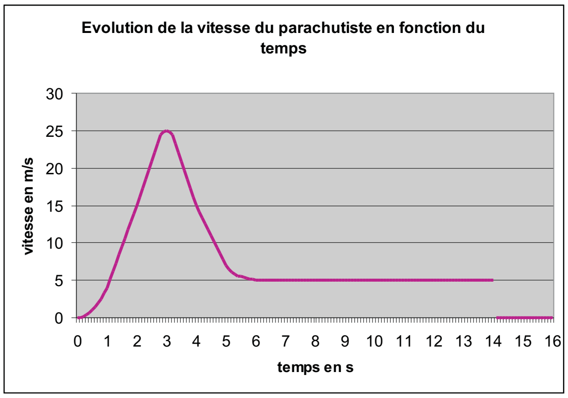
1. (a) Donner le meilleur encadrement possible de h en cm avec des décimaux ayant au plus un chiffre après la virgule.
   (b) En prenant $3,14 < \pi < 3,15$ et l'encadrement de h trouvé ci-haut, déduire le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des entiers, en cm^3. On rappelle que le volume du cône est le produit de l'aire de la base par la hauteur, divisé par trois.
   (c) Pour cette question, si nécessaire, on utilisera les valeurs approchées par défaut que l'on peut déduire des deux questions précédentes. En disposant le cône pointe en bas et hauteur verticale, on le remplit de liquide jusqu'au point B'. Quel est le volume de ce liquide ? Exprimer ce volume en cm^3, puis en cl.
2. Le patron de ce cône (rayon : $2,5$ cm, génératrice : 12 cm) est constitué d'un secteur de disque.
   (a) Démontrer que l'angle de ce secteur mesure 75 degrés.
   (b) Construire ce secteur en vraie grandeur avec règle non graduée et compas (laisser apparents les traits de construction ; justifier cette construction).
   (c) Calculer l'aire de ce secteur.
3. Des cônes ayant tous un volume de $10cl$, mais étant plus ou moins évasés, ont pour hauteurs respectives : 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 25 cm.
   (a) Calculer leurs aires de bases.
   (b) La suite des aires est-elle proportionnelle à la suite des hauteurs ? Justifier la réponse sans argument graphique.
   (c) Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal, les points dont l'abscisse est la hauteur et dont l'ordonnée est l'aire correspondante. En quoi cette représentation confirme-t-elle la réponse donnée dans la question précédente ?

Exercice 23 *Volume*

Soit $ABCDS$ une pyramide (à base carrée $ABCD$) dont tous les côtés mesurent 20 centimètres. Cette pyramide est posée sur sa face carrée $ABCD$ sur une table horizontale. Soit $[SH]$ la hauteur de cette pyramide issue de S.

1. Que vaut SH ?
2. Quel est le volume total de la pyramide $ABCDS$, en litres (résultat arrondi par troncature au dixième de litre) ?
3. On remplit la pyramide d'un liquide. Soit x la hauteur de liquide dans la pyramide $ABCDS$. Exprimer le volume de liquide (exact) en fonction de x, en litres.
4. Représenter la hauteur $[SH]$ de la pyramide $ABCDS$, graduée de $0,2$ litre en $0,2$ litre en taille réelle.

Exercice 24 [13, Aix Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse] Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.



1. Pendant la chute, sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?
2. Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?
3. Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses 3 s et 6 s.
4. Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?
5. Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de 115 m, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

Annexe A

Logique

A.1 Le vrai ou faux

Vrai ou faux : une assertion mathématique est soit vraie, soit fausse. Dans le doute, elle est considérée comme fausse.

Soit une assertion du type :

1. $U =$ "quelque soit a, on a l'assertion A"
   (a) Pour justifier que U est vraie, on utilise la variable a pour *démontrer* A.
   (b) Pour justifier que U est fausse, il suffit de trouver un a (nommé un contre-exemple) tel que A soit fausse.
2. $V =$ "on peut trouver a tel que j'ai l'assertion A"
   (a) Pour justifier que V est fausse, on utilise la variable a pour *démontrer* que A est fausse.
   (b) Pour justifier que V est vraie, il suffit de trouver un a (nommé un exemple) tel que A soit vraie.

A.2 Les opérateurs logiques

Le ET logique :

	A est vraie	A est fausse
B est vraie	A ET B est vraie	A ET B est fausse
B est fausse	A ET B est fausse	A ET B est fausse

Le OU logique :

	A est vraie	A est fausse
B est vraie	A OU B est vraie	A OU B est vraie
B est fausse	A OU B est vraie	A OU B est fausse

L'implication : A **implique** B. On la note $A \Rightarrow B$.

L'implication $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque si A est vraie, alors B l'est aussi.

Si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il est possible que l'implication : $B \Rightarrow A$, soit fausse. On dit alors que A implique B, mais que la réciproque est fausse.

Si l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il est possible que l'implication : $B \Rightarrow A$, soit également vraie. On dit alors que A et B sont équivalentes et on note $A \Longleftrightarrow B$.

L'assertion contraire : Lorsque A est vraie est équivalente à B est fausse, on dit que A et B sont des assertions contraires et on note $B = \overline{A}$. A est vraie et son contraire $\overline{A}$ est fausse, sont deux assertions équivalentes.

La contrapposée : l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie et l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ est vraie sont deux implications équivalentes.

A.3 Plusieurs types de démonstrations usuels

La démonstration par contrapposée : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va montrer $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

La démonstration par l'absurde : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va supposer que A est vraie et que B est fausse pour aboutir à une contradiction.

La démonstration par exhaustion : pour montrer $A \Rightarrow B$, on va décrire l'ensemble de tous les cas qui permettent de réaliser A : A_1, A_2, $\ldots$ et A_p, et montrer que $A_1 \Rightarrow B$, $A_2 \Rightarrow B$, $\ldots$ et $A_p \Rightarrow B$.

A.4 "Il faut" et "Il suffit"

Lorsque $A \Rightarrow B$, on dit qu'**il suffit** que A soit vraie pour que B le soit aussi, mais on dit également que lorsque A est vraie, **il faut** que B le soit aussi.

Dans $A \Rightarrow B$, le "il suffit" porte sue A et le "il faut" porte sur B.

Lors d'une question du type :

1. "Trouver une condition suffisante pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $B \Rightarrow A$;
2. "Trouver une condition nécessaire pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $A \Rightarrow B$;
3. "Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit vraie", il s'agit de trouver une condition B telle que $A \Longleftrightarrow B$.

Exercices non corrigés :

Exercice 1

1. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'assertion A vraie. Donner l'assertion contraire.
2. Même question dans le domaine géométrique.
3. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'implication $A \Rightarrow B$ vraie, telle que l'implication $B \Rightarrow A$ soit fausse. Vérifier alors que l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ est vraie.
4. Même question dans le domaine géométrique.

5. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique d'équivalence $A \Leftrightarrow B$.
6. Même question dans le domaine géométrique.
7. Donner un exemple choisi dans le domaine numérique de démonstration par l'absurde[1].
8. Même question dans le domaine géométrique[2].

Exercice 2 [10, Grenoble, Lyon] Alice, perdue dans la Forêt de l'oubli, ne se souvenait jamais du jour de la semaine. Heureusement, un Lion et une Licorne visitaient souvent cette forêt étrange et pouvaient parfois la tirer de cette embarrassante ignorance. Alice savait que lundi, mardi et mercredi, le Lion ne disait jamais une phrase vraie et ne mentait pas pendant le reste de la semaine. La Licorne ne faisait que mentir jeudi, vendredi et samedi et disait la vérité pendant les autres jours.

1. Alice surprit un jour la conversation suivante entre le Lion et la Licorne
   - Lion : *Hier, je mentais.*
   - Licorne : *Moi aussi.*

   Alice avait un raisonnement logique infaillible. Elle a pu en déduire le jour de la semaine. Indiquez ce jour et le raisonnement utilisé.
2. Une autre fois, Alice rencontra seulement le Lion qui prononça les deux phrases suivantes
   - *Je mentais hier.*
   - *Je mentirai de nouveau dans trois jours.*

   Quel jour cette rencontre a-t-elle eu lieu ? Justifier la réponse.
3. Déterminer quels jours la phrase suivante a pu sortir de la gueule du Lion
   - *Hier, je mentais et je mentirai de nouveau demain.*

   Justifier la réponse.

D'après Raymond Smullyan, *What is the name of this book ?*, Penguin books.

Exercice 3 Deux joueurs font la "course à 10 par pas de 2" : le premier joueur choisit 1 ou 2, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1 ou 2 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 10 en premier. Par exemple, dans la première partie, le joueur A commence et dit : "1" ; le joueur B dit : "$1 + 2 = 3$" ; A dit : "$3 + 2 = 5$" ; B dit "$5 + 1 = 6$" ; A dit : "$6 + 2 = 8$" ; B dit : "$8 + 2 = 10$" et gagne.

1. Dans la deuxième partie, le joueur A arrive à 7 et dit à B : "J'ai gagné !". Justifiez cette affirmation.
2. Dans la troisième partie, le joueur B commence, dit un nombre et annonce : "J'ai gagné !". Quel est ce nombre ?
3. **Le jeu change !** Deux joueurs font la "course à 10 par pas de 3 " : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 10 en premier.

   Quel nombre le joueur qui commence la partie doit-il annoncer pour être sûr de gagner ?

1. L'irrationnalité du nombre d'or, par exemple.
2. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

4. **Le jeu change !** Deux joueurs font la "course à 12 par pas de 3" : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce 12 en premier.

   Pourquoi le joueur qui commence est-il sûr de perdre ?

5. **Le jeu change !** N est un entier naturel strictement supérieur à 3. Deux joueurs font la "course à N par pas de 3" : le premier joueur choisit 1, 2 ou 3, puis chacun, à tour de rôle, ajoute 1, 2 ou 3 au résultat de son adversaire ; le gagnant est celui qui annonce N en premier.

   Quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) doivent respecter les nombres N pour que le joueur qui commence soit sûr de gagner ?

Annexe B

Mesures

Le cadre est celui de la géométrie usuelle de la droite, du plan et de l'espace.

B.1 Introduction

Les mesures dont il est question dans cette partie, sont : la longueur, l'aire, et le volume.

La longueur : elle est utilisée pour mesurer des figures géométriques uni-dimensionnelles bornées (par exemple, des segments).

L'unité universelle est le mètre, qui se décline : un millimètre (un millième de mètre), un centimètre (un centième de mètre), un décimètre (un dixième de mètre) pour des portions, ou un kilomètre (mille mètres), un hectomètre (cent mètres), un décamètre (dix mètres) pour des multiples.

L'aire : elle est utilisée pour mesurer des figures géométriques bi-dimensionnelles bornées (par exemple, des polygones).

L'unité universelle est le mètre carré, qui se décline : un millimètre carré (un millionième de mètre carré), un centimètre carré (un dix millième de mètre carré), un décimètre carré (un centième de mètre carré) pour des portions, ou un kilomètre carré (un million de mètres carrés), un hectomètre carré (dix mille mètres carrés), un décamètre carré (cent mètres carrés) pour des multiples.

Le volume : il est utilisé pour mesurer des figures géométriques tri-dimensionnelles bornées (par exemple, des polyèdres).

L'unité universelle est le mètre cube, qui se décline : un millimètre cube (un milliardième de mètre cube), un centimètre cube (un millionième de mètre cube), un décimètre cube (un millième de mètre cube) pour des portions, ou un kilomètre cube (un milliard de mètres cubes), un hectomètre cube (un million de mètres cubes), un décamètre cube (mille mètres cubes) pour des multiples.

Remarque : le mot bornées n'a pas le même sens lorsqu'il s'agit de figures géométriques uni-dimensionnelles, de figures géométriques bi-dimensionnelles ou de figures géométriques tri-dimensionnelles.

B.2 Longueur, aire et volume

Chacune de ces notions a son cadre propre dans lequel il a vraiment un sens de mesure : la longueur sur la droite (ou sur des courbes du plan ou sur des courbes de l'espace) ; l'aire sur le plan (ou sur des surfaces de l'espace) ; le volume dans l'espace.

B.2.1 Sur la droite

Soient A et B des segments de la droite $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{L}(A \bigcup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A \bigcap B)$, où $\mathcal{L}(X)$ désigne la longueur de X.

Sur la droite, on ne peut parler ni d'aire, ni de volume.

B.2.2 Sur le plan

Soient A et B des figures du plan $\mathcal{P}$, on a $\mathcal{A}(A \bigcup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) - \mathcal{A}(A \bigcap B)$, où $\mathcal{A}(X)$ désigne l'aire de X.

Sur le plan, on ne peut parler de volume.

Cependant, on peut parler de longueur, en considérant la longueur du bord d'une figure. On dénomme usuellement cette longueur par périmètre.

Il est à noter que la propriété :

$$\mathcal{P}(A \bigcup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \bigcap B), \text{ où } \mathcal{P}(X) \text{ désigne le périmètre de } X,$$

est **vraie** à condition de considérer que le périmètre d'un objet uni-dimensionnel (par exemple, un segment), est double de sa longueur. [1]

B.2.3 Dans l'espace

Soient A et B des figures de l'espace $\mathcal{E}$, on a $\mathcal{V}(A \bigcup B) = \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(A \bigcap B)$, où $\mathcal{V}(X)$ désigne le volume de X.

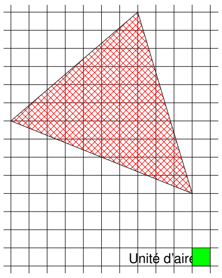
On peut parler d'aire dans l'espace, en considérant l'aire du bord d'une figure. On dénomme usuellement cette aire par surface.

Il est à noter que la propriété :

$$\mathcal{S}(A \bigcup B) = \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A \bigcap B), \text{ où } \mathcal{S}(X) \text{ désigne la surface de } X,$$

est **vraie** à condition de considérer que la surface d'une figure bi-dimensionnelle (par exemple, un polygone) est double de son aire. [2]

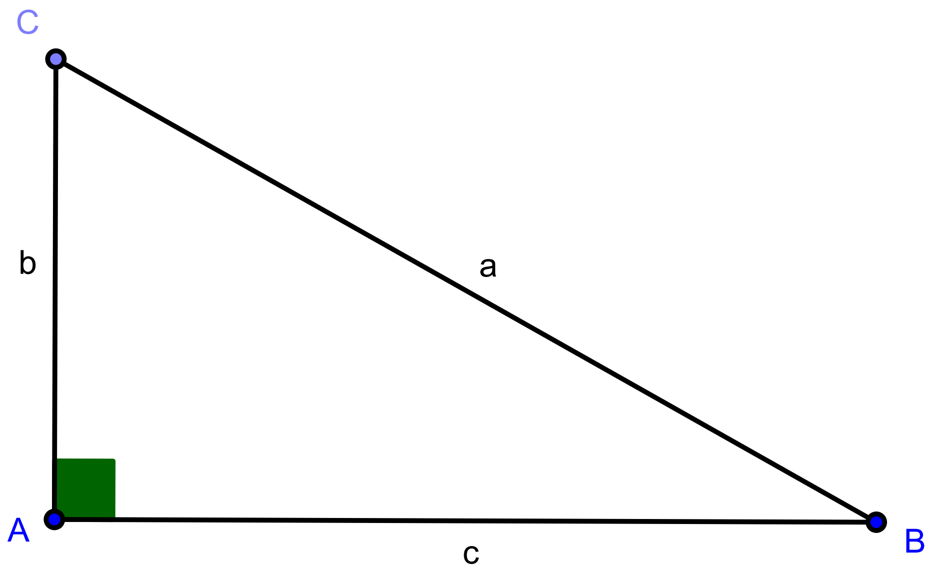
Exercice 1 Quelle est l'aire du triangle en unités d'aire ?



1. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer deux carrés qui coïncident par un côté.
2. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer deux cubes qui coïncident par une face.

Annexe C

Formules de trigonométrie



Le triangle ABC est supposé rectangle en A.

Notons $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ l'angle en B du triangle ABC.

Pour cet angle en B, on nomme

– AB le côté adjacent ;

– AC le côté opposé ;

– et BC l'hypothénuse.

On définit ensuite le cosinus de l'angle en B que l'on note $\cos(\widehat{B})$ comme étant

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}.$$

De même, on définit le sinus de l'angle en B que l'on note $\sin(\widehat{B})$ comme étant

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}.$$

Tels que définis ici, les cosinus et sinus d'un angle sont des nombres réels compris entre 0 et 1.

On peut aussi définir la tangente de l'angle en B que l'on note $\tan(\widehat{B})$ comme étant

$$\tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

C.1 Théorème d'Al-Kashi ou Loi des cosinus

Dans un triangle ABC quelconque (pas nécessairement rectangle comme auparavant), on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Ainsi, de la connaissance des longueurs des côtés d'un triangle, on peut déduire les cosinus de chacun des angles (et par conséquent les angles, soit par lecture inverse de la table des cosinus, soit par utilisation de la touche $\cos^{-1}$ d'une calculatrice) de ce triangle.

Remarque. Dans le cas particullier où l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ et on obtient $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (théorème de Pythagore).

Annexe D

Périmètres, aires et volumes -formulaire-

D.1 Périmètre

Le périmètre du **cercle** est donné par la formule

$$2 \times \pi \times r$$

(où r est le rayon).

D.2 Aire

L'aire d'un **triangle** est donnée par la formule

$$\frac{B \times h}{2}$$

(où B est la longueur de la base et h est la hauteur relative à cette base).

L'aire d'un **carré** est donnée par la formule

$$c^2$$

(où c est la longueur du côté).

L'aire d'un **rectangle** est donnée par la formule

$$L \times l$$

(où L est la longueur de la longueur et l est la longueur de la largeur).

L'aire d'un **losange** est donnée par la formule

$$\frac{D \times d}{2}$$

(où D est la longueur de la grande diagonale et d est la longueur de la petite diagonale).

L'aire d'un **parallélogramme** est donnée par la formule

$$B \times h$$

(où B est la longueur de la base et h est la hauteur relative à cette base).

L'aire d'un **disque** est donnée par la formule

$$\pi \times r^2$$

(où r est le rayon).

D.3 Volume

Le volume d'un **prisme droit** ou d'un **cylindre** est donné par la formule

$$B \times h$$

(où B est l'aire de la base et h est la hauteur relative à cette base).

Le **cube** est un cas particulier de prisme droit. Lorsque son côté mesure c, son volume est donné par la formule :

$$c^3.$$

Le volume d'une **pyramide régulière** ou d'un **cône** est donné par la formule

$$\frac{B \times h}{3}$$

(où B est l'aire de la base et h est la hauteur relative à cette base).

Le **tétraèdre régulier** est un cas particulier de pyramide régulière. Lorsque son côté mesure c, son volume est donné par la formule :

$$c^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Le volume d'une **sphère** est donné par la formule

$$\frac{4 \times \pi \times r^3}{3}$$

(où r est le rayon).

Annexe E

Approximation

Soit a une donnée et soit d une précision.

E.1 Valeur approchée

On donne UNE valeur approchée de a à d près. Dans ce cas, TOUTE valeur comprise entre $a-d$ et $a+d$ convient (i.e. toute valeur x telle que $a-d<x<a+d$ convient).

Pour l'exemple, $a=\pi$ et $d=0,1$, $3,1$, $3,2$, ... ou $3,15$ conviennent.

Lorsque l'on désire quelque chose de plus précis, le vocabulaire doit également l'être.

E.2 Valeur approchée par troncature

On pose pour cette section $d=10^{-p}$ où p est un entier naturel.

LA valeur approchée de

$$a=\sigma\times\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}+\ldots\right)$$

à d près par troncature est

$$\widetilde{a}=\sigma\times\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}\right).$$

[σ est un signe et les a_i sont les chiffres de a en base 10.]

Pour l'exemple, $a=\pi$ et $d=0,1$, LA valeur qui convient est $3,1$. Pour l'exemple, $a=-\pi$ et $d=0,1$, LA valeur qui convient est $-3,1$.

E.3 Valeur approchée par défaut ou par excès

Il faut distinguer les deux définitions suivantes pour "valeur approchée par défaut" selon que l'on parle de "LA valeur approchée par défaut" ou d'"UNE valeur approchée par défaut". Il en est de même pour "valeur approchée par excès".

E.3.1 UNE

On donne UNE valeur approchée par défaut de a à d près. Dans ce cas, TOUTE valeur comprise entre $a-d$ et a convient (i.e. toute valeur x telle que $a-d<x<a$ convient).

Pour l'exemple, $a=\pi$ et $d=0,1$, $3,1$, ... ou $3,11$ conviennent.

On donne UNE valeur approchée par excès de a à d près. Dans ce cas, TOUTE valeur comprise entre a et $a+d$ convient (i.e. toute valeur x telle que $a<x<a+d$ convient).

Pour l'exemple, $a=\pi$ et $d=0,1$, $3,2$, ... ou $3,15$ conviennent.

E.3.2 LA

On pose pour cette section $d=10^{-p}$ où p est un entier naturel.

LA valeur approchée de

$$a=\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}+\ldots\right)$$

à d près par défaut est

$$\widetilde{a}=\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}\right).$$

[Les a_i sont les chiffres de a en base 10.]

LA valeur approchée de a lorsque

$$a+d=\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}+\ldots\right)$$

à d près par excès est

$$\widetilde{a}=\left(a_k\times 10^k+\ldots+a_1\times 10^1+a_0\times 10^0+a_{-1}\times 10^{-1}+a_{-2}\times 10^{-2}+\ldots+a_{-p}\times 10^{-p}\right).$$

[Les a_i sont les chiffres de a en base 10.]

LA valeur approchée de a à d près par défaut est l'opposé de LA valeur approchée de $-a$ à d près par excès.

LA valeur approchée de a à d près par excès est l'opposé de LA valeur approchée de $-a$ à d près par défaut.

Pour l'exemple, $a=\pi$ et $d=0,1$, LA valeur approchée de a à d près par défaut est $3,1$ et LA valeur approchée de a à d près par excès est $3,2$. Pour l'exemple, $a=-\pi$ et $d=0,1$, LA valeur approchée de a à d près par défaut est $-3,2$ et LA valeur approchée de a à d près par excès est $-3,1$.

Remarque : pour les nombres positifs, les notions de valeur approchée par troncature et de valeur approchée par défaut sont identiques, mais pour les nombres négatifs, les notions de valeur approchée par troncature et de valeur approchée par défaut sont différentes.

E.4 Valeur arrondie

LA valeur arrondie de a à d près est LA valeur approchée de $a+\frac{d}{2}$ à d près par défaut.

Pour l'exemple, $a = \pi$ et $d = 0,1$, LA valeur arrondie de a à d près est $3,1$.

Pour l'exemple, $a = 0,05$ et $d = 0,1$, LA valeur arrondie de a à d près est $0,1$.

Pour l'exemple, $a = -0,05$ et $d = 0,1$, LA valeur arrondie de a à d près est 0.

Exercices non corrigés :

Exercice 1 Les données ...

- *A propos de a*

  $2,7$ est la valeur approchée de a à $0,1$ près.
- *A propos de b*

  3 est la valeur approchée par défaut de b à $0,1$ près.
- *A propos de c*

  1 est la valeur arrondie de c à $0,01$ près.
- *A propos de d*

  $2,7$ est la valeur approchée de d à $0,1$ près.

Les questions :

1. A-t-on forcément $a = d$?
2. Donner le meilleur encadrement possible
   - de a.
   - de b.
   - de c.
   - de d.
   - de $b - a$.
   - de $\dfrac{b \times c - a}{d}$.
   - de $\dfrac{d - a}{b - c}$.
   - de $\dfrac{b - a}{c - d}$.
   - et enfin de $\dfrac{b \times c}{d - a}$.

Exercice 2

1. Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $0,000001$ près.
2. Donner une valeur approchée de $665857/470832$.
3. A-t-on $\sqrt{2} = 665857/470832$?

Annexe F

Statistiques

F.1 Introduction

Les statistiques proposent différents indicateurs qui permettent de résumer, ou de rendre apparentes certaines propriétés d'une population que l'on veut étudier.

Population : ensemble de ce qui est étudié, cela peut être des personnes ou des choses.

F.2 Série statistique discrète

Les valeurs du caractère sont discrètes.

Les éléments qui composent la population sont appelés des individus. L'effectif total est le nombre d'individus de la population. Ce qui est étudié de ces individus est appelé un caractère. Un caractère peut être qualitatif ou quantitatif. Une série statistique est l'ensemble des valeurs d'un caractère pour chacun des individus d'une population donnée. Si le caractère étudié est quantitatif, ce sera une série de nombres.

Exemple de série statistique.

On a demandé aux 28 élèves d'une classe de CM1 leur nombre de frères et soeurs. Voici les réponses obtenues :

2 ; 1 ; 0 ; 1 ; 4 ; 0 ; 3 ; 2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 0 ; 0 ; 1 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 0 ; 4 ; 1 ; 2.

Population : les élèves de la classe de CM1.

Caractère : le nombre de frères et soeurs.

Valeurs du caractère : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Effectif total (le nombre d'élèves de la classe) : 28.

Effectif et fréquence.

L'effectif d'une valeur est le nombre d'individus de la population a qui est attribué cette valeur.

La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Reprenons l'exemple précédent. On peut présenter les résultats à l'aide d'un tableau :

Nombre frères et soeurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	6	7	7	4	3	1

La fréquence de la valeur 2 est donc $\frac{1}{4}$ ou $0,25$.

La fréquence d'une valeur correspond à la probabilité de cette valeur.

La moyenne.

La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs pondérées par de cette série par l'effectif total. Exemple de série statistique

Nombre frères et soeurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectif n_i	6	7	7	4	3	1
Fréquence f_i	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{28}$

le nombre de valeurs du caractère est $p = 6$.

Ici, l'effectif total est $n = \sum_{k=1}^{p} n_i : n = 6$.

La moyenne m est $m = \dfrac{\sum_{k=1}^{p} n_i \times x_i}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_i \times x_i : m = \dfrac{\frac{6}{28}\times 0+\frac{7}{28}\times 1+\frac{7}{28}\times 2+\frac{4}{28}\times 3+\frac{3}{28}\times 4+\frac{1}{28}\times 5}{28} = \frac{56}{28} = 2$.

Médiane.

Une valeur médiane Mé partage les valeurs d'une série statistique en deux groupes de manière à ce que

- 50% (ou plus) des valeurs sont inférieures ou égale à Mé ;
- 50% (ou plus) des valeurs sont supérieures ou égale à Mé.

Remarque : dans le cas de médianes multiples, il est d'usage de choisir le moyenne de toutes les médianes.

Dans l'exemple précédent, la seule médiane est 2 car il y a 20 enfants qui ont 2 frères/soeurs ou moins et 15 enfants qui ont 2 frères/soeurs ou plus.

L'étendue.

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite.

Dans l'exemple précédent, l'étendue est $x_6 - x_5 = 5 - 0 = 5$.

Quartiles.

Un premier quartile Q_1 partage les valeurs d'une série statistique en deux groupes de manière à ce que

- 25% (ou plus) des valeurs sont inférieures ou égale à Q_1 ;
- 75% (ou plus) des valeurs sont supérieures ou égale à Q_1.

Un troisième quartile Q_3 partage les valeurs d'une série statistique en deux groupes de manière à ce que

- 75% (ou plus) des valeurs sont inférieures ou égale à Q_3 ;
- 25% (ou plus) des valeurs sont supérieures ou égale à Q_3.

Remarque : dans le cas de quartiles multiples, il est d'usage de choisir le moyenne de tous les quartiles.

Lorsque Q_1 et Q_3 sont déterminés, la différence $Q_3 - Q_1$ s'appelle l'écart inter-quartile.

Dans l'exemple précédent,

- le seul premier quartile est 1 car il y a 13 enfants qui ont 1 frères/soeurs ou moins et 22 enfants qui ont 1 frères/soeurs ou plus ;
- le seul troisième quartile est 3 car il y a 24 enfants qui ont 3 frères/soeurs ou moins et 8 enfants qui ont 3 frères/soeurs ou plus ;
- l'écart inter-quartile est $3 - 1 = 2$.

F.3 Série statistique classée

Les valeurs du caractère sont classées (des intervalles).

L'effectif d'une classe est le nombre de valeurs comprises dans cette classe. La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total. L'amplitude d'une classe est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de cette classe.

Exercice 1 Dans le but d'étudier la loi de survie d'un certain type de matériel, une entreprise s'est livrée sur 600 machines identiques à des observations résumées dans le tableau suivant :

Année de mise en réforme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de machines encore en service à la fin de l'année	600	592	564	508	391	267	155	87	34	17	7	2	0

– Déterminer la durée médiane d'existence du type de matériel utilisé, en justifiant votre résultat. Donner une interprétation du résultat obtenu.

– Déterminer sa durée moyenne d'existence. On admettra que les mises à la réforme s'effectuent de façon uniforme dans le courant de l'année. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

Durée de vie des machines en années	$[0,1]$	$]1,2]$	$]2,3]$	$]3,4]$	$]4,5]$	$]5,6]$	$]6,7]$	$]7,8]$	$]8,9]$	$]9,10]$	$]10,11]$	$]11,12]$
Effectif des machines	8	28	56	117	124	112	68	53	17	10	5	2
Effectifs cumulé des machines	8	36	92	209	333	445	513	566	583	593	598	600

1. La moitié de l'effectif est 300, la médiane est donc une valeur comprise dans l'intervalle $]4,5[$.

   Le calcul exact de cette valeur s'effectue par interpolation linéaire en cherchant l'abscisse du point d'ordonnée 300 de la droite qui passe par les points de coordonnées $(4;209)$ et $(5;333)$. Cette droite représente graphiquement la fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto a \times x + b$ vérifiant $f(4) = 209$ et $f(5) = 333$, ce qui donne $f(x) = 124 \times x - 287$.

   $f(x) = 300$ donne $x = \frac{587}{124}$. La médiane est donc de $\frac{587}{124}$ années, ce qui est proche de $4,7$ années.
2. Le calcul de la moyenne m s'effectue en utilisant les centres des classes

$$m = \frac{8 \times 0,5 + 28 \times 1,5 + 56 \times 2,5 + 117 \times 3,5 + 124 \times 4,5 + 112 \times 5,5 + 68 \times 6,5 + 53 \times 7,5 + 17 \times 8,5 + 10 \times 9,5 + 5 \times 10,5 + 2 \times 11,5}{600} = \frac{2924}{600}.$$

$m = 4,87$ arrondi à 10^{-2} près.

F.4 Exercices non corrigés

Exercice 2 Dans deux classes de 24 élèves chacune, on demande aux collégiens qui utilisent tous l'autobus, combien de temps ils passent dans ce moyen de transport pour se rendre à leur collège.

(a) Reproduire et compléter la première colonne du tableau suivant qui représente les résultats de cette enquête, en sachant que tous les élèves ont donné une réponse.

Temps en minutes	Effectif	Fréquences f_i
$0 < t < 15$	6	
$15 \leq t < 30$	24	
$30 \leq t < 45$		
$45 \leq t < 60$	3	

(b) Quel est l'effectif d'élèves passant au moins 30 minutes dans l'autobus pour se rendre au collège ?

(c) Déterminer les valeurs maximales et minimales de la variable étudiée.

(d) Compléter la colonne des fréquences correspondant à cette étude statistique.

Exercice 3 Dans une entreprise, les salaires, en euros, se répartissent de la façon suivante :

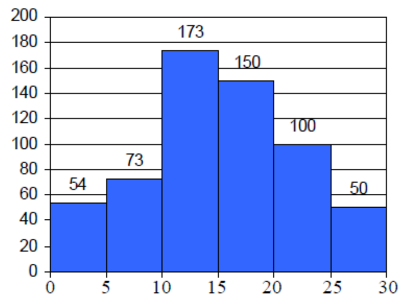
Classes	Effectifs	Classes	Effectifs
$[1000; 1200[$	12	$[1600; 1800[$	18
$[1200; 1400[$	20	$[1800; 2000[$	6
$[1400; 1600[$	40	$[2000; 2200[$	4

(a) Faites un histogramme des effectifs.

(b) Quel est le salaire médian dans cette entreprise ?

(c) Quel est le salaire moyen dans cette entreprise ?

Exercice 4 Une enquête sur l'argent de poche mensuel de 600 jeunes a donné les résultats regroupés sous la forme de l'histogramme suivant :



(a) Compléter le tableau suivant :

Somme d'argent en eurosx_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Angle en degrés
$[0;5[$			
$[5;10[$			
$[10;15[$			
$[15;20[$			
$[20;25[$			
$[25;30[$			
Total	600	1	360

(b) Regrouper les données sous la forme d'un diagramme à secteurs.

(c) Calculer le montant moyen.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ On considère un ensemble de notes : $12; 4; 16; 16; 16; 7; 9; 12; 9; 12$.

(a) Faire un tableau d'effectifs et établir un diagramme en bâtons.

(b) On répartit les notes en quatre sous-groupes selon qu'elles appartiennent à l'intervalle : $[0;5[$, $[5;10[$, $[10;15[$ ou $[15;20[$.

(c) Faire un tableau d'effectifs et établir un histogramme.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Trouver le 1er et le 3e quartile de la série : $27; 12; 4,5; 16; 25; 18; 7; 15; 12,5; 26; 18,5; 11$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Si on ajoute 2 à toutes les valeurs d'une série statistique, on augmente

(a) la médiane de 2.

(b) la moyenne de 2.

(c) l'étendue de 2.

(d) le premier quartile de 2.

Annexe G

Probabilités

G.1 Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** vérifie trois conditions :

– elle est reproductible dans les mêmes conditions ;

– on connaît tous ces résultats possibles ;

– on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire lorsqu'on réalise l'expérience.

Chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé une **issue** de cette expérience. L'univers Ω d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues de cette expérience. Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω. Un événement A est **réalisé** par une expérience si celle-ci abouti à une issue appartenant à A. Deux événements A et B sont **incompatibles** si ils ne peuvent pas être réalisés en même temps ce qui signifie que $A \bigcap B = \emptyset$. L'évènement **contraire** de A est noté $\overline{A}$ il vérifie $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ et $A \bigcap \overline{A} = \emptyset$ (donc A et $\overline{A}$ sont incompatible). Un événement qui ne comporte qu'une seule issue est un **événement élémentaire**. Des événements élémentaires distincts sont incompatibles.

G.2 Loi des grands nombres

Considérons une expérience aléatoire et A un événement relatif à cette expérience. Si on répète n fois cette expérience, l'évènement A sera réalisé un certain nombre de fois que l'on notera x_n. Lorsque n augmente, la fréquence $f_n = \frac{x_n}{n}$ tend à se stabiliser vers une valeur qui est la probabilité de l'évènement A et est notée $P(A)$.

G.3 Propriétés

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Si $P(A) = 1$, l'événement A est appelé l'événement certain et $A = \Omega$.
3. Si $P(A) = 0$, l'événement A est appelé l'événement impossible et $A = \emptyset$.
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

6. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.
7. La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.

G.4 Situation d'équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité on dit qu'ils sont équiprobables. Soit n le nombre d'éléments de Ω. Si tous les évènements élémentaires sont équiprobables alors la probabilité de chacun d'entre eux est $\frac{1}{n}$. Considérons un événement A dans cette situation, alors $P(A) = \frac{card(A)}{n}$ (le cardinal deA, noté $card(A)$, est le nombre d'éléments de A).

G.5 Exemples

1. Lancer un dé à 6 faces équilibrées et noter le nombre de points inscrits sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

   $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

   Notons A l'évènement "Obtenir un nombre pair", $A = \{2; 4; 6\}$.

   Donc la probabilité d'obtenir un nombre pair est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Lancer deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Une des deux faces sera notée "p" (pour *pile*) et l'autre "f" (pour *face*). Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile" ?

   $\Omega = \{(p; p); (p; f); (f; p); (f; f)\}$ et tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

   Notons A l'évènement "Obtenir au moins une fois *pile*", $A = \{(p; p); (p; f); (f; p)\}$.

   Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois "pile" est de $\frac{3}{4}$.

3. Prendre au hasard et successivement sans remise deux boules dans une urne contenant 2 boules rouges et 2 boules vertes. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules identiques ? On note "r" la boule rouge et "v" la boule verte.

   $\Omega = \{(r; r); (r; v); (v, r); (v; v)\}$ et tous les événements élémentaires ne sont pas équiprobables. Soit A l'évènement "Obtenir deux boules identiques", $A = \{(r; r); (v; v)\}$.

   La probabilité d'obtenir deux boules identiques est de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

G.6 Exercices non corrigés

Exercice 1 Un sac opaque contient des bonbons bleus, rouges ou verts, tous indiscernables au toucher. Quand on tire un bonbon au hasard, on a deux chances sur cinq de prendre un bonbon rouge, et trois chances sur dix de prendre un bonbon bleu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un bonbon rouge ou un bonbon bleu ?
2. En déduire la probabilité d'obtenir un bonbon vert.

Exercice 2 Dans un sac on a placé trois jetons numérotés 3 ; 4 et 5. On tire au hasard, successivement et sans les remettre dans le sac, tous les jetons du sac. On écrit le nombre qui a comme chiffre des centaines, le premier nombre tiré, comme chiffre des dizaines le deuxième nombre titré, et comme chiffre des unités le troisième nombre tiré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 453 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 453 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de 3 ?

Exercice 3 On dispose de deux sacs identiques contenant des boules numérotés de 1 à 5. On tire au hasard une boule dans chaque sac et on additionne les numéros figurant sur chaque boule.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 3 ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une somme supérieure ou égale à 4 ?

Exercice 4 On dispose d'une roue de loterie et d'un sac qui contient deux boules blanches et trois boules noires. Si la roue de loterie tombe sur un nombre pair alors on tire une boule dans le sac. Quelle et la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 5 Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une fois le côté "pile" en lançant trois fois une pièce de monnaie équilibrée ?

Exercice 6 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements suivants : A : "On obtient un roi" , B : "On obtient un as" , C : "On obtient un trèfle"

1. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ? Et les événement B et C ? Justifie tes réponses.
2. Décrire par une phrase sans négation l'événement contraire de l'événement C.
3. Proposer un événement D incompatible avec l'événement C.
4. Déterminer les probabilités des évènements A, B et C.
5. Quelle est la probabilité de l'événement contraire de l'événement C ?
6. Donner la probabilité de l'événement proposé à la question c.

Exercice 7 Une roue de loterie est partagée en six secteurs identiques : un à zéro point, deux à 50 points et trois à 10 points. Un joueur fait tourner la roue et gagne le montant indiqué par l'aiguille.

1. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2. Quelle est la probabilité de gagner au moins 10 euros ?

Exercice 8 Une urne opaque contient 3 boules bleues (B), 2 boules vertes (V). On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule au hasard.

1. Dessiner l'arbre des probabilités pondéré par les probabilités sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité de tirer 2 boules bleues.
3. Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur.

Exercice 9 On considère deux dés cubiques, l'un rouge et l'autre vert. Chaque face de chaque dé est numérotée de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés.

1. Élaborer un tableau indiquant tous les couples qu'il est possible d'obtenir lors d'un lancer. Combien en existe-t-il ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un couple composé des mêmes chiffres ?
3. On s'intéresse maintenant à la somme des chiffres apparue lors d'un lancer.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 2 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 11 ?
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme au moins égale à 3 ?

Exercice 10 À la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de 3ème de 25 élèves. 48% des élèves ont 14 ans, $\frac{1}{5}$ ont 16 ans, les autres ont 15 ans.

1. On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande son âge. Dessiner l'arbre des possibles, pondéré par les probabilités.
2. Lors de cette enquête, on leur a demandé s'ils utilisaient un sac à dos ou un sac en bandoulière.
   (a) $\frac{1}{6}$ des élèves de 14 ans ont un sac à dos.
   (b) $\frac{3}{8}$ des élèves de 15 ans ont un sac en bandoulière.
   (c) 60% des élèves de 16 ans ont un sac à dos.

   On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande le type de sac qu'il utilise.
   (a) Dessiner l'arbre des possible pondéré par les probabilités en complétant celui de la question 1.
   (b) Calculer la probabilité de chacun des évènements :
      i. A : "L'élève a 14 ans et un sac à dos" ;
      ii. B : "L'élève a 15 ans et un sac à dos" ;
      iii. C : "L'élève a 16 ans et un sac à dos".
   (c) En déduire la possibilité que l'élève ait un sac à dos.

Exercice 11 On considère l'expérience suivante, qui se déroule en 2 étapes : d'abord on tire 1 boule dans une urne contenant 3 boules blanches (B) et 1 boule noire (N). Ensuite on tire 1 boule dans une autre urne contenant 2 boules numérotées 1, 3 boules numérotées 2 et 2 boules numérotées 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Si on tire une boule blanche, puis une boule numérotée 1, on note $(B, 1)$ le résultat obtenu, etc.

1. Dessine l'arbre des possibles pondéré par les probabilités et note chaque issue possible.
2. Imaginons que l'on reproduise 120 000 fois cette expérience à 2 épreuves. Quelle proportion de ces 120 000 expériences conduisent alors au résultat $(B, 1)$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir $(N, 2)$? Et $(B, 3)$?

Annexe H

Problèmes algébriques

H.1 Equations linéaires

On considère une équation en x du type $a \times x + b = c \times x + d$. Sa solution est

- si $a = c$ et $b = d$, tout x est solution.
- si $a = c$ et $b \neq d$, aucun x n'est solution.
- si $a \neq c$, $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ est l'unique solution.

Théorème H.1

Soient a, b, c et d des réels tels que $a \neq c$, alors :

$$a \times x + b = c \times x + d \Longleftrightarrow x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Soient a, b et c des réels, alors :

$$a \times x + b = a \times x + c \Longleftrightarrow b = c \text{ et } x \text{ est quelconque.}$$

H.2 Systèmes d'équations linéaires

On considère un système 2×2 d'équations (E) en x et y

$$\begin{cases} a \times x + b \times y = c \\ a' \times x + b' \times y = c' \end{cases}$$

Méthode de résolution par substitution

De la première équation, on tire, en multipliant par a', que $a \times a' \times x + b \times a' \times y = c \times a'$. Or, dans la seconde, on sait que $a' \times x = -b' \times y + c'$. En substituant $a' \times x$, on obtient $a \times (-b' \times y + c') + b \times a' \times y = c \times a'$, on est ramené à une équation dont on a déjà vu la résolution qui nous permet d'obtenir y [1]. Enfin, la valeur trouvée pour y réinjectée dans l'une des deux équations de départ permet de déduire x.

Méthode de résolution par opérations élémentaires sur les lignes

1. Dans le cas où $a \times b' = a' \times b$, il peut ne pas y avoir de solution ou y en avoir une infinité ...

Notons (1) la première équation et (2) la seconde. Le système $[(1);(2)]$ équivaut à $[a' \times (1) - a \times (2);(2)]$ et l'équation $a' \times (1) - a \times (2)$ se résout aisément car elle n'a qu'une indéterminée[2].

Attention, ces méthodes traitent les équations linéaires (ou les systèmes linéaires), mais dans les problèmes algébriques, les équations ne sont pas toujours linéaires.

Note Ces méthodes se généralisent aux systèmes 3×3, ...

H.2.1 Equations non linéaires

Théorème H.2

Soit a un réel positif ou nul, alors :

$$\begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = \sqrt{a}.$$

Plus généralement,

Théorème H.3

Soit a un réel positif ou nul et n un entier naturel, alors :

$$\begin{cases} x^n = a \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = \sqrt[n]{a}.$$

Exercices non corrigés :

Pour des équations linéaires, on se reportera au chapitre sur la proportionnalité.

Exercice 1 [9, Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice] Les aires des faces d'un parallélépipède rectangle sont 96, 160 et 240. Quel est le volume de ce polyèdre ?

Exercice 2 [8, Besançon] Soit le triangle TRI rectangle en R tel que $RI = 3$ et $TR = 4$, une unité de longueur ayant été fixée. M est un point du segment $[RI]$. On pose $RM = x$.

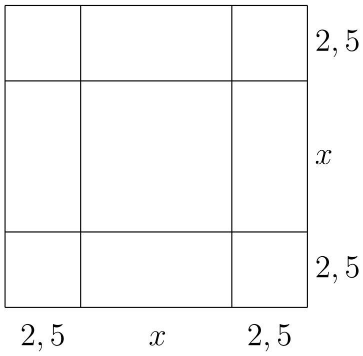
1. Construire un rectangle $MECA$ tel que E est sur $[RT]$, C et A sur $[TI]$.
   (a) Les constructions seront faites à la règle et au compas et resteront visibles.
   (b) Justifier la construction.
2. (a) Démontrer que la longueur h de la hauteur $[RH]$ du triangle rectangle TRI est égale à 12/5.
   (b) Calculer la longueur ME.
   (c) Calculer la longueur EC.
3. On se pose le problème de l'existence de points M tels que ce rectangle soit carré, le résoudre.

Exercice 3 [9, Rennes] Le but de cet exercice est d'appliquer une présentation non familière utilisée par le mathématicien arabe Al khuwarizmi au IX$^{\text{ème}}$ siècle pour trouver une solution positive d'une équation du second degré.

Recherche d'une solution positive d'une équation du second degré.

Exemple Soit $x^2 + 10 \times x = 39$ une équation dont on recherche, si elle existe, une solution positive.

2. Attention au cas où $a \times b' = a' \times b$.



Objet	Aire de l'objet
Carré central	x^2
Un rectangle adjacent au carré central	$2,5 \times x$
L'ensemble des quatre rectangles adjacents au carré central	$4 \times 2,5 \times x = 10 \times x$
Un petit carré de coin	$2,5^2 = 6,25$
L'ensemble des quatre petits carrés de coin	$4 \times 6,25 = 25$
Le grand carré	$\underbrace{x^2 + 10 \times x}_{=39 \text{ d'après l'équation}} +25 = 64$

Ainsi, le côté du grand carré mesure $8 = x + 2 \times 2,5 = x + 5$, puis $x = 3$. On vérifie aisément que 3 est bien solution de l'équation de départ.

1. Reproduire le raisonnement pour l'équation $x^2 + 2 \times x = 24$.
2. Ecrire sans justification la suite des calculs (un calcul par ligne) vous permettant de calculer l'une des solutions de $x^2 + 5 \times x = 84$.
3. Décrire en langage courant cet algorithme particulier indiquant une méthode générale dans le cas $x^2 + a \times x = b$, où a et b sont des entiers naturels, et où l'équation possède au moins une solution positive.